

13. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M , причем $CM=1$

А) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM

Б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM

Ответ: б) $4\sqrt{3}$

15. Решите неравенство $27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$

Ответ: $(-\infty; -2]; [-1; 0]$

16. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L .

Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

А) Докажите, $\angle BML = \angle BAC$

Б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$

Ответ: 80

17. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Ответ: 25 млн рублей

18. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения

Ответ: $(-2; 0), (0; 2)$

19. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы два мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое число конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа четверть своих конфет. После этого у любых двух девочек оказалось одинаковое число конфет, а у любых двух мальчиков – разное. Известно, что каждый из детей отдал натуральное число конфет.

А) Может ли мальчиков быть ровно столько же, сколько девочек?

Б) Может ли мальчиков быть больше, чем девочек?

В) Пусть девочек вдвое больше, чем мальчиков. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет?

Ответ: а) да; б) нет; в) да