Практикум по теме «Теория вероятностей»

И. И. Аксанова

учитель математики высшей категории

МБОУ «Высокогорская СОШ № 2»

Введение

В данной работе представлен авторский алгоритм решения задач по теории вероятностей. Пособие предназначено для учащихся старших классов при подготовке к ЕГЭ, для учителей, и также для любого человека, который хочет научиться решать задачи по теории вероятностей. Идея подхода к решению задач заключается в схематичном изображении условия задачи: в виде перебора событий, дерева событий, отрезков вероятностей событий. Задачи условно разделены на несколько типов. При решении задач применяются формулы сложения и умножения вероятностей. Наглядность схемы позволяет ответить на все возможные вопросы по данной задаче. На схеме около каждого события написана его вероятность.

1. **Задачи I типа**. Для решения задач этого типа используются формула P(A)=m/n вероятность наступления благоприятного события (m- количество благоприятных событий) из n равновозможных событий. И проводится перебор событий по условию задачи.

Задача 1.1. Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

<u>Решение.</u> Переберем равновозможные события: **ЧЧ**, ЧН, НН, НЧ, где Ч – четная цифра, Н – нечетная цифра, количество равновозможных событий n=4. Количество благоприятных событий: **ЧЧ**, m=1

P=1/4=0,25 Ответ: 0,25

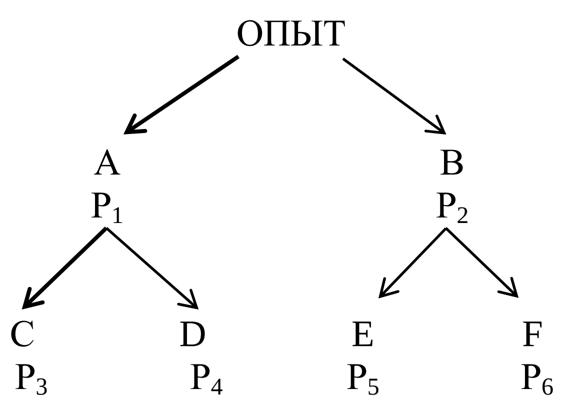
Задача 1.2. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер».

Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение. В данной задаче нет необходимости записывать перебор всех равновозможных событий, так как количество равновозможных событий вычисляется по формуле: $n = 2^3 = 8$ (Команда «Статор» играет с тремя командами). Количество благоприятных событий: $m=1$. 101, где 1- начинает игру, 0 – не начинает игру.

$P=1/8=0,125$ Ответ: 0,125

2. **Задачи II типа.** Для решения задач этого типа используются формулы: $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$ - вероятность независимых событий (на схеме независимые события «связаны» стрелками по вертикали); $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ - вероятность несовместных событий (на схеме несовместные события расположены по горизонтали); $P(\bar{A})=1 - P(A)$ - вероятность противоположного события. По условию задачи составляем и дерево вероятностей. На схеме жирным шрифтом выделяются стрелки, указывающие путь решения задачи. Например, если в задаче даны два несовместных события A и B они располагаются на схеме по горизонтали, а вероятности несовместных событий складываются, т.е. вероятности событий по горизонтали складываются. События A и C, A и D, B и F, B и E попарно независимы они располагаются на дереве вероятностей по вертикали, а вероятности независимых событий умножаются, т.е. вероятности событий по вертикали умножаются. Дерево вероятностей данного примера приведено ниже.



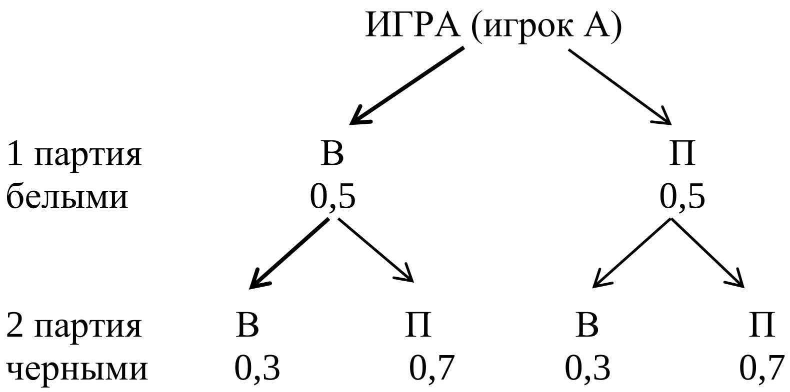
Тогда полная вероятность вычисляется следующим образом

$$P=p_1 \cdot p_3+p_1 \cdot p_4+p_2 \cdot p_5+p_2 \cdot p_6$$

По условию задачи бывает достаточно просто расположить события на дереве вероятностей.

Задача 2.1 . Если шахматист А играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б с вероятностью 0,5. Если А играет черными, то А выигрывает у Б с вероятностью 0,3. Шахматисты А и Б играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А выиграет оба раза.

<u>Решение.</u> На схеме В – выиграл, П – проиграл. Р=1-0,5=0,5 вероятность проиграть первую игру, Р=1-0,3=0,7 вероятность проиграть вторую игру.



Р=0,5 · 0,3=0,15 Ответ: 0,15

Примечание. На схеме видно, что можно также ответить и на следующие вопросы. Первую игру выиграл, а вторую проиграл: Р=0,5 · 0,7=0,35. Первую и вторую проиграл: Р=0,5 · 0,7= 0,35.

Задача 2.2. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

<u>Решение.</u> На схеме ББ – бракованная батарейка, ИБ – исправная батарейка. Р=1- 0,06= 0,94 - вероятность, что батарейка исправна.

БАТАРЕЙКА

	ББ		ИБ	
1 батарейка	0,06		0, 94	
	ББ	ИБ	ИБ	ББ
2 батарейка	0,06	0,94	0,94	0,06

Р= 0,94· 0,94=0,883 Ответ: 0,8836.

Примечание. На схеме видно, что можно также ответить и на следующие вопросы. Обе батарейки бракованные: Р=0,06 · 0,06=0,0036. Одна из батареек бракованная, а другая исправная: Р=0,06 · 0,94=0,0564.

Задача 2.3. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

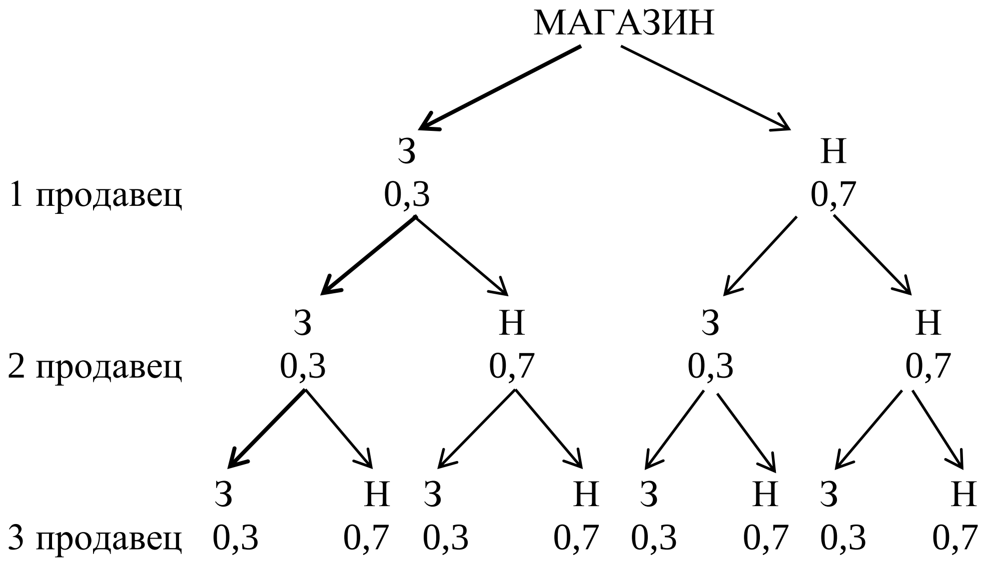
ВОПРОС

Вписанная окружность Параллелограмм
0,2 0,15

Р=0,2+0,15=0,35 Ответ: 0,35

Задача 2.4. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение. На схеме З – продавец занят, Н – продавец не занят. Р=1-0,3=0,7 – вероятность, что продавец не занят.

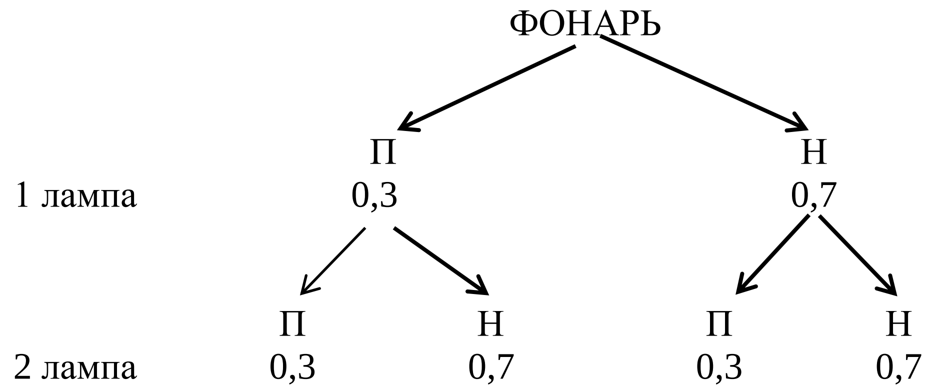


P= 0,3· 0,3· 0,3=0,027 Ответ: 0,027

Примечание. На схеме видно, что можно также ответить и на следующие вопросы. Первый продавец занят, а второй и третий не заняты: P= 0,3· 0,7· 0,7=0,147. Все продавцы не заняты: P= 0,7· 0,7· 0,7=0,343.

Задача 2.5. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. На схеме П – лампа перегорит, Н - лампа не перегорит. P=1-0,3=0,7- вероятность, что лампа не перегорит.

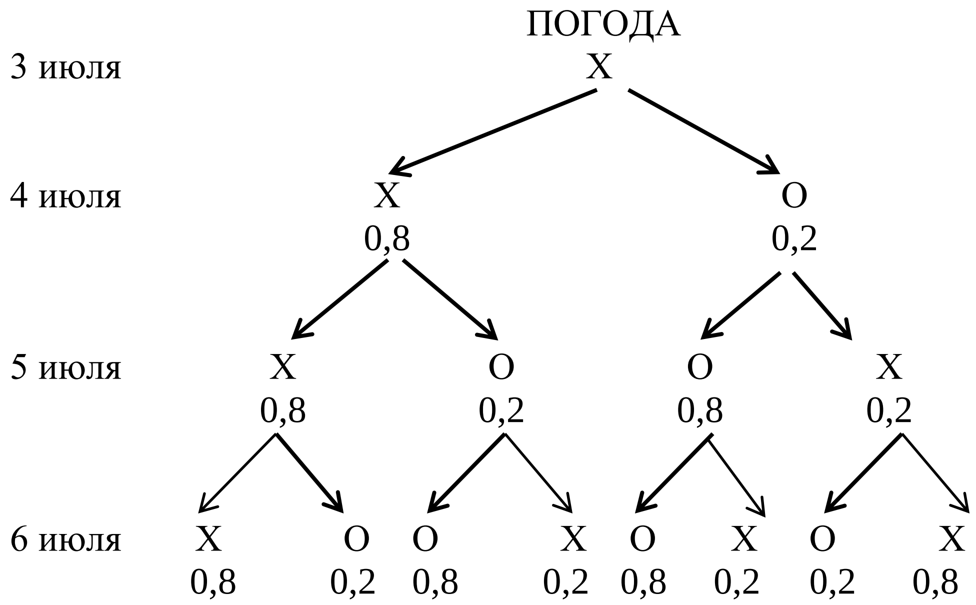


P=0,3· 0,7+0,3· 0,7+0,7· 0,7=0,91. Ответ: 0,91

Примечание. На схеме видно, что можно также ответить и на следующие вопросы. Ни одна лампа не перегорит: P=0,7 · 0,7=0,49. Обе лампы перегорят: P=0,3 · 0,3=0,09.

Задача 2.6. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. На схеме Х – хорошая погода, О – отличная погода. P=1- 0,8=0,2 – вероятность, что погода изменится.



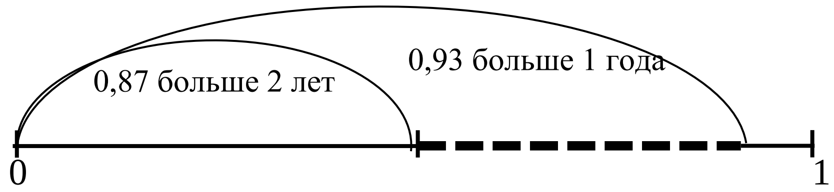
P= 0,2 ·0,8· 0,8+0,8 ·0,2· 0,8+0,8 ·0,8· 0,2+0,2· 0,2· 0,2=0,392. Ответ: 0,392

Примечание. На схеме видно, что можно также ответить и на следующий вопрос. Вероятность того, что 6 июля будет хорошая погода:
P= 0,8 ·0,8· 0,8+0,2 ·0,2· 0,8+0,2 ·0,8· 0,2+0,8· 0,2· 0,2=0, 608.

3. Задачи III типа. Задачи третьего типа удобно изображать на отрезке, где весь отрезок – это полная вероятность, которая равна 1. Нахождение вероятностей событий сводится к нахождению длины отрезка. На схеме дугами выделены вероятности событий, а ответ задачи обозначен на отрезке штрихом.

Задача 3.1. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

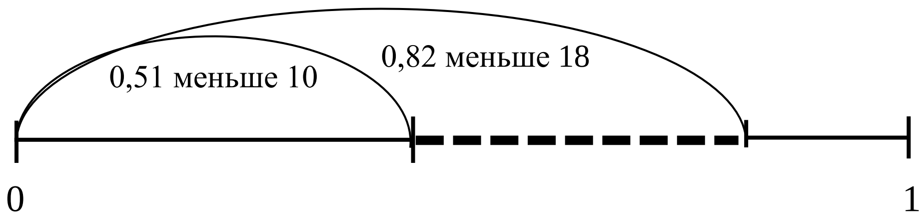
Решение.



P=0,93-0,87=0,06. Ответ: 0,06

Задача 3.2. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение.



P= 0,82-0,51=0,31. Ответ: 0,31

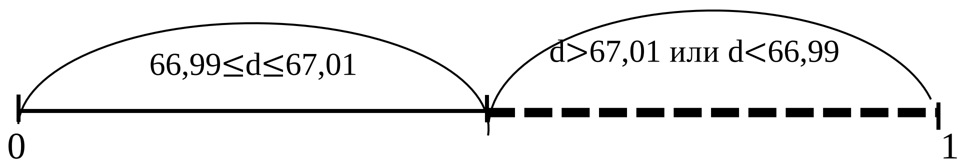
Задача 3.3. Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

Решение.

P=0,79-0,7=0,09.   Ответ: 0,09

Задача 3.4. При изготовлении подшипников диаметром d=67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Решение. Заметим, что P=0,965- это вероятность, что для диаметра подшипника выполняется неравенство 67-0,01=66,99 ≤ d≤ 67+0,01=67,01.

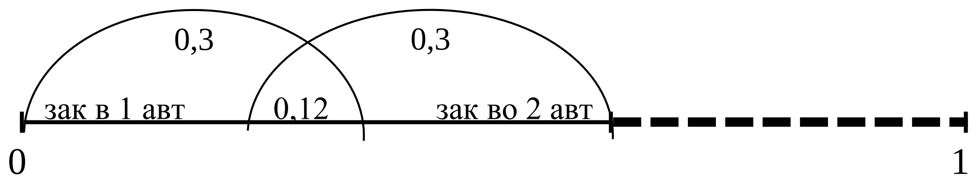


P=1-0,965=0,035.   Ответ: 0,035

4. Задачи IV типа. Для решения задач этого типа используются формулы: P(A∪B)=P(A)+(B) - P(A∩B) - вероятность зависимых событий; P (Ā) =1 - P(A) - вероятность противоположного события. Условия задач этого типа удобно изображать на отрезке, где весь отрезок – это полная вероятность, которая равна 1. На схеме дугами выделены вероятности событий, а ответ задачи выделен на отрезке штрихом. В отличие от предыдущего типа здесь есть часть отрезка, относящаяся к обоим событиям. При сложении длин пересекающихся отрезков пересекающаяся часть в сумме повторяется дважды. Поэтому эта часть один раз вычитается из суммы.

Задача 4.1. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Заметим, что кофе закончится в первом и втором автомате одновременно - события зависимые. Иначе бы вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах одновременно равнялась бы $P=0,3\cdot 0,3=0,09$, а по условию задачи $P= 0,12$.



$P=1-(0,3+0,3-0,12)=0,52$. Ответ: 0,52

5. Задачи V типа. Для решения задач этого типа используются формулы: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ - вероятность независимых событий (на схеме события «связаны» стрелками по вертикали); $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ - вероятность несовместных событий (на схеме несовместные события расположены по горизонтали); $P(\bar{A})=1 - P(A)$ вероятность противоположного события; $P(A)=m/n$ вероятность наступления благоприятного события (m- количество благоприятных событий) из n равновозможных событий. Также используются перебор событий и дерево вероятностей. На схеме жирным шрифтом выделены стрелки, указывающие путь решения задачи.

Задача 5.1. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение. Заметим, что всего монет 6. Так как по условию задачи из двух пятирублевых монет одна должна остаться в первом кармане, а одну нужно переложить в другой карман, возможны следующие варианты выбора трех

монет: 1-ый набор - 5,10,10; 2-ой набор - 10,5,10; 3- ий набор - 10,10,5.
Составим дерево вероятностей для этих случаев (все возможные варианты перебирать слишком громоздко).

МОНЕТЫ – **5,5,10,10,10,10**

1 монета	Монета **5** 2/6	Монета **10** 4/6	Монета **10** 4/6
2 монета	Монета **10** 4/5	Монета **10** 3/5	Монета **5** 2/5
3 монета	Монета **10** 3/4	Монета **5** 2/4	Монета **10** 3/4

$P=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{10}=0{,}6$ Ответ: 0,6

Заключение.

Итак, представленный в данной работе алгоритм решения задач по теории вероятностей, на мой взгляд, дает возможность четко увидеть условия задачи и достаточно просто увидеть путь ее решения.

Использованная литература и ресурсы:

1. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. Элементы статистики и теории вероятностей. М: Просвещение, 2015

2. http://mathege.ru/or/ege/Main.html -Открытый банк заданий по математике