ЗАДАНИЕ 17 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Оглавление

Аннотация

В данном пособии разобраны все прототипы экономической задачи (№17) за все годы проведения ЕГЭ. Все решения являются авторскими. Автор разрешает свободное использование пособия в учебных целях.

Пожелания учащимся

Экономическую задачу №17 на экзамене решают верно только 15% учеников. Автор надеется, что это пособие поможет вам войти в их число. Обсуждайте решения с одноклассниками, задавайте вопросы учителям, репетиторам и на сайтах самоподготовки. Ведь активность в учебе – залог успеха!

Об авторе

Тимур Гуев – сотрудник Mail.Ru Group, учитель математики школы №1363, программист. Основатель и преподаватель онлайн-школы BEEGEEK (http://www.beegeek.ru/).

Открыт для обсуждения, критики и сотрудничества.

Глава 1

Образцы заданий 2018 года

1. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какую сумму взяли в кредит, если известно, что кредит был выплачен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма выплат составила 311040 рублей.

Решение. Так как в задаче все четыре платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах. Пусть ежегодный платеж по кредиту равен X млн рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 20%, то есть в $m = 1 + \dfrac{20}{100} = 1.2$ раз, и уменьшается на X млн рублей. Обозначим начальную сумму S. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $S \cdot m - X$,

Долг после 2-й выплаты: $(Sm - X) \cdot m - X = Sm^2 - Xm - X$,

Долг после 3-й выплаты: $\big(Sm^2 - Xm - X\big) \cdot m - X = Sm^3 - Xm^2 - Xm - X$,

Долг после 4-й выплаты: $\big(Sm^3 - Xm^2 - Xm - X\big) \cdot m - X = Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X$.

Так как кредит был погашен за четыре года, то

$$Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Longrightarrow X = \frac{Sm^4}{1 + m + m^2 + m^3}.$$

Общая сумма выплат равна $4X = \dfrac{4Sm^4}{1 + m + m^2 + m^3} = 311040$. Отсюда

$$S = \frac{311040 \cdot (1 + m + m^2 + m^3)}{4m^4} = 201300.$$

Ответ: 201300 рублей.

2. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какую сумму взяли в кредит, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и общая сумма выплат на 65500 рублей больше суммы кредита.

Решение. Так как в задаче все 3 платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах. Пусть ежегодный платеж по кредиту равен X рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 25%, то есть в $m = 1 + \dfrac{25}{100} = 1.25$ раз, и уменьшается на X млн рублей.

Обозначим начальную сумму S. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $S \cdot m - X$,

Долг после 2-й выплаты: $(Sm - X) \cdot m - X = Sm^2 - Xm - X$,

Долг после 3-й выплаты: $\big(Sm^2 - Xm - X\big) \cdot m - X = Sm^3 - Xm^2 - Xm - X$.

Так как кредит был погашен за 3 года, то

$$Sm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Longrightarrow X = \frac{Sm^3}{1 + m + m^2}.$$

Общая сумма выплат на 65500 рублей больше суммы кредита, поэтому

$$\frac{3Sm^3}{1 + m + m^2} = S + 65500 \Longrightarrow S = 122000.$$

Ответ: 122000 рублей.

3. В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m.

Решение. Так как в регионе A доход ежегодно увеличивается на 25%, то в 2017 году он будет равен

$$43740 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)^3 = 43740 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3.$$

Пусть в регионе B в 2014 году суммарный доход равен S рублей, а количество населения равно k. Тогда по условию $\dfrac{S}{k} = 60000$. В 2017 году суммарный доход населения в регионе B будет равен

$$S \cdot \left(1 + \frac{17}{100}\right)^3,$$

а количество населения будет равно

$$k \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right)^3.$$

Таким образом, в 2017 году в регионе B среднемесячный доход на душу населения будет равен

$$\frac{S\cdot\left(1+\frac{17}{100}\right)^3}{k\cdot\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}=60000\cdot\frac{\left(1+\frac{17}{100}\right)^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}=60000\cdot\left(\frac{117}{100+m}\right)^3.$$

Имеем уравнение

$$43740\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3=60000\cdot\left(\frac{117}{100+m}\right)^3\iff\left(\frac{9}{8}\right)^3=\left(\frac{117}{100+m}\right)^3\Longrightarrow m=4.$$

Ответ: $m=4\%$.

4. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

Решение. По условию задачи $n=21$, конечная сумма $S_{\text{к}}=1604$ тыс., процентная ставка равна $p=3\%$. Пусть $m=1+\dfrac{p}{100}=\dfrac{103}{100}$. Обозначим платежи X_1, X_2, …, X_{20}, X_{21}. Согласно условию задачи имеем:

$$Sm-X_1=S-30\Longrightarrow X_1=S(m-1)+30(1-0\cdot m),$$

$$(S-30)m-X_2=S-60\Longrightarrow X_2=S(m-1)+30(2-m),$$

$$(S-60)m-X_3=S-90\Longrightarrow X_3=S(m-1)+30(3-2m),$$

$$(S-90)m-X_4=S-120\Longrightarrow X_4=S(m-1)+30(4-3m),$$

$$\dots$$

$$(S-570)m-X_{20}=S-600\Longrightarrow X_{20}=S(m-1)+30(20-19m),$$

$$(S-600)m-X_{21}=0\Longrightarrow X_{21}=(S-600)m.$$

Таким образом,

$$S_{\text{к}}=X_1+\dots X_{20}+X_{21}=20S(m-1)+30\left(\frac{1+20}{2}\cdot20-m\cdot\frac{0+19}{2}\cdot20\right)+(S-600)m=$$

$$=20S(m-1)+30(210-190m)+(S-600)m=\frac{163S-18900}{100}.$$

По условию $S_{\text{к}}=1604$ тыс., откуда находим $S=1100$ тыс.

Ответ: 1100 тыс.

5. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа 10-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;

– к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1388 тысяч рублей?

Решение. По условию задачи $n = 11$, конечная сумма $S_к = 1388$ тыс., процентная ставка $p = 1\%$. Пусть $m = 1 + \frac{p}{100} = \frac{101}{100}$ и долг уменьшается равномерно на k тысяч рублей первые 10 месяцев. Обозначим платежи X_1, X_2, $\ldots$, X_{10}, X_{11}. Согласно условию задачи имеем:

$$Sm - X_1 = S - k \Longrightarrow X_1 = S(m-1) + k(1 - 0 \cdot m),$$

$$(S-k)m - X_2 = S - 2k \Longrightarrow X_2 = S(m-1) + k(2 - m),$$

$$(S-2k)m - X_3 = S - 3k \Longrightarrow X_3 = S(m-1) + k(3 - 2m),$$

$$(S-3k)m - X_4 = S - 4k \Longrightarrow X_4 = S(m-1) + k(4 - 3m),$$

$$\ldots$$

$$(S-9k)m - X_{10} = S - 10k \Longrightarrow X_{10} = S(m-1) + k(10 - 9m),$$

$$(S-10k)m - X_{11} = 0 \Longrightarrow X_{11} = (S-10k)m.$$

По условию долг 15-го числа 11-го месяца равен 300 тысяч рублей, то есть $S - 10k = 300$. Значит, $k = \frac{S-300}{10}$ и $X_{11} = 300m = 303$ тыс. рублей.

Таким образом,

$$S_к = X_1 + \ldots X_{10} + X_{11} = 10S(m-1) + k\left(\frac{1+10}{2} \cdot 10 - m \cdot \frac{0+9}{2} \cdot 10\right) + 303 =$$

$$= 10S(m-1) + \frac{S-300}{10} \cdot (55 - 45m) = \frac{1055S + 16500}{1000}.$$

По условию $S_к = 1388$ тыс., откуда находим $S = 1300$ тыс.

Ответ: 1300 тыс.

6. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Решение. По условию задачи конечная сумма $S_к = 1000000 = 1000$ тыс., процентная ставка равна r. Пусть $m = 1 + \dfrac{r}{100}$. Обозначим платежи $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$. Согласно условию задачи имеем:

$$Sm - X_1 = S - 40 \Longrightarrow X_1 = S(m-1) + 40(1 - 0 \cdot m),$$

$$(S-40)m - X_2 = S - 80 \Longrightarrow X_2 = S(m-1) + 40(2 - m),$$

$$(S-80)m - X_3 = S - 120 \Longrightarrow X_3 = S(m-1) + 40(3 - 2m),$$

$$(S-120)m - X_4 = S - 160 \Longrightarrow X_4 = S(m-1) + 40(4 - 3m),$$

$$\ldots$$

$$(S-(n-1)\cdot 40)m - X_n = S - 40n \Longrightarrow X_n = S(m-1) + 40(n - (n-1)m),$$

$$(S-40n)m - X_{n+1} = 0 \Longrightarrow X_{n+1} = (S-40n)m.$$

По условию 15-го числа n-го месяца долг составил 200 тысяч рублей, значит,

$$S - 40n = 200 \Longrightarrow n = 20.$$

Таким образом,

$$S_к = X_1 + \ldots X_{20} + X_{21} = 20S(m-1) + 40\left(\frac{1+20}{2}\cdot 20 - m\cdot\frac{0+19}{2}\cdot 20\right) + 200m =$$

$$= 12600m - 11600 = 1378 \Longrightarrow m = \frac{12978}{12600}.$$

Значит,

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{12978}{12600} \Longrightarrow r = 3.$$

Ответ: $r = 3\%$.

7. 15 января планируется взять в банке кредит в 700 тыс. руб. на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– за $n+1$ месяц долг должен быть погашен полностью.

Найдите n, если банку всего было выплачено 755 тыс. руб., а долг на 15-е число n-го месяца составлял 300 тыс. руб.

Решение. По условию задачи конечная сумма $S_к = 700$ тыс., процентная ставка $p = 1$. Пусть $m = 1+\dfrac{p}{100} = \dfrac{101}{100}$. Обозначим платежи $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n,\ X_{n+1}$ соответственно. Согласно условию имеем:

$$Sm - X_1 = S - k \Longrightarrow X_1 = S(m-1) + k(1 - 0\cdot m),$$

$$(S-k)m - X_2 = S - 2k \Longrightarrow X_2 = S(m-1) + k(2 - m),$$

$$(S-2k)m - X_3 = S - 3k \Longrightarrow X_3 = S(m-1) + k(3 - 2m),$$

$$(S-3k)m - X_4 = S - 4k \Longrightarrow X_4 = S(m-1) + k(4 - 3m),$$

$$\ldots$$

$$(S-(n-1)\cdot k)m - X_n = S - n\cdot k \Longrightarrow X_n = S(m-1) + k(n - (n-1)m),$$

$$(S - n\cdot k)m - X_{n+1} = 0 \Longrightarrow X_{n+1} = (S - n\cdot k)m.$$

По условию $S - nk = 300$, откуда $x_{n+1} = 300m$ и $nk = 400$. Таким образом,

$$S_к = X_1 + \ldots + X_n + X_{n+1} = nS(m-1) + k\left(\frac{1+n}{2}\cdot n - m\cdot\frac{0+n-1}{2}\cdot n\right) + 300m =$$

$$= nS(m-1) + nk\left(\frac{n+1}{2} - m\cdot\frac{n-1}{2}\right) + 300m = 5n + 705.$$

По условию $S_к = 755$ тыс., откуда находим $n = 10$.

Ответ: $n = 10$.

8. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 15000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение. Из равенства $Q = 15000 - P$ находим $P = 15000 - Q$. Имеем:

$$PQ - 3000Q - 1000000 - tQ = (15000-Q)\cdot Q - 3000Q - 1000000 - tQ = -Q^2 - (12000+t)Q - 1000000.$$

Функция $f(Q) = -Q^2 - (12000 + t)Q - 1000000$ принимает свое наибольшее значение в вершине, то есть в точке

$$Q = -\frac{b}{2a} = \frac{12000+t}{-2} = 6000 - \frac{t}{2}.$$

Получаем

$$tQ = t\cdot\left(6000 - \frac{t}{2}\right) = -\frac{t^2}{2} + 6000t.$$

Функция $f(t) = -\dfrac{t^2}{2} + 6000t$ принимает свое наибольшее значение в вершине, то есть в точке

$$t = -\frac{b}{2a} = 6000.$$

Итак, общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной при $t = 6000$.

Ответ: $t = 6000$.

9. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Изначальная прибыль составляет

$$PQ - (3000Q + 5000000) = P(15000 - P) - 3000(15000 - P) - 5000000 =$$
$$= -P^2 + 18000P - 50000000.$$

После изменения цены прибыль будет равна

$$-(0.8P)^2 + 18000 \cdot (0.8P) - 50000000.$$

По условию, при снижении цены прибыль не изменилась, поэтому

$$-P^2 + 18000P - 50000000 = -(0.8P)^2 + 18000 \cdot (0.8P) - 50000000 \Longrightarrow P = 10000.$$

Пусть цену следует поднять на $r\%$, то есть в $m = 1 + \dfrac{r}{100}$ раз. Имеем:

$$-(0.8 \cdot P \cdot m)^2 + 18000(0.8 \cdot P \cdot m) - 50000000 = -64000000m^2 + 144000000m - 50000000.$$

Функция $f(m) = -64000000m^2 + 144000000m - 50000000$ принимает наибольшее значение в вершине, то есть в точке

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{144}{128} = \frac{9}{8}.$$

Итак,

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{9}{8} \Longrightarrow r = 12.5\%.$$

Ответ: 12.5%.

Задачи для самостоятельного решения

10. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какую сумму взяли в кредит, если известно, что кредит был выплачен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) и общая сумма выплат составила 375000 рублей.

Ответ: 221400 рублей.

11. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 тысячи рублей?

Ответ: 700 тысяч рублей.

12. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1го по 16-й месяц долг должен уменьшаться на 50 тыс. рублей;

– за 17 месяцев долг должен быть погашен полностью.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1102 тысячи рублей?

Ответ: 1000 тысяч рублей.

13. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа 16-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;

– к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1608 тысяч рублей?

Ответ: 1200 тысяч рублей.

14. 15 декабря планируется взят кредит в банке на 1200 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа n-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;

– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

Ответ: $r = 1\%$.

15. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа 20-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;

– к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1441 тысячу рублей.

Ответ:.

16. 15 января планируется взять в банке кредит в 600 тыс. руб. на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– за $n+1$ месяц долг должен быть погашен полностью.

Найдите n, если банку всего было выплачено 852 тыс. руб., а долг на 15-е число n-го месяца составлял 200 тыс. руб.

Ответ: $n = 20$.

17. 15 января планируется взять кредит в размере 900 тысяч рублей в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1-го по 10-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

– за 11 месяцев долг должен быть погашен полностью.

Найдите p, если банку всего было выплачено 1021 тысяч рублей.

Ответ: $p = 2\%$.

18. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1-го по 20-й месяц долг должен уменьшаться на 50 тыс.руб.;

– за 21 месяц долг должен быть полностью погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 20-го месяцва, если банку всего было выплачено 2073 тыс. рублей?

Ответ: 800 тысяч рублей.

19. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1-го по 20-й месяц долг должен уменьшаться на 40 тыс.руб.;

– за 21 месяц долг должен быть полностью погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 1820 тыс. рублей?

Ответ: 600 тысяч рублей.

20. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1-го по 20-й месяц долг должен уменьшаться на 40 тыс. руб.;

– за 21 месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 1852 тыс. рублей?

Ответ: 800 тыс.руб.

21. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Ответ: $t = 7000$.

Глава 2

Образцы заданий 2017 года

1. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t\,(t = 1;\, 2;\, \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение. Стоимость ценных бумаг после каждого года равна

$$1^2 \xrightarrow{\frac{4}{1}} 2^2 \xrightarrow{\frac{9}{4}} 3^2 \xrightarrow{\frac{16}{9}} 4^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 21^2 \xrightarrow{\frac{484}{441}} 22^2 \xrightarrow{\frac{529}{484}} 23^2 \xrightarrow{\frac{576}{529}} 24^2 \xrightarrow{\frac{625}{576}} 25^2.$$

За год t стоимость ценных бумаг увеличивается в цене в

$$\frac{t^2}{(t-1)^2} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^2 = 1 + \frac{2}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \quad \text{раз.}$$

Очевидно, увеличение стоимости бумаг замедляется с ростом года (сумма убывающих функций убывает). Продать ценные бумаги и положить их в банк имеет смысл, когда в банке прирост за год станет больше ежегодного прироста стоимости ценных бумаг.

Так как продавать ценные бумаги надо строго в конце двадцать первого года, то за двадцать первый год прирост стоимости ценных бумаг еще больше банковского прироста, а в двадцать втором году – уже меньше.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{21^2}{20^2} > 1 + r \\ \dfrac{22^2}{21^2} < 1 + r \end{cases} \iff \frac{484}{441} < 1 + r < \frac{441}{400} \iff \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

Комментарий.

Приведем решение, основанное на исследовании функции. Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года t, то в конце двадцать пятого года на его счету будет

$$f(t) = t^2(1+r)^{25-t} \quad \text{тысяч рублей.}$$

Рассмотрим разность

$$f(t+1) - f(t) = (t+1)^2(1+r)^{25-t-1} - t^2(1+r)^{25-t} = (1+r)^{24-t}(-rt^2+2t+1).$$

Так как $(1+r)^{24-t} > 0$, то знак разности $f(t+1) - f(t)$ зависит от знака квадратного трехчлена $-rt^2+2t+1$.

Обозначим функцию $g(t) = -rt^2+2t+1$, графиком которой является парабола с ветвями, направленными вниз. Так как $g(0) > 0$, то парабола имеет корни $t_1 < 0$, $t_2 > 0$. Получаем, что для любого $t > t_2$ имеет место неравенство $g(t) < 0$.

Так как ценные бумаги нужно продать в конце 21-го года, то необходимо потребовать выполнения двух неравенств $f(21) - f(20) > 0$, $f(22) - f(21) < 0$, то есть имеем систему:

$$\begin{cases} g(20) > 0 \\ g(21) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -400r + 41 > 0 \\ -441r + 43 < 0 \end{cases} \iff \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

2. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0.8S$	$0.4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение. Обозначим первый, второй и третий платеж X_1, X_2 и X_3 соответственно. Тогда согласно таблице имеем:

$$\begin{aligned} S \cdot 1.2 - X_1 = 0.8S &\Longrightarrow X_1 = 0.4S, \\ 0.8S \cdot 1.2 - X_2 = 0.4S &\Longrightarrow X_2 = 0.56S, \\ 0.4S \cdot 1.2 - X_3 = 0 &\Longrightarrow X_3 = 0.48S. \end{aligned}$$

Так как каждый платеж должен быть менее 5 млн рублей, то имеем систему:

$$\begin{cases} 0.4S < 5 \\ 0.56S < 5 \\ 0.48S < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} S < 12\frac{1}{2} \\ S < 8\frac{52}{56} \\ S < 10\frac{20}{48} \end{cases} \overset{S\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} S = 8.$$

Ответ: 8 млн рублей.

Комментарий.

Несложно понять, что если наибольший платеж меньше 5 млн рублей, то и все остальные платежи также меньше 5 млн рублей. Достаточно решить одно неравенство:

$$0.56S < 5 \overset{S\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} S = 8.$$

3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платеж} = \frac{S}{n} + p\% \text{ от долга},$$

где S – сумма кредита, n – количество выплат, p – процентная ставка.

Пусть X_1, X_2, $\ldots$, X_n – n платежей. Тогда:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{S}{n} + \frac{p\cdot S}{100}, && \text{Долг} = S - \frac{S}{n} = \frac{S(n-1)}{n},\\
&X_2 = \frac{S}{n} + \frac{p\cdot S(n-1)}{100n}, && \text{Долг} = \frac{S(n-2)}{n},\\
&X_3 = \frac{S}{n} + \frac{p\cdot S(n-2)}{100n}, && \text{Долг} = \frac{S(n-3)}{n},\\
&\ldots && \\
&X_n = \frac{S}{n} + \frac{p\cdot S}{100n}, && \text{Долг} = 0.
\end{aligned}$$

Суммарные выплаты по кредиту составляют

$$S_{\text{конеч}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \left(\frac{S}{n} + \frac{S}{n} + \ldots + \frac{S}{n}\right) + \left(\frac{p\cdot S}{100} + \frac{p\cdot S(n-1)}{100n} + \ldots + \frac{p\cdot S}{100n}\right) =$$

$$= S + \frac{p\cdot S}{100}\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = S + \frac{p\cdot S}{100}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)\cdot n = S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right).$$

Так как по условию задачи $S = 18$, $S_{\text{конеч}} = 27$, $p = 10$, то имеем уравнение

$$27 = 18\left(1 + \frac{n+1}{20}\right) \Longrightarrow n = 9.$$

Ответ: 9 лет.

Комментарий.

А. Выражение $1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ представляет собой сумму арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = -\frac{1}{n}$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Б. Общая формула для суммы всех выплат по кредиту S, n, p при дифференцированной схеме погашения

$$S_{\text{конеч}} = S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right).$$

4. Взяли кредит на сумму 177120 рублей в банке на четыре года под 25% годовых и выплатили четыремя равными платежами. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

Решение. Так как в задаче все четыре платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах. Пусть ежегодный платеж по кредиту равен X млн рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 25%, то есть в $1 + \frac{25}{100} = 1.25$ раз, и уменьшается на X млн рублей. Обозначим $S = 177120$, $m = 1.25$. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $S \cdot m - X$,
Долг после 2-й выплаты: $(Sm - X) \cdot m - X = Sm^2 - Xm - X$,
Долг после 3-й выплаты: $\big(Sm^2 - Xm - X\big) \cdot m - X = Sm^3 - Xm^2 - Xm - X$,
Долг после 4-й выплаты: $\big(Sm^3 - Xm^2 - Xm - X\big) \cdot m - X = Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X$.

Так как кредит был погашен за четыре года, то

$$Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Longrightarrow X = \frac{Sm^4}{1 + m + m^2 + m^3} = 75000.$$

Общая сумма выплат равна $4X = 300000$ рублей.

Ответ: 300000 рублей.

Комментарий.

Общая формула аннуитетного платежа для кредита S, n, p равна

$$X = \frac{Sm^n}{1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-1}},$$

где $m = 1 + \frac{p}{100}$. Общая же сумма выплат равна nX.

5. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за три года) и общая сумма выплат на 156060 рублей больше суммы взятого кредита.

Решение. Так как в задаче все три платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах. Пусть ежегодный платеж по кредиту равен X млн рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 30%, то есть в $1+\dfrac{30}{100}=1.3$ раз, и уменьшается на X млн рублей. Обозначим начальную сумму кредита S, $m=1.3$. Имеем:

$$\begin{array}{ll} \text{Долг после 1-й выплаты:} & S\cdot m - X, \\ \text{Долг после 2-й выплаты:} & (Sm-X)\cdot m - X = Sm^2 - Xm - X, \\ \text{Долг после 3-й выплаты:} & \big(Sm^2 - Xm - X\big)\cdot m - X = Sm^3 - Xm^2 - Xm - X. \end{array}$$

Так как кредит был погашен за три года, то

$$Sm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Longrightarrow X = \frac{Sm^3}{1+m+m^2} = \frac{2.197S}{3.99}.$$

По условию задачи общая сумма выплат $3X$ на 156060 рублей больше суммы взятого кредита, значит,

$$3X = S + 156060 \iff \frac{6.591S}{3.99} = S + 156060 \iff S = \frac{3.99\cdot 156060}{2.601} = 239400.$$

.

Ответ: 239400 рублей.

6. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200000 рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 130000 рублей, а во второй год – 150000 рублей.

Решение. Пусть $S=200000$, $m=1+\dfrac{r}{100}$, $X_1=130000$, $X_2=150000$. Тогда согласно условию задачи имеем:

$$\begin{array}{ll} \text{Долг после 1-ой выплаты:} & S\cdot m - X_1, \\ \text{Долг после 2-ой выплаты:} & (S\cdot m - X_1)\cdot m - X_2. \end{array}$$

По условию кредит погашен двумя платежами, значит,

$$(S\cdot m - X_1)\cdot m - X_2 = 0 \iff Sm^2 - X_1 m - X_2 = 0 \iff 20m^2 - 13m - 15 = 0$$
$$\overset{m>0}{\Longrightarrow} m = \frac{5}{4} \iff 1+\frac{r}{100} = \frac{5}{4} \iff r = 25\%.$$

Ответ: 25%.

7. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за четыре года равными платежами по 777600 рублей или за два года равными платежами по 1317600 рублей. Найдите r.

Решение. Обозначим сумму кредита S, $m = 1 + \dfrac{r}{100}$. По условию задачи долг на июль в каждом году меняется как

$$S,\ Sm - X,\ Sm^2 - Xm - X,\ Sm^3 - Xm^2 - Xm - X,\ Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X.$$

Если долг выплачен двумя равными платежами X_2, то

$$Sm^2 - X_2m - X_2 = 0 \iff X_2 = \frac{Sm^2}{1+m} = 106964.$$

Если долг выплачен четырьмя равными платежами X_4, то

$$Sm^4 - X_4m^3 - X_4m^2 - X_4m - X_4 = 0 \iff X_4 = \frac{Sm^4}{1+m+m^2+m^3} = 58564.$$

Поделив X_2 на X_4, получим:

$$\frac{X_2}{X_4} = \frac{Sm^2(1+m+m^2+m^3)}{Sm^4(1+m)} = \frac{(1+m)(1+m^2)}{(1+m)m^2} = \frac{106964}{58564} \Longrightarrow m = 1.1.$$

Итак, $1 + \dfrac{r}{100} = 1.1$, а значит, $r = 10\%$.

Ответ: 10%.

8. 15 января планируется взять кредит в банке на несколько месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит?

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платеж} = \frac{S}{n} + p\% \text{ от долга},$$

где S – сумма кредита, n – количество выплат, p – процентная ставка.

Пусть X_1, X_2, …, X_n – n платежей. Тогда

$$X_1 = \frac{S}{n} + \frac{p \cdot S}{100}, \qquad \text{Долг} = S - \frac{S}{n} = \frac{S(n-1)}{n},$$
$$X_2 = \frac{S}{n} + \frac{p \cdot S(n-1)}{100n}, \qquad \text{Долг} = \frac{S(n-2)}{n},$$
$$X_3 = \frac{S}{n} + \frac{p \cdot S(n-2)}{100n}, \qquad \text{Долг} = \frac{S(n-3)}{n},$$
$$\ldots$$
$$X_n = \frac{S}{n} + \frac{p \cdot S}{100n}, \qquad \text{Долг} = 0.$$

Суммарные выплаты по кредиту составляют

$$S_{\text{конеч}} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \left(\frac{S}{n} + \frac{S}{n} + \ldots + \frac{S}{n}\right) + \left(\frac{p \cdot S}{100} + \frac{p \cdot S(n-1)}{100n} + \ldots + \frac{p \cdot S}{100n}\right) =$$
$$= S + \frac{p \cdot S}{100}\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = S + \frac{p \cdot S}{100}\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2}\right) \cdot n = S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right).$$

Так как по условию задачи $S_{\text{конеч}} = 1.25S$, $p = 5$, то имеем уравнение

$$1.25S = S\left(1 + \frac{n+1}{40}\right) \Longrightarrow n = 9.$$

Ответ: 9 месяцев.

9. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3.6 млн рублей?

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платеж} = \frac{S}{n} + p\% \text{ от долга},$$

где S – сумма кредита, n – количество выплат, p – процентная ставка.

Наибольшим платежом является первый. Имеем:

$$\frac{9}{n} + \frac{20 \cdot 9}{100} = 3.6 \iff n = 5.$$

Таким образом, кредит был взят на пять лет. Согласно формуле для дифференцированных платежей, суммарные выплаты по кредиту составляют:

$$S_{\text{конеч}} = S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right) = 9\left(1 + \frac{20 \cdot 6}{200}\right) = 14.4.$$

Ответ: 14.4 млн рублей.

10. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей.

Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие трудятся суммарно x^2 часов, а на втором заводе – y^2 часов. Тогда на первом заводе производят x единиц товара, на втором – y единиц товара, а суммарно производят $x + y$ единиц товара.

Согласно условиям задачи, затраты на оплату труда рабочих составляют $500x^2 + 300y^2 = 1200000$. Имеем оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} x + y \to max \\ 5x^2 + 3y^2 = 12000 \end{cases}.$$

Выразим y через x из второго уравнения системы

$$y^2 = 4000 - \frac{5}{3}x^2 \overset{y\geqslant 0}{\iff} y = \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}.$$

Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}$ на отрезке $\left[0;\ 20\sqrt{6}\right]$. Для этого найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{5x}{3\sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}}.$$

Решим уравнение

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{5x}{3\sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}} = 0 \overset{x\geqslant 0}{\iff} x^2 = 900 \overset{x\geqslant 0}{\iff} x = 30.$$

Так как $f'(x) < 0$ при $0 < x < 30$ и $f'(x) > 0$ при $x > 30$, то $x = 30$ – единственная точка максимума, принадлежащая отрезку $\left[0;\ 20\sqrt{6}\right]$. Значит, $f_{max}(x) = f(30) = 80$.

Итак, наибольшее количество единиц товара равно 80, при этом на первом заводе производят 30 единиц товара, а на втором – 50.

Ответ: 80 единиц товара.

Комментарий.

А. Отрезок $\left[0;\,20\sqrt{6}\right]$ получен из условий $x \geqslant 0$ и $4000 - \dfrac{5}{3}x^2 \geqslant 0$.

Б. При нахождении наибольшего значения функции использовалась теорема о единственном экстремуме функции на отрезке. Ее применение удобно, так как не требуется вычислять значение функции на концах отрезка.

Теорема: *если непрерывная на отрезке функция имеет единственную точку экстремума на нем, то в этой точке будет достигаться наибольшее (точка максимума) или наименьшее значение (точка минимума).*

В. Задачу можно решить и не применяя производную. Требуется найти наибольшее значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} x + y = a \\ 5x^2 + 3y^2 = 12000 \end{cases}$$

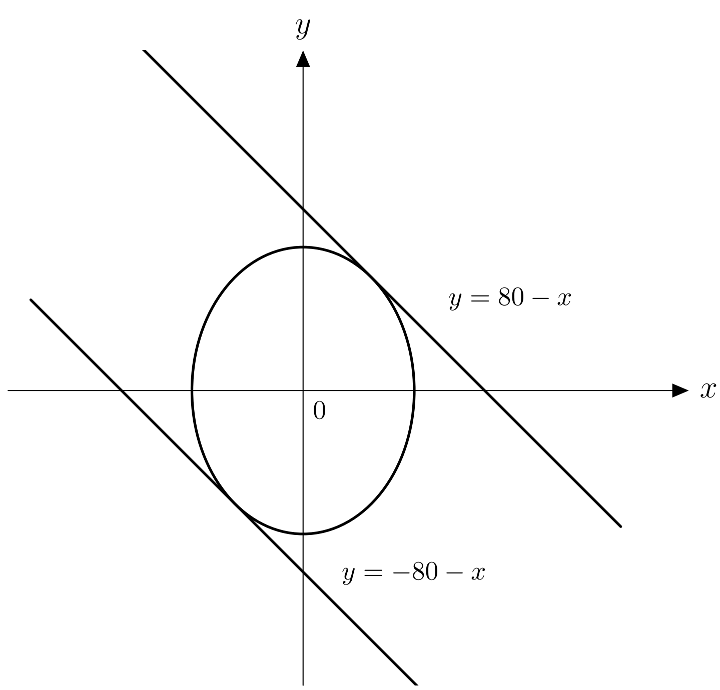
имеет неотрицательное решение. Имеем:

$$\begin{cases} y = a - x \\ 5x^2 + 3(a-x)^2 = 12000 \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - x \\ 8x^2 - 6ax + 3a^2 - 12000 = 0 \end{cases}$$

Последняя система имеет решение, когда уравнение $8x^2 - 6ax + 3a^2 - 12000 = 0$ имеет решение, то есть $D = 36a^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3a^2 - 12000) \geqslant 0 \iff a \in [-80;\, 80]$.

Итак, наибольшее значение параметра a, при котором система имеет решение, равно 80, при этом $x = 30$, $y = 50$.

Г. Уравнение $5x^2 + 3y^2 = 12000$ задает эллипс. Уравнение $y = a - x$ задает семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом, равным -1.



Задачи для самостоятельного решения

11. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t\,(t = 1;\ 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответ: $\dfrac{19}{81} < r < \dfrac{17}{64}$.

12. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за три года) и общая сумма выплат на 78030 рублей больше суммы взятого кредита.

Ответ: 119700 рублей.

13. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за три года) и общая сумма выплат на 77200 рублей больше суммы взятого кредита.

Ответ: 182000 рублей.

14. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 250000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 150000 рублей, а во второй год – 180000 рублей.

Ответ: 20%.

15. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 330000 рублей, а во второй год – 121000 рублей.

Ответ: 10%.

16. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторое количество месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 19%.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 5%.

18. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 75000 руб, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 123000 руб, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

Ответ: 25%.

19. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 77760 руб, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 131760 руб, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

Ответ: 20%.

20. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

– 1-го числа k-го месяца долг возрастёт на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число k-го месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа k-го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 39 месяцев.

21. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 1.5 млн рублей?

Ответ: 16.2 млн рублей.

22. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года?

Ответ: 169400 рублей.

23. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7.5 млн рублей?

Ответ: 4 года.

24. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

– 1-го числа k-го месяца долг возрастёт на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число k-го месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа k-го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 19 месяцев.

25. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58564 рублей, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 106964 рублей, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

Ответ: 10%.

26. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей.

Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 100 единиц товара.

Глава 3

Образцы заданий 2016 года

1. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

Решение. Пусть первоначальный вклад равен X млн рублей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 10%, то есть в $m = 1 + \dfrac{1}{10} = 1.1$ раз. Согласно условию задачи имеем:

Размер вклада в конце 1-го года:	Xm
Размер вклада в конце 2-го года:	Xm^2
Размер вклада в конце 3-го года:	$(Xm^2+1)m = Xm^3 + m$
Размер вклада в конце 4-го года:	$(Xm^3+m+1)m = Xm^4 + Xm + m.$

Так как вклад должен быть больше 10 млн рублей, то имеем:

$$Xm^4 + Xm + m > 10 \Longrightarrow X > \frac{10-m}{m^4+m} = \frac{10-1.1}{1.1^4+1.1} = 3\frac{12077}{25641}.$$

Так как $X \in \mathbb{Z}$, то $X = 4$ млн рублей.

Ответ: 4 млн рублей.

2. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

Решение. Пусть первоначальный вклад равен X млн рублей, $p = 10\%$. Согласно условию задачи имеем:

$$\begin{aligned}
&\text{Размер вклада в конце 1-го года:} && X + 0.1X = 1.1X,\\
&\text{Размер вклада в конце 2-го года:} && 1.1X + 0.11X = 1.21X,\\
&\text{Размер вклада в конце 3-го года:} && (1.21X + 3) + 0.1(1.21X + 3) = 1.331X + 3.3,\\
&\text{Размер вклада в конце 4-го года:} && (1.331X + 6.3) + 0.1(1.331X + 6.3) = 1.4641X + 6.93.
\end{aligned}$$

Сумма начисленных банком процентов составляет

$$0.1X + 0.11X + 0.1(1.21X + 3) + 0.1(1.331X + 6.3) = 0.1(4.641X + 9.3)$$

и должна быть больше 5 млн рублей, то есть:

$$0.1(4.641X + 9.3) > 5 \iff x > 8\frac{3572}{4641}.$$

Так как $X \in \mathbb{Z}$, то $X = 9$ млн рублей.

Ответ: 9 млн рублей.

3. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4.2 млн рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4.2 млн рублей;
– суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общая сумма выплат составила 6.1 млн рублей.

Решение. Обозначим X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 $(X_4 = X_5)$ пять платежей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на $r\%$, то есть в $m = 1 + \dfrac{r}{100}$ раз.

Согласно условию задачи имеем:

$$\begin{aligned}
&2017 \text{ год: } 4.2m - X_1 = 4.2 \Longrightarrow X_1 = 4.2(m-1),\\
&2018 \text{ год: } 4.2m - X_2 = 4.2 \Longrightarrow X_2 = 4.2(m-1),\\
&2019 \text{ год: } 4.2m - X_3 = 4.2 \Longrightarrow X_3 = 4.2(m-1),\\
&2020 \text{ год: } 4.2m - X_4\\
&2021 \text{ год: } (4.2m - X_4)m - X_5.
\end{aligned}$$

Так как кредит был полностью выплачен за пять лет и $X_4 = X_5$, то $(4.2m - X_4)m - X_4 = 0$, откуда

$$X_4 = X_5 = \frac{4.2m^2}{m+1}.$$

Итоговые выплаты по кредиту составляют

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3X_1 + 2X_4 = 3 \cdot 4.2(m-1) + 2 \cdot \frac{4.2m^2}{m+1} = 6.3 \iff$$
$$\iff 21m^2 - 6.1m - 18.7 = 0 \Longrightarrow m = 1.1.$$

Итак, $m = 1 + \dfrac{r}{100} = 1.1$, а значит, $r = 10\%$.

Ответ: 10%.

4. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
– к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.
Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Решение. Обозначим X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 пять платежей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 20%, то есть в $m = 1 + \dfrac{20}{100} = 1.2$ раз. Согласно условию задачи имеем:

$$\begin{aligned}
&\text{2017 год: } 1.2S - X_1 = S \Longrightarrow X_1 = 0.2S,\\
&\text{2018 год: } 1.2S - X_2 = S \Longrightarrow X_2 = 0.2S,\\
&\text{2019 год: } 1.2S - X_3 = S \Longrightarrow X_3 = 0.2S,\\
&\text{2020 год: } 1.2S - 360\,(X_4 = 360),\\
&\text{2021 год: } 1.2(1.2S - 360) - 360\,(X_5 = 360).
\end{aligned}$$

Так как кредит был полностью выплачен за пять лет, то

$$1.2(1.2S - 360) - 360 = 0 \Longrightarrow S = 550.$$

Итоговые выплаты по кредиту составляют

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3 \cdot 0.2S + 2 \cdot 360 = 1050\,\text{тысяч рублей}.$$

Ответ: 1050000 рублей.

5. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1.2 млн рублей.

Решение. Обозначим X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 шесть платежей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на $r\%$, то есть в $m = 1 + \frac{r}{100}$ раз.

Согласно условию задачи имеем:

$$
\begin{aligned}
&15.02\colon\ 1 \cdot m - X_1 = 0.6 \Longrightarrow X_1 = m - 0.6,\\
&15.03\colon\ 0.6 \cdot m - X_2 = 0.4 \Longrightarrow X_2 = 0.6m - 0.4,\\
&15.04\colon\ 0.4 \cdot m - X_3 = 0.3 \Longrightarrow X_3 = 0.4m - 0.3,\\
&15.05\colon\ 0.3 \cdot m - X_4 = 0.2 \Longrightarrow X_4 = 0.3m - 0.2,\\
&15.06\colon\ 0.2 \cdot m - X_5 = 0.1 \Longrightarrow X_5 = 0.2m - 0.1,\\
&15.07\colon\ 0.1 \cdot m - X_6 = 0 \Longrightarrow X_6 = 0.1m.
\end{aligned}
$$

Итоговые выплаты по кредиту составляют

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 2.6m - 1.6$$

и должны быть менее 1.2 млн рублей, значит, $2.6m - 1.6 < 1.2$, откуда $m < \frac{14}{13}$.

Итак,

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13} \Longrightarrow r < 7\frac{9}{13}.$$

Так как $r \in \mathbb{Z}$, то максимальное значение, удовлетворяющее условию задачи, $r = 7$.

Ответ: 7%.

6. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на четыре года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн рублей)	S	$0.7S$	$0.4S$	$0.2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение. Обозначим X_1, X_2, X_3, X_4 четыре платежа. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 20%, то есть в $m = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$ раз. Согласно условию задачи имеем:

$$
\begin{aligned}
&2017\colon\ S \cdot 1.2 - X_1 = 0.7S \Longrightarrow X_1 = 0.5S,\\
&2018\colon\ 0.7S \cdot 1.2 - X_2 = 0.4S \Longrightarrow X_2 = 0.44S,\\
&2019\colon\ 0.4S \cdot 1.2 - X_3 = 0.2S \Longrightarrow X_3 = 0.28S,\\
&2020\colon\ 0.2S \cdot 1.2 - X_4 = 0 \Longrightarrow X_4 = 0.24S.
\end{aligned}
$$

По условию задачи, каждая выплата должна быть больше 5 млн рублей. Имеем систему:

$$\begin{cases} X_1 > 5 \\ X_2 > 5 \\ X_3 > 5 \\ X_4 > 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 0.5S > 5 \\ 0.44S > 5 \\ 0.28S > 5 \\ 0.24S > 5 \end{cases} \iff S > 20\frac{5}{6}.$$

Так как $S \in \mathbb{Z}$, то минимальное значение, удовлетворяющее условию задачи, $S = 20$ млн рублей.

Ответ: 20 млн рублей.

7. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – **натуральное** число, на три года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 17.5% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс рублей)	S	$0.9S$	$0.4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять **целое** число тысяч рублей.

Решение. Обозначим платежи как X_1, X_2, X_3. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 17.5%, то есть в $m = 1 + \dfrac{17.5}{100} = 1.175$ раз. Согласно условию задачи имеем:

$$\text{Июль 2017: } S \cdot 1.175 - X_1 = 0.9S \Longrightarrow X_1 = 0.275S = \frac{11}{40}S,$$

$$\text{Июль 2018: } 0.9S \cdot 1.175 - X_2 = 0.4S \Longrightarrow X_2 = 0.6575S = \frac{263}{400}S,$$

$$\text{Июль 2019: } 0.4S \cdot 1.175 - X_3 = 0 \Longrightarrow X_3 = 0.47S = \frac{47}{100}S.$$

Наименьшее натуральное значение S, при котором каждый платеж будет составлять целое число тысяч рублей, равен $S = 400$.

Ответ: 400 тысяч рублей.

Задачи для самостоятельного решения

8. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Ответ: 12 млн рублей.

9. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

10. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

11. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – **целое** число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Ответ: 8 млн рублей.

12. Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – **целое** число. Найдите наибольшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 17 млн рублей.

Ответ: 24 млн рублей.

13. Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей.

Ответ: 3 млн рублей.

14. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6.6 млн рублей. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6.6 млн рублей;
– суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12.6 млн рублей.

Ответ: 20%.

15. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;
– к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ: 1925 тыс. рублей.

16. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1.25 млн рублей.

Ответ: 6%.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1.25 млн рублей.

Ответ: 9%.

18. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на четыре года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн рублей)	S	$0.8S$	$0.5S$	$0.1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей.

Ответ: 36 млн рублей.

19. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0.7S$	$0.4S$	0

Найдите наименьшее значение S, чтобы общая сумма выплат была больше 10 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

20. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0.7S$	$0.4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Ответ: 13 млн рублей.

21. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – **натуральное** число, на три года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в тыс рублей)	S	$0.7S$	$0.4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять **целое** число тысяч рублей.

Ответ: 200 тыс. рублей.

22. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0.7S$	$0.4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Ответ: 11 млн рублей.

Глава 4

Образцы заданий 2015 года

1. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 500 единиц товара.

2. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5800000 рублей.

3. Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочим 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей. Антон готов выделять 900000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 90 единиц товара.

4. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 24.5 млн рублей?

Ответ: 5 лет.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Ответ: 8 лет.

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей?

Ответ: 11 лет.

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 1.8 млн рублей?

Ответ: 10 лет.

8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на пятнадцать лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти x, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1.9 млн рублей, а наименьший – не менее 0.5 млн рублей.

Ответ: 25.

9. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 2%.

10. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1%.

11. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Ответ: 13 млн. рублей.

12. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ: 3110400 рублей.

13. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2.16 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответ: 4.55 млн. рублей.

14. В июле планируется взять кредит на сумму 4026000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года), по сравнению со случаем, когда кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ: 950400.

15. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55000 рублей, а во второй – 69000 рублей.

Ответ: 15%.

16. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Ответ: 5 лет.

17. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0.5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0.5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за три года?

Ответ: 10%.