Мнемоническое правило

Соционика – это информационная психология

Один из ее главных принципов – **дополнение до целого** (дополнение противоположностью)

Решающая формула

В алгебре логики есть формула дополнения до целого:

$$A \vee \neg A = 1$$

В некоторых задачах мы будем использовать вместо этой формулы умножение противоположностей:

$$A \wedge \neg A = 0$$

Типы задания 18

1. Задания на отрезки
2. Задания на множества
3. Задания на поразрядную конъюнкцию
4. Задания на условие делимости

Задания на отрезки

(**№ 376**) На числовой прямой даны два отрезка: P=[4,15] и Q=[12,20]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$

тождественно истинна, то есть принимает **значение 1** при любом значении переменной x.

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решающая формула

Для выбора решающей формулы важно внимательно прочитать требование задачи.

В нашей задаче в требовании сказано:

принимает **значение** 1 при любом значении переменной x.

Выбор решающей формулы очевиден:

$$A \vee \neg A = 1$$

Решение задачи на отрезки

Разделим решение задачи на этапы:

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на отрезки

1) *Легенда* – это удобные нам условные обозначения, которые мы будем использовать при решении.

Введем следующие обозначения:

P = x ∈ P

Q = x ∈ Q

A = x ∈ A

Решение задачи на отрезки

2) Формализация условия – – перепишем формулу из условия задачи в соответствие с легендой.

Было:

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A) = 1$$

Стало:

$$(P \wedge Q) \rightarrow A = 1$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения – вначале это, возможно, самый сложный этап в решении задачи. Но позже, при накоплении опыта, он уже не будет казаться таким уж сложным ☺️

Рассмотрим решение логического уравнения по шагам.

Решение задачи на отрезки

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях по формуле: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$:

$$(P \wedge Q) \rightarrow A = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\neg(P \wedge Q) \vee A = 1$$

Решение задачи на отрезки

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле: $\mathbf{A \lor \neg A = 1}$ (в алгебре логики справедлив закон коммутативности, т.е. $\mathbf{A \lor \neg A = \neg A \lor A}$) :

$$\neg(P \land Q) \lor A = 1,$$ **отсюда**

$$\neg A = \neg(P \land Q)$$

Ответом в логическом уравнении будет:

$$A = P \land Q.$$

Решение задачи на отрезки

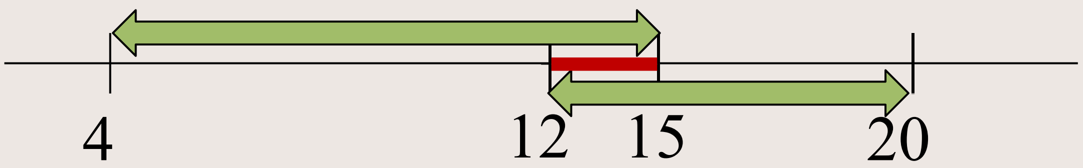
4) Интерпретация полученного результата.

Наш ответ: **A = P ∧ Q**.

В алгебре логики это выражение означает пересечение объемов двух логических объектов. По условию нашей задачи – это пересечение отрезков **P** и **Q**.

Решение задачи на отрезки

Пересечение отрезков **P** и **Q** можно визуализировать: P=[4,15] и Q=[12,20].



По условию нашей задачи, нам нужна **минимальная длина отрезка А**.
Находим ее: **15 – 12 = 3**.
Ответ: **3**.

Ответ на сайте Полякова К.Ю.: 3

Задания на отрезки

(№ 360) На числовой прямой даны три отрезка: P=[10,25], Q=[15,30] и R=[25,40]. Какова максимальная длина отрезка A, при котором формула

$((x \in Q) \to (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$

тождественно ложна, то есть принимает **значение 0** при любом значении переменной x?

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решающая формула

Для выбора решающей формулы важно внимательно прочитать требование задачи. В нашей задаче в требовании сказано: принимает **значение 0** при любом значении переменной х.

Выбор решающей формулы очевиден:

$$\mathbf{A \wedge \neg A = 0}$$

Решение задачи на отрезки

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на отрезки

1) Легенда

$$\mathbf{R = x \in R}$$

$$\mathbf{Q = x \in Q}$$

$$\mathbf{A = x \in A}$$

$$\mathbf{P = x \in P}$$

Решение задачи на отрезки

2) Формализация условия

Было:

$$((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P) = 0$$

Стало:

$$(Q \rightarrow \neg R) \wedge A \wedge \neg P = 0$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$(Q \rightarrow \neg R) \wedge A \wedge \neg P = 0$$

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях по формуле: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$, и переставим множители согласно закону коммутативности умножения:

$$A \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P = 0$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$\mathbf{A \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P = 0}$$

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле: $\mathbf{A \wedge \neg A = 0}$ и найдем, чему равно $\mathbf{\neg A}$:

$$\mathbf{\neg A = (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P}$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$\neg A = (\neg Q \vee \neg R) \wedge \neg P$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$ по закону де Моргана $\neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B)$:

$$\neg A = \neg (Q \wedge R) \wedge \neg P,$$

и по другому закону де Моргана

$\neg A \wedge \neg B = \neg(A \vee B)$:

$$\neg A = \neg (Q \wedge R \vee P)$$

Решение задачи на отрезки

3) Решение логического уравнения

$$\neg A = \neg (Q \wedge R \vee P)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = Q \wedge R \vee P$$

Решение задачи на отрезки

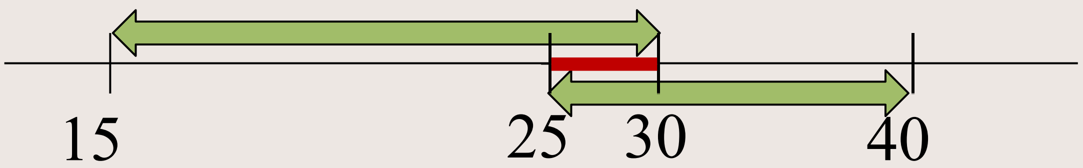
4) Интерпретация полученного результата

$$\mathbf{A = Q \wedge R \vee P}$$

Отрезок **A** – это пересечение отрезков **Q** и **R** и его объединение с отрезком **P**.

Решение задачи на отрезки

Пересечение отрезков **R** и **Q** можно визуализировать: Q=[15,30] и R=[25,40].



Отрезок P=[10,25] нанесем на наш чертеж и объединим с пересечением:

Решение задачи на отрезки

$$A = Q \wedge R \vee P$$

По условию нашей задачи, нам нужна **максимальная длина отрезка А**. Находим ее: **30 – 10 = 20**.

Ответ: **20**.

Ответ на сайте Полякова К.Ю.: 20

2. Задания на множества

(№ 386) Элементами множеств А, P, Q являются натуральные числа, причём **P={1,2,3,4,5,6}, Q={3,5,15}.** Известно, что выражение

$(x \notin A) \rightarrow ((x \notin P) \wedge (x \in Q)) \vee (x \notin Q)$

истинно (т.е. принимает **значение 1** при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное количество элементов в множестве А.

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на множества

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на множества

1) Легенда

$$\mathbf{A = x \in A}$$

$$\mathbf{P = x \in P}$$

$$\mathbf{Q = x \in Q}$$

Решение задачи на множества

2) Формализация условия

Было:

$(x \notin A) \rightarrow ((x \notin P) \wedge (x \in Q)) \vee (x \notin Q) = 1$

Стало:

$$\neg A \rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q = 1$$

Решение задачи на множества

3) Решение логического уравнения

$$\neg A \rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q = 1$$

3.1. Представим логическое следование в базовых логических операциях и сгруппируем:

$$A \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) = 1$$

Решение задачи на множества

$$A \lor ((\neg P \land Q) \lor \neg Q) = 1$$

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле:

$$A \lor \neg A = 1$$

и найдем, чему равно $\neg A$:

$$\neg A = (\neg P \land Q) \lor \neg Q$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$, раскрыв скобки по закону дистрибутивности сложения:

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$Q \vee \neg Q = 1$$

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = (\neg P \vee \neg Q)$$

По закону де Моргана:

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = P \wedge Q$$

Решение задачи на множества

$$A = P \wedge Q$$

4) Интерпретация полученного результата

Искомое множество **A** представляет собой пересечение множеств **P** и **Q.**

Решение задачи на множества

Искомое множество **A** есть пересечение множеств

P = {1, 2, **3**, 4, **5**, 6} и **Q** ={**3**, **5**,15},

таким образом **A** ={**3**, **5**}

и содержит только 2 элемента.

Ответ: **2**

Ответ на сайте Полякова: 2

2. Задания на множества

(№ 368) Элементами множеств A, P, Q являются натуральные числа, причём P={2,4,6,8,10,12} и Q={4,8,12,116}. Известно, что выражение

$$\mathbf{(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \to (x \notin P))}$$

истинно (т. е. принимает **значение 1**) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение **суммы элементов множества A.**

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на множества

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на множества

1) Легенда

$$\mathbf{A = x \in A}$$

$$\mathbf{P = x \in P}$$

$$\mathbf{Q = x \in Q}$$

Решение задачи на множества

2) Формализация условия

Было:

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge (x \notin A)) \to (x \notin P)) = 1$$

Стало:

$$P \to ((Q \wedge \neg A) \to \neg P) = 1$$

Решение задачи на множества

3) Решение логического уравнения

$$P \to ((Q \land \neg A) \to \neg P) = 1$$

3.1. Представим первое логическое следование (в скобках) в базовых логических операциях :

$$P \to (\neg(Q \land \neg A) \lor \neg P) = 1$$

Решение задачи на множества

$$P \to (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) = 1$$

Представим второе логическое следование в базовых логических операциях, применим закон де Моргана и перегруппируем:

$$\neg P \vee (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) = 1$$

$$\neg P \vee \neg Q \vee A \vee \neg P = 1$$

Решение задачи на множества

$$A \lor (\neg P \lor \neg Q \lor \neg P) = 1$$

3.2. Сведем получившееся выражение к решающей формуле:

$$A \lor \neg A = 1$$

и найдем, чему равно $\neg A$:

$$\neg A = (\neg P \lor \neg Q \lor \neg P)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = \neg P \vee \neg Q \vee \neg P$$

3.3. Упростим выражение для $\neg A$ по формуле $A \vee A = A$:

$$\neg A = \neg P \vee \neg Q$$

Далее, по закону де Моргана получаем:

$$\neg A = \neg (P \wedge Q)$$

Решение задачи на множества

$$\neg A = \neg(P \wedge Q)$$

3.4. Очевидно, что

$$A = P \wedge Q$$

4) Интерпретация полученного результата

Искомое множество **A** представляет собой пересечение множеств **P** и **Q.**

Решение задачи на множества

Искомое множество **A** есть пересечение множеств

P = {2, **4**, 6, **8**, 10, **12**} и

Q ={**4**, **8**, **12**, 16}, таким образом

A ={**4**, **8**, **12**}

и содержит только 3 элемента, сумма которых 4+8+12=24 .

Ответ: **24** *Ответ на сайте Полякова: 24*

3. Задания на поразрядную конъюнкцию

(№ 379) Обозначим через *m&n* поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел *m* и *n*. Так, например,
$14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа *A* формула
(x & 29 ≠ 0) → ((x & 12 = 0) → (x & A ≠ 0))
тождественно истинна (т.е. принимает **значение 1** при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) Интерпретация полученного результата

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1. Легенда

Легенда для задач на поразрядную конъюнкцию отличается от всех остальных случаев:

$$B = (x \,\&\, 29 \neq 0)$$

$$C = (x \,\&\, 12 \neq 0)$$

$$A = (x \,\&\, A \neq 0)$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

Мы принимаем за истинное высказывание поразрядную конъюнкцию, отличную от нуля, иначе поразрядная конъюнкция теряет свой логический смысл, т.к. всегда можно представить X всеми нулями.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

2) Формализация условия

Было:

$(x \ \& \ 29 \neq 0) \rightarrow ((x \ \& \ 12 = 0) \rightarrow (x \ \& \ A \neq 0)) = 1$

Стало:

$$\mathbf{B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) = 1}$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

3) Решение логического уравнения

$$B \to (\neg C \to A) = 1$$

$$B \to (C \vee A) = 1$$

$$(\neg B \vee C) \vee A = 1$$

$$\neg A = \neg B \vee C$$

$$\neg A = \neg(B \wedge \neg C)$$

Очевидно, что

$$A = B \wedge \neg C$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

4) Интерпретация полученного результата

Искомое двоичное значение поразрядной конъюнкции **A** – это двоичное значение поразрядной конъюнкции значения **B** и инверсии двоичного значения **C**.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$B = (x \,\&\, 29 \neq 0)$

B или $29 = 11101_2$

$C = (x \,\&\, 12 \neq 0)$

$12 = 1100_2$

$\neg C$ или инверсия $12 = 0011_2$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

В или 29 = **11101_2**

¬С или инверсия 12 = **0011_2**

А = В ∧¬ С

$$
\begin{array}{r}
{}_{x}11101_2 \\
\underline{\ \ 0011}_2 \\
10001_2
\end{array}
$$

Ответ на сайте Полякова: 17

А = 10001_2 = 17

3. Задания на поразрядную конъюнкцию

(№ 375) Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$(X \,\&\, 49 \neq 0) \rightarrow ((X \,\&\, 33 = 0) \rightarrow (X \,\&\, A \neq 0))$

тождественно истинно (то есть принимает **значение 1** при любом натуральном значении переменной X)?

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1) **Легенда**
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) **Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

1) Легенда

Легенда для задач на поразрядную конъюнкцию отличается от всех остальных случаев:

$$B = (x \mathbin{\&} 49 \neq 0)$$

$$C = (x \mathbin{\&} 33 \neq 0)$$

$$A = (x \mathbin{\&} A \neq 0)$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

2) Формализация условия

Было:

(X & 49 ≠ 0) → ((X & 33 = 0) → (X & A ≠ 0))=1

Стало:

$$\mathbf{B \to (\neg C \to A) = 1}$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

3) Решение логического уравнения

$$B \to (\neg C \to A) = 1$$

$$B \to (C \vee A) = 1$$

$$(\neg B \vee C) \vee A = 1$$

$$\neg A = (\neg B \vee C)$$

Очевидно:

$$A = B \wedge \neg C$$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

4) Интерпретация полученного результата

Искомое двоичное значение поразрядной конъюнкции **А** – это двоичное значение поразрядной конъюнкции значения **В** и инверсии двоичного значения **С**.

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

$B = (x \,\&\, 49 \neq 0)$

B или $49 = 110001_2$

$C = (x \,\&\, 33 \neq 0)$

$33 = 100001_2$

$\neg C$ или инверсия $33 = 011110_2$

Решение задачи на поразрядную конъюнкцию

B или 49 = **110001_2**

¬C или инверсия 33 = **011110_2**

A = B ∧¬ C

$$
\begin{array}{r}
{}_{x}110001_2 \\
\underline{011110}_2 \\
010000_2
\end{array}
$$

$A = 10000_2 = 16$

Ответ на сайте Полякова: 16

4. Задания на условие делимости

(№ 372) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$\neg$ДЕЛ(x,A) $\rightarrow$ ($\neg$ДЕЛ(x,21) $\wedge$ $\neg$ДЕЛ(x,35))

тождественно истинна (то есть принимает **значение 1** при любом натуральном значении переменной x)?

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на условие делимости

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) **Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на условие делимости

1) Легенда

Легенда простая:

A = ДЕЛ(x,A)

21 = ДЕЛ(x,21)

35 = ДЕЛ(x,35)

Решение задачи на условие делимости

2) Формализация условия

Было:

¬ДЕЛ(x,A) → (¬ДЕЛ(x,21) ∧ ¬ДЕЛ(x,35))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1)

Стало:

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35) = 1$$

Решение задачи
на условие делимости

3) Решение логического уравнения

$$\neg A \rightarrow (\neg 21 \wedge \neg 35) = 1$$

$$A \vee (\neg 21 \wedge \neg 35) = 1$$

$$\neg A = \neg 21 \wedge \neg 35$$

Очевидно, что

$$A = 21 \vee 35$$

Решение задачи на условие делимости

4) Интерпретация полученного результата

A = 21 ∨ 35

В данной задаче это самый сложный этап решения. Нужно понять, что же представляет из себя число А – НОК или НОД или …

Решение задачи на условие делимости

4) Интерпретация полученного результата

$$A = 21 \vee 35$$

Итак, наше число А таково, что X делится на него без остатка, тогда и только тогда, когда X делится без остатка на 21 или на 35. В этом случае ищем

А = НОД (21, 35) = 7

Ответ на сайте Полякова: 7

4. Задания на условие делимости

(№ 370) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа А формула

¬ДЕЛ(x,A) → ((ДЕЛ(x,6) → ¬ДЕЛ(x,4))

тождественно истинна (то есть принимает **значение 1** при любом натуральном значении переменной x)?

Источник - сайт Полякова К.Ю.

Решение задачи на условие делимости

1) Легенда
2) Формализация условия
3) Решение логического уравнения
4) **Интерпретация полученного результата**

Решение задачи на условие делимости

1) Легенда

А = ДЕЛ(x,А)

6 = ДЕЛ(x,6)

4 = ДЕЛ(x,4)

Решение задачи на условие делимости

2) Формализация условия

Было:

¬ДЕЛ(x,А) → ((ДЕЛ(x,6) → ¬ДЕЛ(x,4)) тождественно истинна (то есть принимает **значение 1**

Стало:

¬A → (6 → ¬4) = 1

Решение задачи на условие делимости

3) Решение логического уравнения

$$\neg A \to (6 \to \neg 4) = 1$$

$$\neg A \to (\neg 6 \lor \neg 4) = 1$$

$$A \lor (\neg 6 \lor \neg 4) = 1$$

$$\neg A = \neg 6 \lor \neg 4$$

Очевидно:

$$A = 6 \land 4$$

Решение задачи на условие делимости

4) Интерпретация полученного результата

$A = 6 \wedge 4$

Итак, A таково, что X делится на него без остатка тогда и только тогда, когда X делится без остатка и на 6, и на 4. Т.е. **A = НОК(6, 4) = 12**

Ответ на сайте Полякова: 12