Министерство обороны от министерства образования; Лондонское королевское общество анонимных алкоголиков; Федеральная служба доставки пиццы; научно-исследовательский институт исследования научно-исследовательских институтов в городе Рекурске; ФГБАУ ВПО МФЪТИ и другие прописные буквы русского алфавита

представляют:

Широкомасштабная подготовочка к участию в математических олимпиадах

Я постоянно буду ссылаться на книгу [1]

Прошу прощения за орфографические, стилистические, грамматические, речевые, математические, логические ошибки.

Российская Федерация, г.Черкесск, 2015.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛИННОЕ ВВЕДЕНИЕ

Здравствуйте, дорогие случайные читатели! Перед прочтением этой книги я рекомендую категорически прочитать книгу [1].

Вы читаете вторую мою книжку, служащую для подготовки именно к математическим олимпиадам. Я постараюсь объяснить, зачем нужно в них участвовать.

Возможно я сейчас пойду по самому страшному и необъективному пути – приведу вам примеры реальных самых легких задач, предлагавшихся в разные годы на Объединенной межвузовской математической олимпиаде. Сделаю это для того, чтобы привлечь ваш интерес, показать, что на математических олимпиадах далеко не всегда преобладают страшные, не решаемые задачи.

Задача 2, 2009 год. Докажите, что $6255^3–5995^3$ делится на 13. *Примените формулу разности кубов.*

Задача 3, 2009 год. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев еще полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню. Известно, что скорость Гарри в 5 раз меньше скорости дракона. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если он догнал крысу через 4,5 минуты после их встречи? *Простая задача на составление уравнения или неравенства.*

Задача 3, 2010 год. Перед испытательным пуском одного из агрегатов гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии S км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет v км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут? *Простая задача на составление уравнения или неравенства.*

Задача 8, 2010 год. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy - t^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18. \end{cases}$$

Если есть "xy" и "x^2+y^2", то надо получить квадрат, а дальше – сумма неотрицательных чисел равна нулю.

Задача 10, 2010 год. Изобразите на координатной плоскости множество точек (a; b) таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. *Участвующие графики понятны, понятно как и что рисовать.*

Задача 1, 2011 год. Решите уравнение

$$2|x-1|\sin x = x - 1.$$

Эта задача ничуть не сложнее тригонометрической задачи высокого уровня на ЕГЭ.

Задача 7, 2011 год. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника. *Эта задача гораздо проще планиметрической задачи высокого уровня на ЕГЭ.*

Задача 10, 2011 год. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству:

$$\left(|x| + \big|4 - |y|\big| - 4\right)^2 \leq 4.$$

Нарисуйте фигуру W и найдите её площадь. *Задача вроде бы страшная, но совершенно несложная: не спеша "раскрываем" неравенство, представляя его в виде равносильных совокупностей более простых неравенств.*

Задача 1, 2012 год. На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека *довольным*, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9? *Несложная красивая задача, проверяющая способность мыслить.*

Задача 4, 2012 год. Длина медианы *AD* треугольника *ABC* равна 3, длины сторон *AB* и *AC* – 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника *ABC*. *Гораздо проще планиметрической задачи высокого уровня на ЕГЭ: применить формулу медианы и формулу Герона площади треугольника.*

Задача 4, 2013 год. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* прямые *AD* и *BC* перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей *BC* и *AD*, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон *CD* и *AB*. *Гораздо проще планиметрической задачи высокого уровня на ЕГЭ: так много всяких середин отрезков, надо применять свойство средних линий.*

Задача 8, 2013 год. При каких значениях параметра a уравнение

$$5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$$

имеет хотя бы один целый корень? *Классическая задача: если уравнение относительно "x" страшнее уравнения относительно "a", то надо рассмотреть уравнение относительно "a".*

Задача 1, 2014 год. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение

$$\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}.$$

Задача 1, 2015 год. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трех относится к сумме всех членов без последних трех как 4 : 3. Найти количество членов этой прогрессии. *Совершенно несложная задача на проверку формул арифметической прогрессии, их немного и они вообще говоря не самые сложные.*

Задача 2, 2015 год. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. A, B и C – жители этого острова. Один из – них рыцарь, другой – лжец, а третий – обычный человек. A и B сказали следующее:

A: "B по рангу выше, чем C";

B: "C по рангу выше, чем A".

Что ответил C на вопрос: "Кто по рангу выше – A или B?" *Нетрудная задача на простые, но уверенные логические рассуждения.*

Задача 3, 2015 год. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N. *Задача на внимательность и проверку простейших сведений о записи числа, о правилах сложения.*

Задача 5, 2015 год. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 + 18xy + 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Задача, которая своим видом сразу говорит, что нужно делать – получать квадраты суммы.

Если читателю показалось, что приведенные задачи наоборот очень даже страшные, то у меня есть еще одна приманка для участия в математических олимпиадах – льготы. Чтобы эта книга была как можно менее похожа на книгу [1], я не буду много говорить о льготах для обладателей дипломов олимпиад из перечня Министерства образования и науки [6], потому что убежден, что гораздо более внушительный эффект будет достигнут в случае, когда читатель самостоятельно узнает о льготах на сайтах тех вузов, в которые он планирует подавать документы.

Я лишь отмечу, что диплом математической олимпиады I, II или III степени может даровать поступление "без вступительных испытаний". Диплом математической олимпиады всегда даёт больше, чем просто число баллов ЕГЭ по математике. Это стоит попробовать хотя бы потому, что участие в олимпиаде совершенно бесплатное, ничего плохого за попытку побороться за бескровное поступление в вуз вам не будет.

Внимательно посмотрев на приведенные выше задачи вы не могли не заметить, что из года в год некоторые темы повторяются. Поэтому имеет огромное значение разобрать задачи прошлых лет, предлагавшиеся на олимпиаде. Здесь я вновь приглашаю читателя познакомиться с книгой [1]. Наглядным примером может послужить задача 7 очного тура 2015 года. Я вспомнил и разобрался в своем старом векторном решении этой задачи :)

Задача 7, 2015 год. Прямая c задается уравнением $y = x + 1$. Точки A и B имеют координаты $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Решение.

Давайте где-то сверху (в I-ом квадранте прямоугольной системы координат) произвольно отметим точку C на указанной прямой.

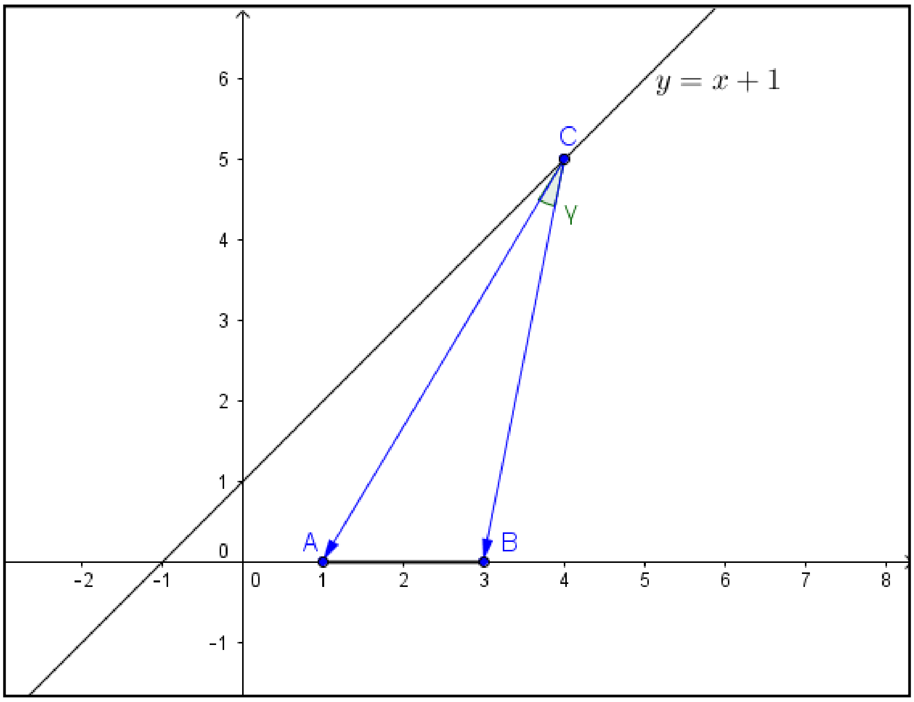

Рис. 1

Задумка такая – выразить искомый угол через формулу косинуса угла между векторами.

Нетрудно понять, что координаты точки C можно записать в виде (x; x+1). Тогда давайте запишем участвующие в формуле косинуса угла между векторами вещи:

$\overrightarrow{CA} = \{-x+1;\ -x-1\}$, $\quad \overrightarrow{CB} = \{-x+3;\ -x-1\}$.

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-x+1)^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{2x^2+2}$, $\quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-x+3)^2 + (-x-1)^2} =$

$= \sqrt{2x^2-4x+10}$.

Теперь запишем скалярное произведение наших векторов и произведение модулей:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-x+1)\cdot(-x+3) + (-x-1)\cdot(-x-1) = 2x^2 - 2x + 4.$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{2x^2+2} \cdot \sqrt{2x^2-4x+10} = 2\sqrt{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5}.$$

Наконец, формула косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5}}.$$

Дальше будет только хуже – надо брать производную этой дроби. Мне спешить некуда, я вспомню правило дифференцирования:

$$\cos\gamma = \frac{f}{g}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

$f' = 2x - 1$,

$g' = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 - 6x^2 + 12x - 2) \cdot (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5)^{-\frac{1}{2}}$,

$f' \cdot g = (2x-1) \cdot (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5)^{\frac{1}{2}}$,

$f \cdot g' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x + 2) \cdot (4x^3 - 6x^2 + 12x - 2) \cdot (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5)^{-\frac{1}{2}} =$

$= (2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 13x^2 + 13x - 2) \cdot (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5)^{-\frac{1}{2}}$.

Продолжаем:

$$(\cos\gamma)' = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\cdot(x^4-2x^3+6x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}} - (2x^5-5x^4+13x^3-13x^2+$$
$$+13x-2)\cdot(x^4-2x^3+6x^2-2x+5)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

$(2x-1)\cdot(x^4-2x^3+6x^2-2x+5)-(2x^5-5x^4+13x^3-13x^2+13x-2)=0.$

$2x^5-5x^4+14x^3-10x^2+14x-5-2x^5+5x^4-13x^3+13x^2-13x+2=0.$

$x^3+3x^2-x-3=0.$

Да, в последнем уравнении сумма коэффициентов при x в чётной степени равна сумме коэффициентов при x в нечетной степени, значит x=1 – корень этого уравнения. Деление столбиком я оставляю для вас.

$$\frac{x^3+3x^2-x-3}{x-1} = x^2+4x+3.$$

И это уравнение имеет корни, x=–1 и x=–3. Окончательно:

$$(\cos\gamma)' = 0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1) = 0.$$

Большему углу соответствует меньшее значение косинуса. Производная имеет два нуля, при переходе через которые меняет свой знак с минуса на плюс (минимум), надо оба проверять:

$$x=-3, \qquad \cos\gamma = \frac{9+3+2}{\sqrt{81+54+54+6+5}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$x=1, \qquad \cos\gamma = \frac{1-1+2}{\sqrt{1-2+6-2+5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Осталось сравнить полученные числа и выбрать меньшее:

$$\frac{7\sqrt{2}}{10} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{7}{10} > \frac{1}{2}; \quad \frac{7\sqrt{2}}{10} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит искомый угол *ABC*, из которого отрезок *AB* виден под наибольшим углом, равен $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45°$ и вершина *C* обладает координатами (1; 2).

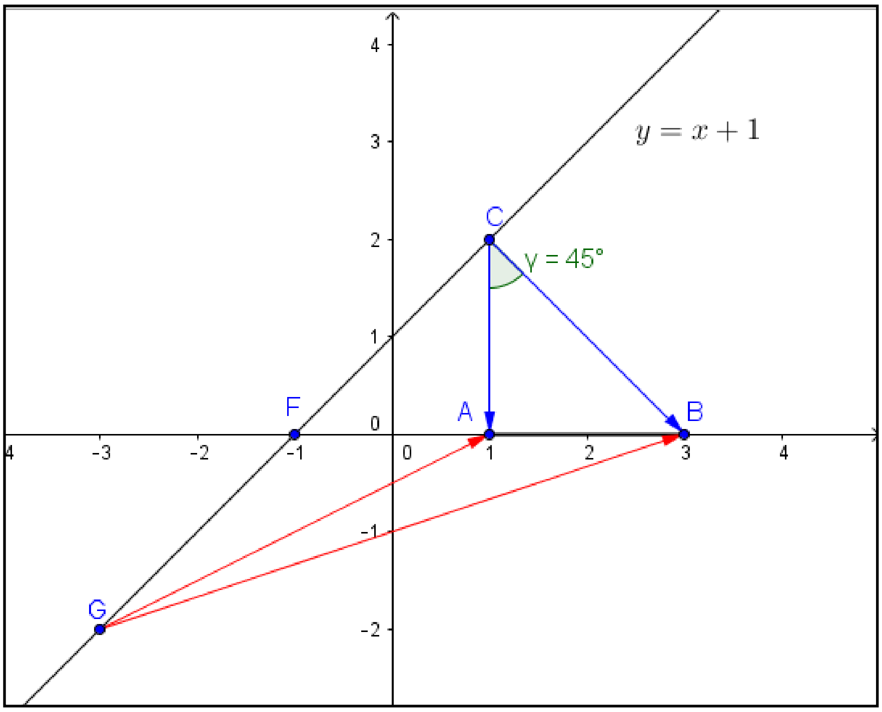

Рис. 2

Углу AFB=0 соответствует максимум значения косинуса между векторами, угол AGB, равный $\arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}$, является максимальным среди углов с вершинами ниже оси Ox. Теперь, когда мы провели полное исследование данной задачи, можно с нескрываемым удовольствием записать ответ.

Ответ: искомая точка $C(1; 2)$ отмечена на рис. 2.

Оказывается, у этой задачи есть и гораздо более красивое и содержательное решение, основанное на соображениях из задачи 8 в 2012 году. Подробнее можно посмотреть в книге [1].

Как видите, человеку, который ознакомился с заданиями предыдущих лет, будет намного легче в бою.

***

Теперь немного статистики.

Таблица 1.

Год	2013	2014	2015
Число людей, набравших 100 баллов ЕГЭ	536	72	66
Количество обладателей диплома одной лишь только ОММО	830	662	664

Это я всё к тому, что согласно статистике получить диплом математической олимпиады легче, чем набрать 100 баллов ЕГЭ, но в то же время минимальная льгота даже от диплома III степени составляет эти самые 100 баллов ЕГЭ!

Откройте теперь перечень олимпиад школьников [6] и посчитайте, сколько в нем разных математических олимпиад. А сколько школьников станут обладателями дипломов олимпиад в этом учебном году? Тысячи! И все они абсолютно точно поступят в желаемый вуз.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада обладает вторым уровнем в перечне [6]. Есть олимпиады посложнее (первого уровня), например "Покори Воробьевы горы!" (не буду ничего об этой олимпиаде говорить, а то опять получится книга [1]), но есть и олимпиады полегче (третьего уровня). Наша олимпиада занимает идеальное положение: она и не такая трудная (для получения диплома третьей степени нужно решить половину или чуть больше половины задач), и льготы даёт очень хорошие.

***

Автор книги, которую вы сейчас читаете – Эдуард Джендубаев – традиционно выражает благодарность руководителям ЕГЭ-портала 4ege.ru. Мои работы доступны в группе https://vk.com/public73975504 и на сайте 4ege.ru.

Участвуйте в математических олимпиадах, ну, пожалуйста!

2015/16 учебный год.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Честно говоря, написание каких-то требований к знаниям читателя неблагодарное дело. Но всё-таки, я попрошу вас быстренько прочитать сначала книгу [8], чтобы вы оценили свои базовые, первичные и совершенно необходимые навыки решения математических задач. Не хочу хвалиться, но этот монументальный труд гарантированно позволит вам подготовиться к простым задачам ЕГЭ, которые только могут быть.

Дальше очень важно вспомнить чёткие методы, формулировки, обрести уверенность в решении простейших тригонометрических уравнений, освежить в памяти свойства чисел и функций. Надо научиться точно понимать условия предлагаемых задач, без всякой неуверенности. Необходимо получить хоть какие-то представления о как можно большем количестве математических объектов и ситуаций.

Каждый человек, считающий себя достойным гражданином своей Родины, обязан вычитать хотя бы один математический справочник в своей жизни. Пусть для вас этим справочником будет книга [7], например.

После прочтения книги [1] можете вернуться к чтению этой книги.

***

Цель этой книги – еще раз напомнить об участии в математических олимпиадах, только и всего.

Надеюсь, приведенные в ней задачи навсегда искоренят страх перед задачами со "всякими там f", задачами на остатки и прогрессии, задачами с непонятным на первый взгляд условием.

ЗАДАЧИ, ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ КОТОРЫХ НА ОЧНОМ ТУРЕ ОБЪЕДИНЕННОЙ МЕЖВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ НЕ РАВНА НУЛЮ

Авторы ОММО испытывают огромную любовь к задачам на остаток от деления числа на 9, а также на последние цифры чисел.

Задача 1. Найти последнюю цифру числа

$$a = 432^{283}.$$

Решение.

Последняя цифра у числа a такая же, как и у числа 2^{283}. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^4 = 16, \qquad 2^5 = 32, \qquad 2^6 = 64 \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 2^k такая же, как и у числа 2^p, где p – одно из чисел 1, 2, 3, 4, а разность $(k - p)$ кратна четырем, то есть периоду появления одной и той же последней цифры. Так как в нашем примере 283=280 + 3, где 280 делится на 4, то последняя цифра числа 2^{283} – восьмерка, потому что $2^3 = 8$.

Замечание.

Если рассматривать последовательные натуральные степени числа 3 (или числа 7), то можно заметить, что последние цифры получаемых чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 3^{214} такая же, как и у числа 3^2, то есть девятка, поскольку 214=53 $\cdot$ 4 + 2.

Аналогично, последняя цифра числа 7^{365} – семерка, так как 365=91 $\cdot$ 4 + 1.

Ответ: 8.

Можно попробовать сформулировать алгоритм решения подобных задач. Пусть у нас просят найти последнюю цифру числа

$$(\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1})^k.$$

Тогда мы говорим, что последняя цифра у данного числа такая же, как у числа a_1^k. Затем находим период появления одной и той же последней цифры путем выписывания последовательных степеней числа a_1. Пусть этот период равен p. Остается теперь узнать остаток от деления числа k на число p и написать в ответ.

$$x = a_1^{k \bmod p} \bmod 10.$$

Задача 2. Доказать, что число

$$10^{25} + 10^{17} - 164$$

делится на 18.

Решение.

Ну, можно конечно вычислить это число и проверить, делится ли последняя его цифра на 2, а сумма всех цифр – на 9, тогда всё число будет делиться на 18. Давайте попробуем так сделать:

$$10^{25} + 10^{17} = 1\ \overbrace{0\dots0}^{7\ \text{нулей}}\ 1\ \overbrace{0\dots0}^{17\ \text{нулей}}\ .$$

Теперь делаем вычитание:

$$10^{25}+10^{17}-164=1\overbrace{0\ldots0}^{7\text{ нулей}}1\overbrace{0\ldots0}^{17\text{ нулей}}-164=1\overbrace{0\ldots0}^{7\text{ нулей}}0\overbrace{9\ldots9}^{14\text{ девяток}}836.$$

Последняя цифра этого числа, как видно, делится на 2, а сумма цифр этого числа равна $1+9\cdot 14+8+3+6=144$ и она действительно делится на 9, значит данное число делится на 18.

Можно пойти другим путем. Заметим, что

$$10^n \bmod 18 = 10, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

А раз такое дело, то можно записать и следующее:

$$(10^n \bmod 18 + 10^k \bmod 18) \bmod 18 = 20 \bmod 18 = 2, \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}$$

Осталось найти остаток от деления 164 на 18, он, по счастливому стечению обстоятельств, тоже равен 2. А значит остаток от деления исходного числа на 18 равен нулю.

Выходит, есть как минимум 2 пути решения подобных задач: непосредственное вычисление числа и проверка его на делимость или нахождение остатка от деления каждого слагаемого.

Ответ: что и требовалось доказать.

В 2009 году первой была задача с рисунком и по нему надо было что-то найти. Что-то подобное, если помнит читатель, было и в 9 классе (причем в демонстрационном варианте ОГЭ-2016 написано, что в самом тексте работы можно малевать как угодно на чертежах), будет и в 11. Поэтому приведу здесь похожую задачу, а именно задачу 3 варианта А заочного тура 2015 года.

Задача 3. Найдите на чертеже узел C' такой, что $S_{ABC'D} = 2S_{ABCD}$. (Ответ запишите в формате типа **(3, 2).**)

Решение.

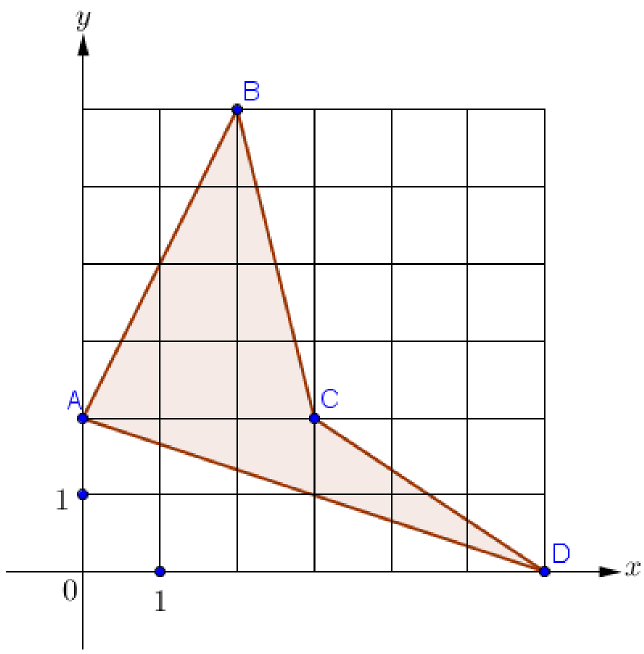

Рис. 3

Ну, конечно видно, видно, что точка *C'*(6; 2) вдове увеличит общую высоту двух треугольников *ABC'* и *ADC'*, а значит и площадь *ABC'D* увеличится вдове по сравнению с *ABCD*. В принципе, большего нам и не надо. Тот же эффект можно достичь с помощью точки (–3; 2), но на чертеже её изобразить невозможно.

Однако хочется исследовать! Особенно приятно исследовать тогда, когда ты, в принципе, задачу решил, получив верный и надежный ответ.

Легко считаются площади треугольников *ABC* и *ADC* – 6 и 3 соответственно.

Значит точка *C'* должна добавить к *ABCD* площадь, равную 9, чтобы было указанное в условии удвоение. В области *A*–(0; 6)–*B*–*A* нет подходящей точки, потому что четырехугольник *ABC'D* будет самопересекающимся, а все мы с детства знаем, что самопересекающиеся четырехугольники – самое страшное зло в жизни.

Область *A*–(0; 0)–*D*–*A* не может содержать точку *C'*, по той же причине.

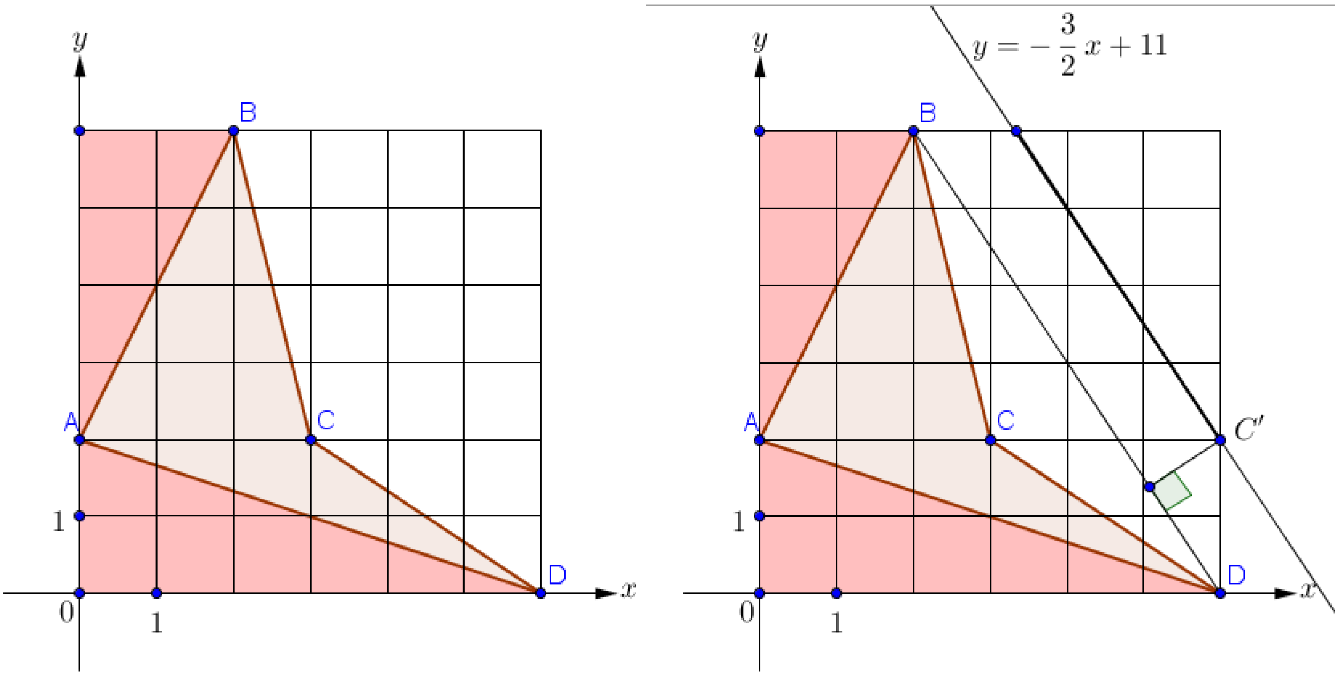

Рис. 4 и 5. Если точка *C'* будет в красной области, *ABC'D* будет самопересекающимся.

Придется вернуться к найденной точке *C'*(6; 2). Если двигать высоту, проведенную из точки *C'* к стороне *BD* вдоль отрезка *BD*, то площадь *BC'DC* не изменится (не будут меняться составляющие этой площади, треугольник *BCD* фиксирован, сторона *BD* и высота к ней не меняют своих длин). Получается, подходящими для точки *C'* координатами будут пары чисел, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 11, \\ 2 \le y \le 6. \end{cases}$$

В указанном в условии задачи формате среди всех таких точек можно добавить только точку (4; 5).

Ответ: в указанном формате (4, 5) или (6, 2).

Задача 4. Решить неравенство

$$f\big(f(x)\big) \ge \big(f(x)\big)^2, \qquad \text{где} \quad f(x) = 2x^2 - 1.$$

Решение.

Всё не так страшно. Давайте просто запишем неравенство, подставляя вместо $f(x)$ соответствующее выражение

$$2(2x^2 - 1)^2 - 1 \ge (2x^2 - 1)^2.$$

Да, вот так уверенно и просто. Вроде бы ничего сложного в решении этого неравенства не усматривается.

Раскрытие неравенства в форме-1:

$$2(2x^2 - 1)^2 - 1 \ge (2x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1 - 1) \cdot (2x^2 - 1 + 1) \ge 0.$$

$$(x^2 - 1) \cdot x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1, \qquad x = 0, \qquad x \ge 1.$$

Раскрытие неравенства в форме-2:

$$2(2x^2-1)^2-1 \geq (2x^2-1)^2 \Leftrightarrow (2x^2-1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-1 \geq 1, \\ 2x^2-1 \leq -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \geq 1, \\ x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1, \qquad x = 0, \qquad x \geq 1.$$

Ответ можно записать, конечно, и в такой форме

$$x \leq -1, \qquad x = 0, \qquad x \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ +\infty).$$

Ответ: $x \leq -1,\ x = 0,\ x \geq 1.$

Задача 5. Найти

$$\underbrace{f(\ldots(f(f}_{n}(6)))\ldots), \qquad \text{где} \quad f(x) = \frac{x}{5} + 4.$$

Решение.

Задача очень похожа на настоящую. Что будем делать? Применять $f(x)$ несколько раз и смотреть, получаются ли комбинации, напоминающие какие-нибудь прогрессии. Я хочу подставить $x = 6$ в конце.

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\frac{x}{5}+4}{5} + 4 = \frac{x}{5^2} + \frac{4}{5} + 4.$$

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = \frac{\frac{x}{5^2}+\frac{4}{5}+4}{5} + 4 = \frac{x}{5^3} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4.$$

$$\underbrace{f(\ldots(f(f}_{n}(x)))\ldots) = \frac{x}{5^n} + \frac{4}{5^{n-1}} + \frac{4}{5^{n-2}} + \cdots + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5} + 4 = \frac{x}{5^n} + 4\left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

Вот здесь главное не напутать: от нуля до $n-1$ ровно n слагаемых! Формулу суммы членов геометрической прогрессии надо написать правильно.

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5-\frac{5}{5^n}}{4}.$$

$$\underbrace{f(\ldots(f(f}_{n}(x)))\ldots) = \frac{x}{5^n} + 5 - \frac{5}{5^n}.$$

Окончательно при подстановке имеем:

$$\underbrace{f(\ldots(f(f}_{n}(6)))\ldots) = \frac{6}{5^n} + 5 - \frac{5}{5^n} = 5 + \frac{1}{5^n}.$$

Ответ: $5 + \frac{1}{5^n}$.

Задача 6. Найти $7 + 77 + 777 + \underbrace{7\ldots7}_{n}$.

Решение.

Здесь будет продолжено развитие применения формулы суммы элементов геометрической прогрессии. С первого раза может не получиться, но надо пытаться скомбинировать разными способами, ведь задача решается!

Ничего плохого против числа 7 не имею, но лучше буду писать единицы, а результат потом просто умножу на 7.

$$1+11+111+\underbrace{1\ldots1}_{n}=1\cdot10^0+(1\cdot10^0+1\cdot10^1)+(1\cdot10^0+1\cdot10^1+1\cdot10^2)+\cdots+$$
$$+(1\cdot10^0+1\cdot10^1+1\cdot10^2+\cdots+1\cdot10^{n-1})\qquad(1).$$

В записанных скобках есть повторяющиеся слагаемые, может быть получится их удачно сгруппировать.

$$10^0\cdot n+10^1\cdot(n-1)+10^2\cdot(n-2)+\cdots+10^{n-2}\cdot\big(n-(n-2)\big)+10^{n-1}\cdot\big(n-(n-1)\big).$$

Ну, вообще говоря не получается ничего хорошего. То раскрыли скобки, то закрыли, теперь опять хочется раскрыть:

$$(1+10+10^2+\cdots+10^{n-1})n-(10+2\cdot10^2+3\cdot10^3+n\cdot10^{n-1})+10^{n-1}=$$
$$=n\cdot\frac{1-10^n}{1-10}-(10+2\cdot10^2+3\cdot10^3+(n-1)\cdot10^{n-1})=$$
$$=\frac{10^n\cdot n-n}{9}-(10+2\cdot10^2+3\cdot10^3+(n-1)\cdot10^{n-1}).$$

Этот путь привел нас в тупик.

Давайте попробуем применять сумму членов геометрической прогрессии в каждой скобке равенства (1):

$$(1)\Leftrightarrow b_1+S_2+S_3+\cdots+S_n.$$

Да, именно S_n, потому что от нуля до $n-1$ ровно n слагаемых.

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1-10^1}{1-10}+\frac{1-10^2}{1-10}+\frac{1-10^3}{1-10}+\cdots+\frac{1-10^n}{1-10}=\frac{10+10^2+10^3+..+10^n-n}{9}=$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right).$$

Умножаем полученное выражение на 7 и получаем ответ.

Ответ: $\frac{7}{9}\left(\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right)$.

Задача 7. Четвертый член арифметической прогрессии равен половине второго, который на 36 больше, чем третий член некоторой геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если он вдвое больше первого члена геометрической прогрессии и впятеро больше второго члена геометрической прогрессии.

Решение.

Вдох-выдох, не спеша читаем условие задачи.

Из последнего предложения можно выписать следующие соотношения:

$$a_1=2b_1,\qquad a_1=5b_2=5b_1q,\ \text{ откуда }\ b_1=\frac{a_1}{2},\qquad q=\frac{2}{5}.$$

Первая часть первого предложения:

$$a_4=\frac{a_2}{2},\qquad a_2=2a_4,\qquad a_1+d=2a_1+6d,\qquad a_1+5d=0\quad(1).$$

Осталось записать связь второго члена арифметической прогрессии с третьим членом геометрической прогрессии:

$$a_2=b_2+36,\qquad a_1+d=b_1q^2+36\quad(2).$$

Подставляя выражения для b_1 и q, получим систему из уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases}a_1+5d=0,\\ a_1+d=\frac{a_1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+36;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=-5d,\\ -5d+d=-\frac{2d}{5}+36;\end{cases}\Leftrightarrow d=-10,\qquad a_1=50.$$

Ответ: 50.

Дальше последует лёгкая задача с "экономическим содержанием". Подобные задачи были включены в ЕГЭ профильного уровня в 2015 году и сохранены в 2016 (номер задачи в варианте поменялся с 19-го на 17-ый). Есть риск, что и в ОММО 2016 года будет подобная задача. Раз уж зашла речь о ЕГЭ, то подробнее об экономической задаче можно почитать в книге [11], которая между прочим является первой книгой в истории России, посвященной экономической задаче на ЕГЭ.

Задача 8. Вкладчик в начале года часть имевшихся у него денег положил в один банк под 60% годовых, а остальные деньги – в другой банк под 40% годовых. Через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?

Решение.

Пусть a – часть денег, положенная вкладчиком в первый банк, b – часть денег, положенная вкладчиком во второй банк. Суммарное количество денег на обоих счетах в начале:

$$a + b.$$

Суммарное количество денег на обоих счетах по прошествии двух лет:

$$a + 0{,}6a + 0{,}6(a + 0{,}6a) + b + 0{,}4b + 0{,}4(b + 0{,}4) = 2{,}56a + 1{,}96b.$$

Сказано, что через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось:

$$2(a + b) = 2{,}56a + 1{,}96b, \qquad b = 14a.$$

А просят нас найти отношение

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+14a} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.

Следующая задача может показаться лёгкой. Вы никогда не задумывались, как получаются результаты, близкие к 100 на ЕГЭ? Как люди, решающие задачу с параметром, могут ошибиться где-то еще? В таких, казалось бы, простых задачах, не требующих массивной алгебры, но логики и проверки, ошибаются очень многие. Похожие задачи на составление уравнения или неравенства (в классификации профильного ЕГЭ-2016 это задача с номером 11) были в разные годы на ОММО.

Задача 9. Ахиллес догонял черепаху, и когда расстояние между ними сократилось в 19 раз и составило 6 м, черепаха остановилась. Какой путь с момента начала погони проделала черепаха, если её скорость в 37 раз меньше скорости Ахиллеса?

Решение.

Введем обозначения:

S – расстояние в метрах между Ахиллесом и черепахой в момент начала погони;

v – скорость черепахи в метрах на какое-то время;

$u = 37v$ – скорость Ахиллеса в метрах на какое-то время;

$\frac{S}{19} = 6$ – понятно что, в метрах;

момент времени $t = 0$ – начало погони Ахиллеса за черепахой, начало движения обоих;

момент времени $t = stop$ – черепаха остановилась, расстояние между ней и Ахиллесом равно $\frac{S}{19}$.

Надо рисовать.

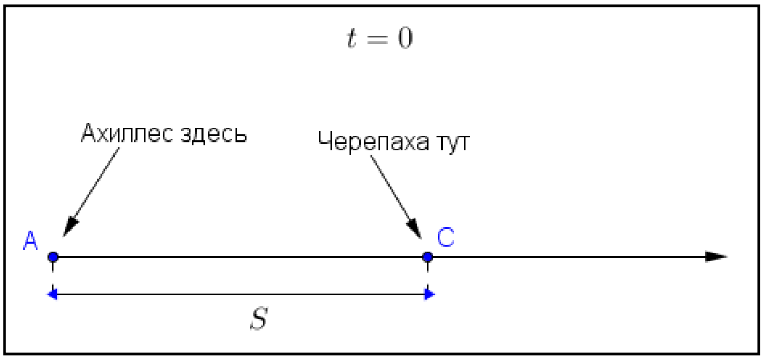

Рис. 6

Понятно, что черепаха покинет пределы отрезка AC. Вопрос в том, останется ли Ахиллес ко второму интересному моменту времени внутри отрезка AC или нет. Рассмотрим случай, когда Ахиллес в момент времени $t = stop$ находится вне отрезка AC.

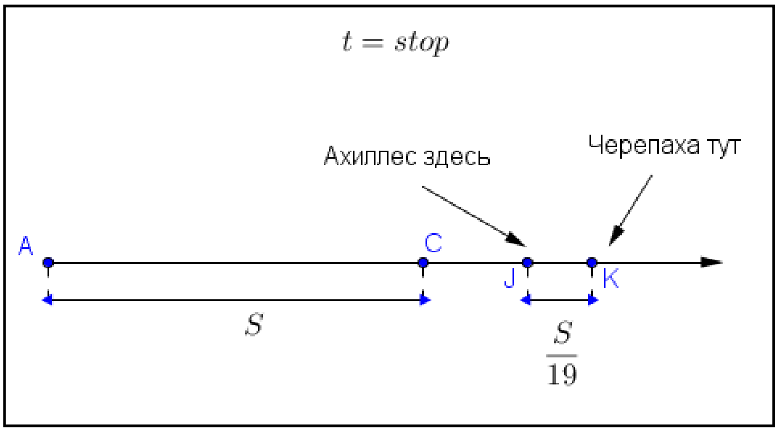

Рис. 7

Если обозначим отрезок CJ через x, то можно записать равенство времени, затраченного Ахиллесом, и времени, затраченного черепахой:

$$\frac{S}{u} + \frac{x}{u} = \frac{x}{v} + \frac{\frac{S}{19}}{v}, \qquad \frac{S + x}{37v} = \frac{19x + S}{19v}, \qquad S + x = 37x + \frac{37}{19}S, \qquad \frac{18}{19}S = -37x.$$

Страшное последнее равенство говорит о том, что рисунок 7 действительности не соответствует. Значит Ахиллес в момент времени $t = stop$ находился внутри (или, быть может, на конце) отрезка AC.

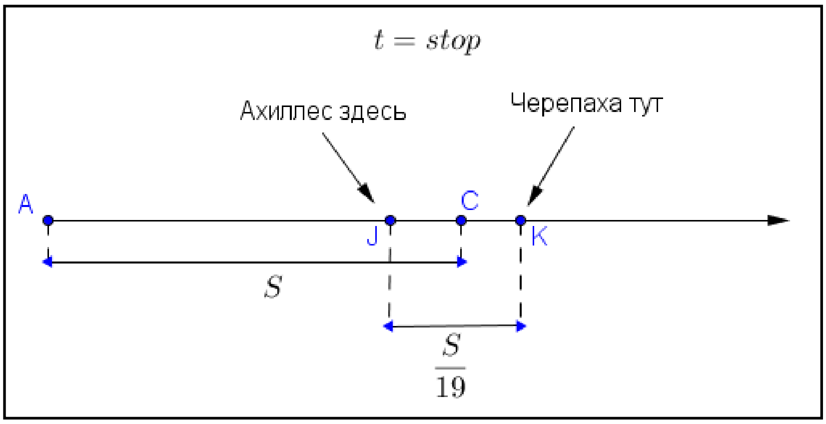

Рис. 8

Если теперь отрезок *CJ* (на рис. 8) обозначить через x, то:

$$\frac{S-x}{u}=\frac{\frac{S}{19}-x}{v},\qquad \frac{S-x}{37v}=\frac{\frac{S-19x}{19}}{v},\qquad S-x=\frac{37S}{19}-37x,\qquad x=\frac{S}{2\cdot 19}.$$

Нам осталось найти искомую величину пути черепахи, то есть

$$\frac{S}{19}-x=\frac{S}{19}-\frac{S}{2\cdot 19}=\frac{S}{2\cdot 19}=\frac{6}{2}=3.$$

Ответ: 3 метра.

Следующую задачу, которая была пятой в билете 1993 года факультета биологии МГУ и обратная к которой была на ОММО в 2013 году под номером 4, оставляю вам для самостоятельного решения.

Задача 10. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон *AD* и *BC*. Найти угол между прямыми *AB* и *CD*.

Задача 11. Решить неравенство

$$f\big(g(x)\big)<g\big(f(x)\big),$$

где $f(x)=2x+2,\qquad g(x)=2^x+10.$

Решение.

Записываем наше неравенство, подставив указанные выражения для функций:

$$2\cdot(2^x+10)+2<2^{2x+2}+10.$$

В итоге получилось-то самое обыкновенное неравенство. Решаем:

$$4\cdot 2^{2x}-2\cdot 2^x-12>0,\qquad 2\cdot 2^{2x}-2^x-6>0.$$

Производим замену переменной и решаем неравенство методом интервалов.

$$2t^2-t-6>0\Leftrightarrow (t-2)\left(t+\frac{3}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t<-\frac{3}{2},\\ t>2.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x<-\frac{3}{2},\\ 2^x>2;\end{array}\right.\Leftrightarrow x>1.$$

Ответ: $x>1$.

Задача 12. Нечетная функция f, определенная на всей числовой прямой, задается формулой

$$f(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}},\qquad \text{при}\quad x>0.$$

Какой формулой задается эта функция при $x<0$? Решить уравнение $f(x)=0$.

Решение.

Наша функция, исходя из условия, нечетна, то есть

$$f(-x)=-f(x).$$

Вот и всё, собственно. Последнее равенство говорит о том, что искомая функция, принимающая отрицательные аргументы, противоположна по знаку функции, принимающей положительные аргументы.

$$f(-x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{-x}}, \qquad \text{при} \quad x < 0.$$

Осталось решить уравнение $f(x) = 0$. Но какой вид функции выбрать для записи этого уравнения? Это на самом деле не имеет значения. Представим, что x_1 – корень уравнения $f(x) = 0$, тогда:

$$f(x_1) = 0 = -0 = f(-x_1),$$

получается, что в силу нечетности нашей функции, число $-x_1$ тоже будет корнем уравнения.

$$1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \qquad x = 4, \qquad x = -4.$$

Только четверка является корнем уравнения $1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, а –4 является корнем уравнения $-1 + \frac{2}{\sqrt{-x}} = 0$.

Заканчивается ли на этом решение задачи? Нет, ведь мы не нашли вид функции $f(x)$ при $x = 0$, а он есть, поскольку сказано, что функция определена на всей числовой прямой. А значит мы решили уравнение $f(x) = 0$ не до конца.

Снова выручает свойство нечетности. Пусть $f(0) = a$. В силу нечётности имеем:

$$f(0) = a; \quad f(-0) = -a; \quad 0 = -0; \quad f(0) = f(-0); \quad a = -a; \quad a = 0; \quad f(0) = 0.$$

Значит к числу решений уравнения $f(x) = 0$ надо добавить еще $x = 0$.

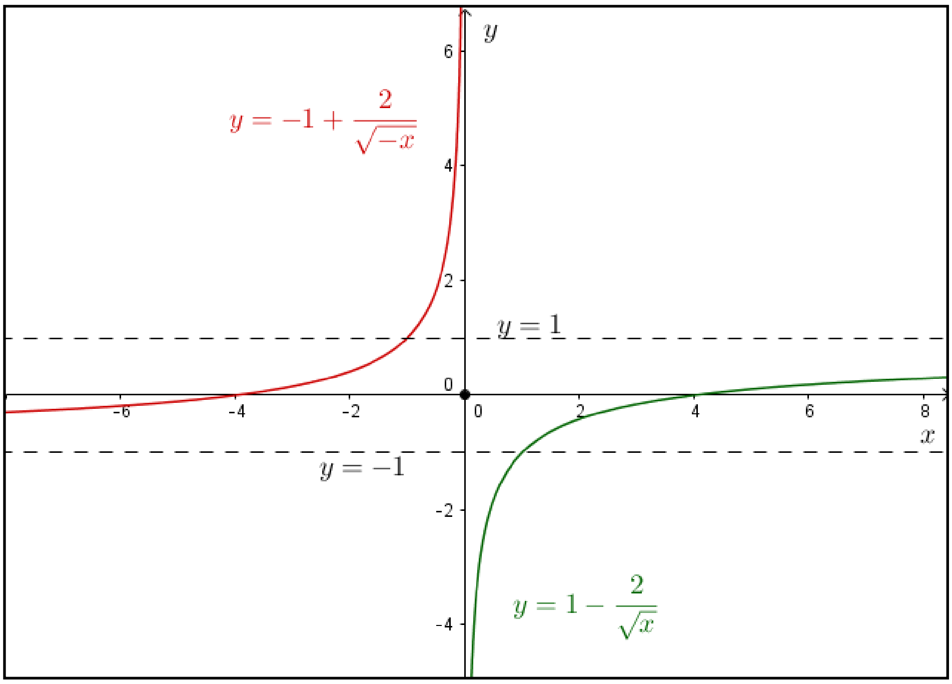

Рис. 9

Ответ: $f(-x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{-x}}$ при $x < 0$; $x = \pm 4$, $x = 0$.

Задача 13. Функция f, определенная на всей числовой прямой и периодическая с периодом 8, задается формулой

$$f(x) = 8x - x^2 \quad \text{при} \quad x \in [0; 8].$$

Решить уравнение

$$f(2x + 16) + 23 = 5f(x).$$

Решение.

Упростим наше уравнение, основываясь на периодичности функции

$$f(x) = f(x + 8n), \qquad n \in \mathbb{Z};$$
$$f(2x + 16) + 23 = 5f(x) \Leftrightarrow f(2x) + 23 = 5f(x).$$

Подставляем выражение, определяющее функцию

$8 \cdot (2x) - (2x)^2 + 23 = 5(8x - x^2);\ \ x^2 - 24x + 23 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, \qquad x_2 = 23.$

Ну, а решениями уравнения

$$f(2x) + 23 = 5f(x)$$

будут, в свою очередь, все числа вида $x = 1 + 8n$ и $x = 7 + 8m$ (потому что $23 = 7 + 2 \cdot 8$), где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Чувствуется, что 23 как число, не принадлежащее отрезку $[0; 8]$, можно заменить на число 7 и прибавить период (порадуем проверяющего и покажем уважение к условию задачи). Тогда ответ будет иметь формат "число, принадлежащее указанному отрезку, определяющему вид функции + период функции". Если вспомнить аналог, тригонометрические уравнения, то мы стараемся записать ответ так же, например

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{3} + \pi m, \qquad m \in \mathbb{Z};$$

но никогда следующим образом

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^m \cdot \frac{300000001\pi}{3} + \pi m, \qquad m \in \mathbb{Z};$$

хотя обе формы не содержат ошибки.

Ответ: $x = 1 + 8n,\ \ x = 7 + 8m;\ \ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 14. Нечетная функция f, определенная на всей числовой прямой и периодическая с периодом 4, задается формулой

$$f(x) = 1 - |x - 1| \ \text{ при } \ 0 \le x \le 2.$$

Решить уравнение

$$2f(x)f(x - 8) + 5f(x + 12) + 2 = 0.$$

Решение.

Упростим наше уравнение, основываясь на периодичности функции

$$f(x) = f(x + 4n), \qquad n \in \mathbb{Z};$$
$$2f(x)f(x - 8) + 5f(x + 12) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\big(f(x)\big)^2 + 5f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = -2, \qquad f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Вовлекая в процесс решения указанное свойство нечетности нашей функции, можно и догадаться, и показать, и строго обосновать тот факт, что

$$f(x) = -1 + |x + 1| \ \text{ при } \ -2 \le x \le 0.$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат, точки (0; 0). Зная график "правой половины", можно без особого труда восстановить график "левой половины". Получив график функции на протяжении периода, остается просто размножить его вдоль всей оси *Ox*.

Тогда график нашей функции будет выглядеть так:

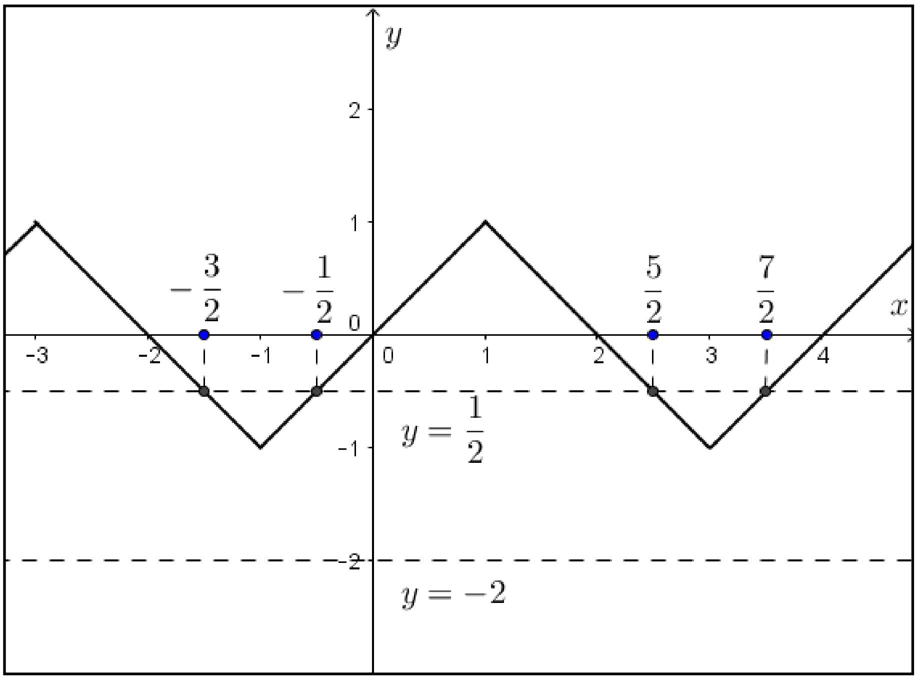

Рис. 10

Как видно, уравнение $f(x) = -2$ не имеет решений, а решения уравнения $f(x) = -\frac{1}{2}$ можно записать, например, таким образом:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + 4n, \qquad x = -\frac{1}{2} + 4k, \qquad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{2} + 4n,\ x = -\frac{1}{2} + 4k,\ n, k \in \mathbb{Z}.$

Задача 15. Нечетная функция f, определенная на всей числовой прямой и периодическая с периодом 4, задается формулой

$$f(x) = 2x(x+2) \ \text{ при } \ -2 \le x \le 0.$$

Решить уравнение

$$\frac{2f(-3-x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{2}}} = 0.$$

Решение.

Как уже говорилось, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

$f(-x) = -f(x), \qquad f(x) = -f(-x) = -\big(2 \cdot (-x) \cdot (-x+2)\big) = -2x^2 + 4x$ при $0 \le x \le 2.$

График нашей функции выглядит следующим образом:

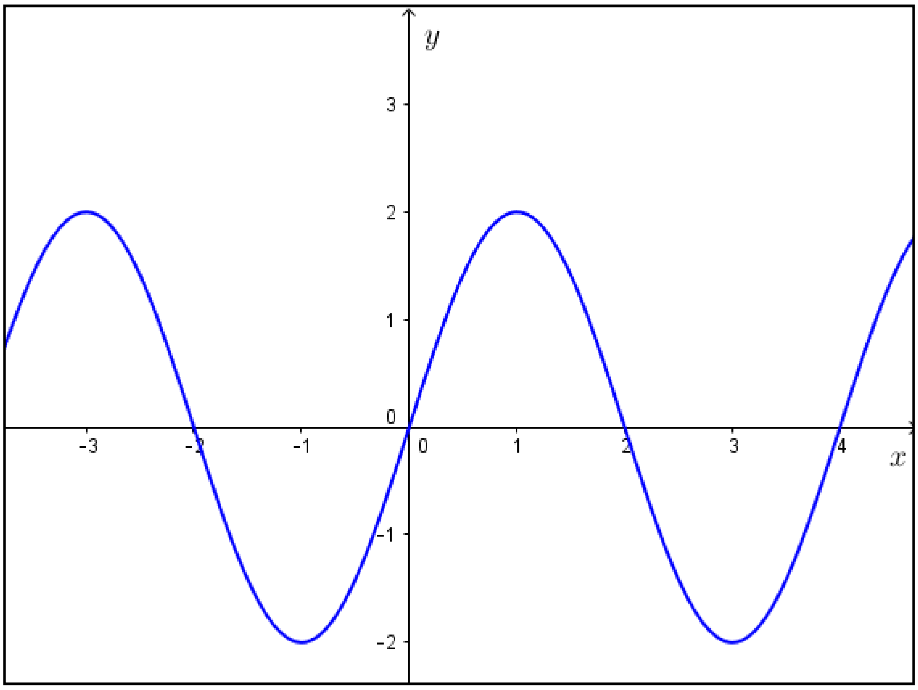

Рис. 11

Теперь надо найти значения функции, при которых уравнение имеет смысл. Имеющийся радикал должен быть неотрицательным и знаменатель не должен обращаться в ноль:

$$\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0+4n \leq \frac{x}{2}+\frac{3}{4} \leq 2+4n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Да, вот так просто. Судя по графику, функция неотрицательна на интервале $[0;2]$, а в силу периодичности функции, подобные интервалы будут повторяться. Получить их можно добавлением (или вычитанием) к границам одного и того же, кратного четырем, числа (вспомните тригонометрические неравенства!).

Идем дальше:

$$0+4n \leq \frac{x}{2}+\frac{3}{4} \leq 2+4n \Leftrightarrow -\frac{3}{4}+4n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5}{4}+4n \Leftrightarrow -\frac{3}{2}+8n \leq x \leq \frac{5}{2}+8n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь найдем нули знаменателя:

$$\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right) = 2.$$

Давайте нарисуем в одной системе координат графики

$$y = f(t) \quad \text{и} \quad y = 2.$$

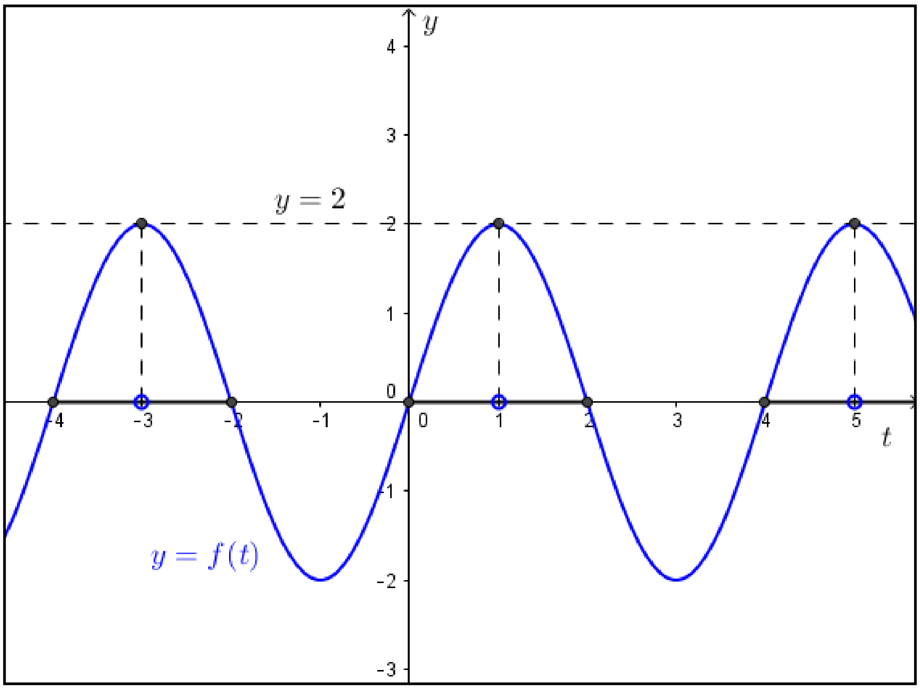

Рис. 12

Видно, что решением последнего записанного уравнения являются значения аргумента функции –3, 1, 5..., то есть

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{3}{4}=1+4k;\ x=\frac{1}{2}+8k, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Остается вычислить нули числителя и отобрать те из них, которые входят в ОДЗ.

$$2f(-3-x)-3=0 \Leftrightarrow f(-3-x)=\frac{3}{2}.$$

В силу нечетности нашей функции, уравнение можно переписать так:

$$f(x+3)=-\frac{3}{2}.$$

А в силу периодичности, уравнение можно переписать так:

$$f(x-1)=-\frac{3}{2}.$$

Ничего этого можно было и не делать. Но такое уравнение, вроде бы, приятнее того, что было раньше. Продолжаем:

$$2\cdot(x-1)\cdot(x-1+2)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}+4m, \qquad m\in\mathbb{Z}.$$

Некоторые из нулей числителя не входят в ОДЗ, а некоторые и вовсе – совпадают с нулями знаменателя.

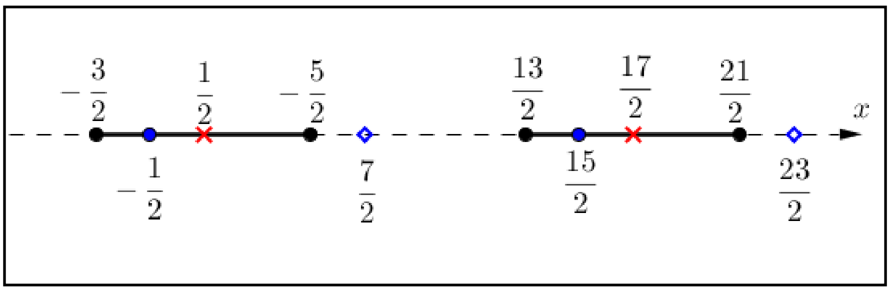

Рис. 13

Ответ: $-\frac{1}{2}+8h,\ h\in\mathbb{Z}.$

Да... Это были реально тяжелые задачи. Сейчас будет полегче. На ОММО ни разу за все годы, что мы вместе, не было задач на целую часть числа. Именно поэтому я напишу здесь такую. Мне кажется, в 2016 году будет задача на целую часть числа.

Задача 16. Решите уравнение

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{x^6}{2}-[x],$$

где через $[x]$ обозначается целая часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Например $[-\pi]=-4$, потому что $-4<-\pi<-3$, $[2{,}9]=2$.

Решение.

Как это не покажется удивительным, но здесь поможет строительство графиков. Торопиться не будем.

Давайте подумаем, как выглядит график функции $y=[x]$.

$$x\in[-2;\,-1),\ \ y=-2;\ x\in[-1;0),\ \ y=-1;\ x\in[0;1),\ \ y=0;\quad x\in[1;2),\ \ y=1;$$
$$x\in[k;k+1),\ \ y=k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

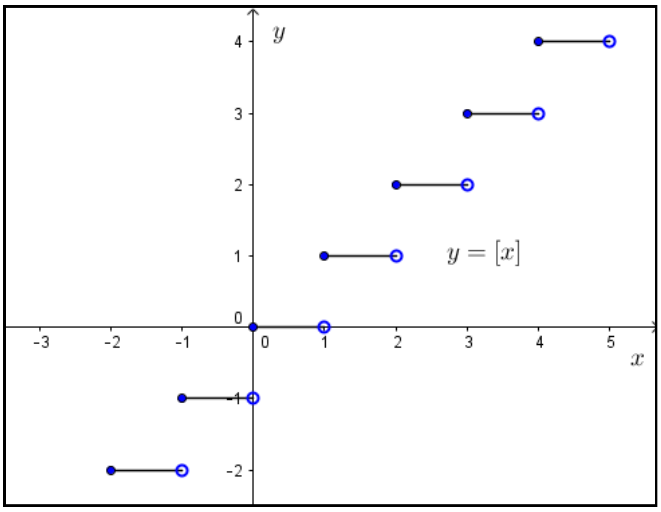

Рис.14

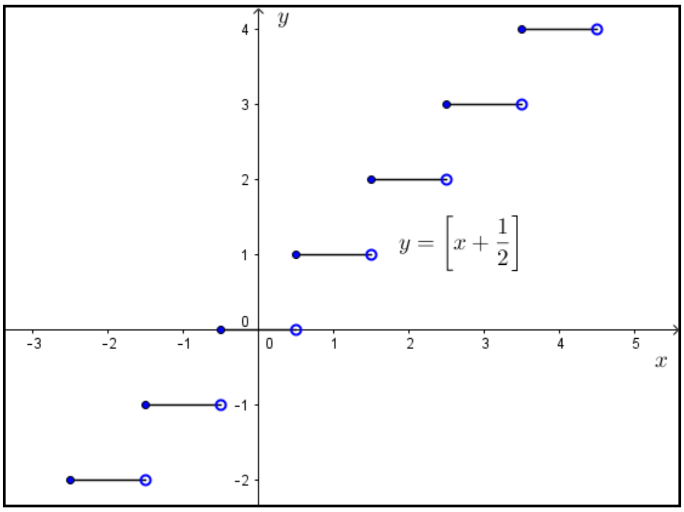

Рис. 15

Сумев построить график $y=[x]$, легко строим и график $y=\left[x+\frac{1}{2}\right]$, сдвигая первый график влево на 0,5.

Как же будет выглядеть график функции $y=\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]$? Для уверенности можно составить таблицу значений:

Таблица 1.

x	–2	–1,7	–1,5	–1,4	–1	–0,8	–0,5	–0,4	0	0,4	0,5	0,7	1	1,1
y	–4	–4	–3	–3	–2	–2	–1	–1	0	0	1	1	2	2

График изображен ниже. Теперь остается нарисовать $y=\frac{x^6}{2}$. Сложность в том, что совсем непросто рисовать такой график в сложившейся ситуации. Одно мы знаем точно – график $y=\frac{x^6}{2}$ растет приличными темпами когда $x>1$.

Мне-то легко, сидя за компьютером, строить график и уверенно рассуждать о результатах. Надо усилить свою доказательную базу.

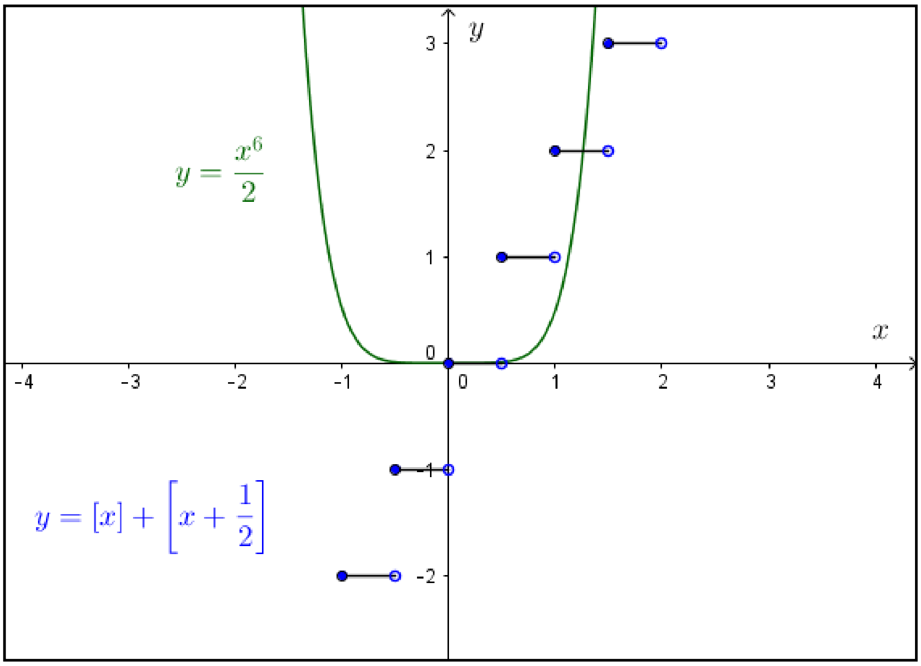

Рис. 16. Будем считать, что подобный рисунок мы не в силах создать на экзамене.

Я уверен в том, что $x = 0$ – корень исходного уравнения, что график $y = \frac{x^6}{2}$ проходит через точку $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Этого недостаточно для ответа на вопрос о местах пересечения графиков.

Нетрудно записать следующее:

$$\frac{x^6}{2} = c, \qquad c \in \mathbb{N}; \quad x = \sqrt[6]{2c}.$$

Пробуем

$$c = 1, \qquad x = \sqrt[6]{2}; \quad \frac{x^6}{2} = 1.$$

Теперь надо определить, между какими концами характерных интервалов аргументов функции $y = \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]$ находится число $\sqrt[6]{2}$. Понятно, что это число больше единицы. Ближайший правый конец интервала – число $\frac{3}{2}$.

$$1 = 2^0 < 2^{\frac{1}{6}} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{2} \vee \frac{3}{2}, \qquad 2 \vee \frac{9}{4}, \qquad -\frac{1}{8} < 0, \qquad \text{значит} \;\; 1 < 2^{\frac{1}{6}} < \frac{3}{2}.$$

Подставляем и проверяем окончательно

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = 1 + 1 = 2, \qquad 2 \neq 1,$$

значит $x = \sqrt[6]{2}$ не является корнем нашего уравнения.

Пробуем

$$c = 2, \qquad x = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}; \quad \frac{x^6}{2} = 2.$$

Делаем то же самое – в какой характерный интервал попадает число $\sqrt[3]{2}$?

$$1 = 2^0 < \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}.$$

Подставляем:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = 1 + 1 = 2, \qquad 2 = 2.$$

Значит $\sqrt[3]{2}$ – решение.

Чувствуется, что больше пересечений нет, поскольку $y = \frac{x^6}{2}$ начинает уже расти с приличной скоростью. Предположение наше можно проверить, сравнив значения участвующих функций в ближайшей большей границе характерного интервала для последнего найденного корня.

$$\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] = 2 + 1 = 3.$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{2} = \frac{3^6}{2^7}.$$

Сравниваем

$$\frac{3^6}{2^7} \vee 3, \qquad 3^5 \vee 2^7, \qquad 163 > 128, \qquad \frac{3^6}{2^7} > 3.$$

Значит графики наши пересекаться больше не будут. $y = \frac{x^6}{2}$ начинает принимать недостижимые для $y = \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]$ значения.

Ответ: $0,\ \sqrt[3]{2}$.

Давайте немного отдохнем и решим легкую задачу про арифметическую прогрессию.

Задача 17. Существует ли арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа первых членов равна утроенному квадрату этого числа?

Решение.

Запишем сумму n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Равенство, задаваемое условием задачи, запишется так:

$$S_n = 3n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Найдем первый член такой прогрессии, подставив $n = 1$:

$$S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1, \qquad 3 \cdot 1^2 = 3, \qquad a_1 = 3.$$

Теперь подставим $n = 1$:

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d = 6 + d, \qquad 3 \cdot 2^2 = 12, \qquad 6 + d = 12, \qquad d = 6.$$

Всё, нам достаточно информации для того, чтобы проверить истинность равенства для любого $n \in \mathbb{N}$, подставив данные во вторую формулу суммы членов арифметической прогрессии:

$$S_n = 3n^2, \qquad \frac{6 + 6n - 6}{2} n = 3n^2, \qquad 3n^2 = 3n^2.$$

Ответ: да, $a_1 = 3,\ d = 6$.

Задача 18. Найти все натуральные n, при которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по семнадцатому члену и сумме n первых членов.

Решение.

Задача опасна тем, что непонятно, что вообще известно, с чем можно работать. Но это только на первый взгляд.

Взглянув на условие задачи во второй раз, можно понять, что у нас есть какое-то число a_{17}, какое-то число S_n и какое-то число n. И всё это дело происходит с членами арифметической прогрессии.

Для однозначного определения арифметической прогрессии необходимо ввести a_1 и d. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 16d = a_{17}, \\ \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = S_n; \end{cases}$$

где искомыми являются переменные a_1 и d, а параметрами – a_{17}, S_n, n.

Решаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 = a_{17} - 16d, \\ \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = S_n; \end{cases} \quad \frac{2a_{17} - 32d + dn - d}{2} n = S_n,$$

$$d = \frac{\dfrac{2S_n}{n} - 2a_{17}}{n - 33}.$$

Вот! Единственное запрещенное n это $n = 33$, при котором невозможно вычислить d.
Ответ: 33.

Следующая задача относится к категории приятных. Она проверит, как быстро у вас наступает отчаяние, как хорошо вы знаете русский алфавит, как аккуратно вы управляетесь с массивами данных.

Задача 19. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться. Какая буква в цикле встречалась наиболее часто? Может ли цикл при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

Решение.

Что вообще тут происходит? Как буквы подсаживаются?

Первая определенность в задаче – это строгий порядок расположения букв А, И, Б.

Номер буквы А в русском алфавите – 1, номер буквы И – 10. Сумма цифр порядковых номеров в русском алфавите букв А и Б – 1+10=11, сумма цифр числа 11 есть 1+1=2, что в точности является номером в русском алфавите буквы Б.

Это мини-исследование говорит о том, что подсаживание букв происходит слева направо, то есть следующая буква сядет справа от Б. Уже можем что-то нарисовать на радостях.

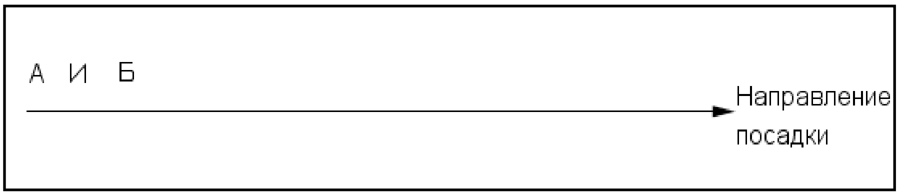

Рис. 17

Какие буквы куда подсаживаются теперь решаем мы.

Для удобства можно сделать таблицу соответствия буквы русского алфавита её порядковому номеру в нём.

Таблица 2

№ в алфавите	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О

Таблица 3

№ в алфавите	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Буква	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я

Теперь можно составить таблицу наших подсаживающихся букв. Подсаживающаяся буква определяется двумя предыдущими. Порядковый номер буквы И в русском алфавите 10, буквы Б номер 2, сумма чисел 10 и 2 равна 12, сумма цифр числа 12 равна 3. Буква с порядковым номером в русском алфавите, равным 3, это буква В.

Место на таблицу жалеть не надо, потому что мы ведь не знаем, когда начнется повторяющийся цикл.

Таблица 4

№ в алфавите	1	10	2	3	5	8	13	12	7	10	8	9	17	17	16	15	13	10	5	6
Буква	А	И	Б	В	Д	Ж	Л	К	Ё	И	Ж	З	П	П	О	Н	Л	И	Д	Е

Таблица 5

№ в алфавите	11	8	10	9	10	10	2	3	5	8	13	12	7
Буква	Й	Ж	И	З	И	И	Б	В	Д	Ж	Л	К	Ё

Вот и цикл наступил (а лучше бы Новый Год!). Наш набор циклически повторяющихся букв (при начальных буквах А, И) выглядит так:

Б, В, Д, Ж, Л, К, Ё, И, Ж, З, П, П, О, Н, Л, И, Д, Е, Й, Ж, И, З, И, И

поэтому ответ на первый вопрос – буква И.

Для ответа на другие вопросы задачи надо обратиться всё-таки к математике.

Если цикл, состоящий из одной повторяющейся буквы, существует, обозначим эту букву символом ∀. Если её порядковый номер k в русском алфавите является числом однозначным, то для третьей буквы цикла ∀∀∀ должно выполняться равенство:

$$k + k = k, \qquad k = 0;$$

что нам не подходит. Значит порядковый номер числа ∀ является двузначным числом, $k = \overline{ab} = 10a + b$.

Теперь проверим то же самое, выполняется ли правило подсаживания букв для третьей буквы цикла ∀∀∀:

$$(a + b) + (a + b) = 10a + b, \qquad 8a = b.$$

Поскольку a, b – цифры, то

$$a = 1, \qquad b = 8; \ \ k = 10 + 8 = 18, \qquad \text{буква Р.}$$

Что там нам осталось? Надо еще посадить две начальные буквы так, чтобы при каком-то подсаживании каких-то букв получился цикл РРР. Сделать это на самом деле труда не составляет. Пусть тремя первыми буквами будут буквы Р, Р, Р в указанном порядке. Проверка легитимности посадки третьей буквы была сделана раньше и доказана, а первые две не обременены никакими санкциями.

Каким еще образом можно выбрать три первые буквы? З, З, Р; Р, З, Р; З, Р, Р... Но нас об этом уже и не спрашивают...

Ответ: буква И; может; из буквы Р (например, при начальных Р, Р).

Давайте решим еще одну чудовищную задачу "Со всякими там f", уж больно часто они встречаются на ОММО.

Задача 20. Функция f определена на всей числовой прямой, возрастает и принимает только отрицательные значения. Решить неравенство

$$\frac{2f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|}{\left(3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)^7}>0.$$

Решение.

Да ладно, я пошутил, не будем решать эту задачу, хахаха, ну её. Здоровье дороже.

Нет, будем! Но что мы можем сделать против этого ужаса? Например, убрать возведение в седьмую степень, оно на знак знаменателя не влияет. Да и вообще, знаменатель по крайней мере гораздо привлекательнее числителя этой дроби.

Можем еще написать умную вещь

$$32-2x\geq 0,\qquad x\leq 16.$$

Теперь настало время в десятый раз перечитать условие задачи. Всё равно ничего не могу понять. Пойду чай выпью.

Функция наша возрастает, но принимает только отрицательные значения. Это вообще законно? В жизни есть функция $y=a^x$ и она положительна для всех $x\in\mathbb{R}$, возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$. Легким и изящным движением руки мы можем получить функцию, качественно идентичную нашей функции f.

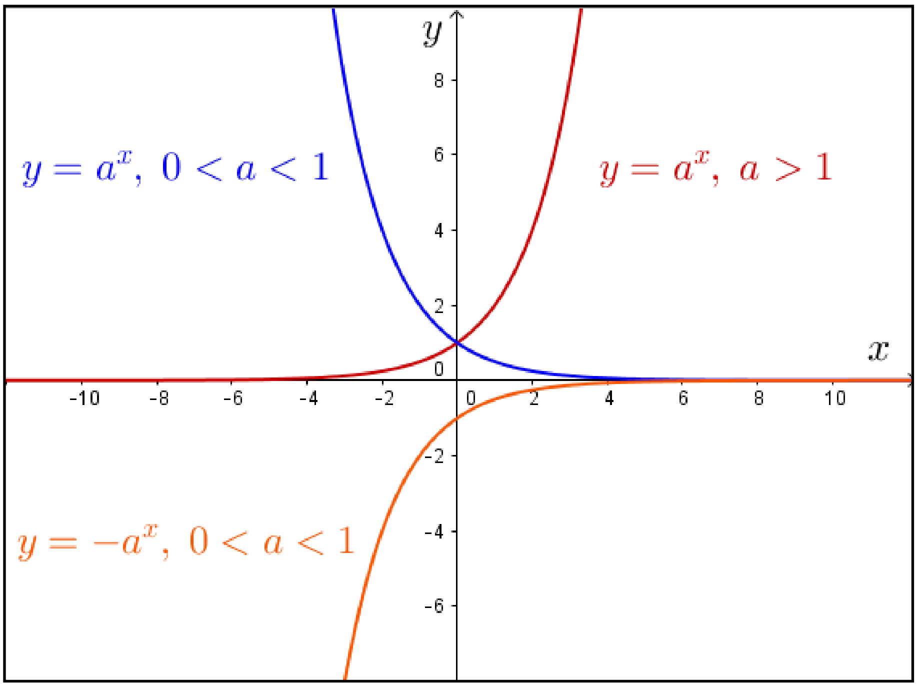

Рис. 18

Функцию f можно считать, например, функцией $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Как много мы уже сделали!

Вернемся к привлекательному знаменателю.

$$3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)$$

Что мы можем заметить? Значение выражения под знаком функции первого слагаемого меньше на 112 значения под знаком функции второго слагаемого. Поскольку функция наша возрастает, то меньшему значению аргумента функции соответствует меньшее значение функции.

$$-2x\sqrt{32-2x}-112<-2x\sqrt{32-2x} \Leftrightarrow f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)<f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right).$$

Сделаем последнее неравенство еще больше похожим на знаменатель, умножим обе части на положительное число 2.

$$2f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)<2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right).$$

Если мы прибавим к левой части неравенства отрицательное число, то знак неравенства не изменится, а даже наоборот, станет виден еще лучше.

$$2f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-100000<2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)$$

Осталось вспомнить о том, что наша функция отрицательна при всех значениях аргумента. Поэтому, если прибавить к левой части неравенства выражение $f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)$, то знак неравенства не поменяется.

$$3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)<2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right).$$

Значит знаменатель нашей дроби строго меньше нуля. Отсюда приятная новость – ограничение для x мы уже давно нашли, $x \le 16$.

Числитель, значит, тоже должен быть меньше нуля, чтобы вся дробь была больше нуля.

$$2f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|<0,$$

$$\left|f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|<-2f(x^2-2x-112).$$

В правой части неравенства – строго положительное число. Можно раскрыть модуль.

$$2f(x^2-2x-112)<f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<-2f(x^2-2x-112),$$

Вычитаем ото всего выражение $f(x^2-2x-112)$. Получаем

$$f(x^2-2x-112)<-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<-3f(x^2-2x-112).$$

Левая часть этого двойного неравенства выполнена при всех допустимых значениях аргумента, поскольку выражение $f(\text{кое}-\text{что})$ всегда отрицательно, а выражение $-3f(\text{что}-\text{то})$ всегда положительно. Остается разобраться с неравенством

$$-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<-3f(x^2-2x-112).$$

Можно поделить на число –3, при этом сменив знак неравенства на противоположный, потому что число –3 отрицательное.

$$f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)>f(x^2-2x-112).$$

Поскольку наша функция f возрастает, то большему значению выражения под знаком функции будет соответствовать и большее значение функции. Переходим к неравенству участвующих аргументов:

$$-2x\sqrt{32-2x}>x^2-2x-112.$$

Как это не покажется удивительным, но самое трудное начинается именно сейчас. Здесь нужно снова идти пить чай.

Давайте теребить это неравенство, двигать слагаемые, перемещать – главное, не сидеть сложа руки. Задача должна решиться! Уединять выражение с радикалом, смотреть знаки обеих частей – выглядит жутко:

$$x^2-2x-112<-2x\sqrt{32-2x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-112<0, \\ -2x\sqrt{32-2x}>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-112<0, \quad -2x\sqrt{32-2x}<0, \\ \left(x^2-2x-112\right)^2>\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-112>0, \quad -2x\sqrt{32-2x}>0, \\ \left(x^2-2x-112\right)^2<\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так или иначе, возникнет уравнение четвертой степени со здоровыми коэффициентами, свободный член вообще получается равным 112^2. Всё это – верный признак того, что мы идем в неправильном направлении.

Давайте еще как-нибудь перепишем неравенство.

$$x^2-2x+2x\sqrt{32-2x}-112<0.$$

Соображения: мы имеем квадрат икса, удвоенное произведение икса на радикал и второе слагаемое радикала уже без радикала...

Да! Применима формула суммы квадратов!

$$x^2+2\cdot x\cdot\sqrt{32-2x}+32-x-112-32<0,$$

$$\left(x+\sqrt{32-2x}\right)^2<144 \Leftrightarrow \begin{cases} -12<x+\sqrt{32-2x}, \\ x+\sqrt{32-2x}<12. \end{cases}$$

Вот здесь уже уединение радикала не вызывает опасений.

$$\begin{cases} -x-12<\sqrt{32-2x}, \\ \sqrt{32-2x}<-x+12. \end{cases} \qquad (1)$$

Решаем первое неравенство системы (1):

$$-x-12<\sqrt{32-2x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-12<0, \\ 32-2x\geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -x-12\geq 0, \\ (-x-12)^2<32-2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -12<x\leq 16, \\ -13-\sqrt{57}<x\leq -12; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -13-\sqrt{57}<x\leq 16.$$

Решаем второе неравенство системы (1):

$$\sqrt{32-2x}<-x+12 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+12>0, \\ 32-2x\geq 0, \\ 32-2x<(-x+12)^2; \end{cases} \Leftrightarrow x<8.$$

Окончательно, имеем

$$-2x\sqrt{32-2x}>x^2-2x-112 \Leftrightarrow \begin{cases} -13-\sqrt{57}<x\leq 16, \\ x<8; \end{cases} \Leftrightarrow -13-\sqrt{57}<x<8.$$

Ответ: $x\in\left(-13-\sqrt{57};\ 8\right)$.

КОРОТКОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По традиции, я благодарю всех, кто нашел мою книгу хоть сколь-нибудь полезной. Или лучше сказать менее строго, хоть сколь-нибудь небесполезной.

Цель этой книги, как я уже говорил, одна – повысить интерес к математическим олимпиадам, побудить в них участвовать.

Если кому-то покажется, что книга какая-то уж больно короткая, затронула грубо говоря только две темы, то могу отметить, что это было сделано специально. Сделано для того, чтобы показать вам – можно искать и находить задачи, похожие на задачи прошлых лет ОММО. Чтобы вы искали похожие задачи самостоятельно!

Ведь в конечном счете, успех на математической олимпиаде определяется мерой качества вашего самостоятельного труда, вашей самостоятельной к ней подготовке.

При серьезном настрое у читателя действительно принять участие в олимпиаде, могу посоветовать книгу [10]. Состоит она из задач вступительных испытаний МГУ, подробно разбитых на идеи и методы решения, к тому же не очень большая по количеству страниц.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

1. *Джендубаев, Э.А.-З.* / Немного об ОММО (и совсем чуть-чуть про "Покори Воробьевы горы!"). – 2-е изд., испр. и доп. – Черкесск, 2015. – 75 с. с илл. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: 4ege.ru/matematika/51345-reshaem-zadachi-obedinennoy-mezhvuzovskoy-matematicheskoy-olimpiady.html.
2. Предварительные списки победителей и призеров Объединенной межвузовской математической олимпиады в 2012/2013 учебном году. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://olympiads.mccme.ru/ommo/13/ommo2013-diploma.html.
3. Списки победителей и призеров Объединенной межвузовской математической олимпиады в 2013/2014 учебном году. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://olympiads.mccme.ru/ommo/14/nagr.htm.
4. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2015 года. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://olympiads.mccme.ru/ommo/15/nagr.html.
5. Инфографика: Итоги ЕГЭ 2014. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://ege.edu.ru/main/news/index.php?id_4=19424.
6. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 28.08.2015 № 901 "Об утверждении Перечня олимпиад школьников и их уровней на 2015/16 учебный год" (Зарегистрирован в Минюсте России 09.09.2015 № 38856). – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201509110016.
7. *Гусев, В.А., Мордкович, А.Г.* / Математика: учебно-справочное пособие. – М.: Астрель, 2013.
8. *Джендубаев, Э.А.-З.* / Возможно самая худшая методичка для подготовки к ЕГЭ по математике. – Черкесск, 2015. – 134 с. с илл. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный: http://4ege.ru/matematika/6219-reshenie-zadach-po-matematike-iz-otkrytogo-banka-fipi.html.
9. *Шабунин, М.И.* / Математика [Электронный ресурс]: пособие для поступающих в вузы. – 6-е изд. (эл.). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 694 с.
10. *Сергеев, И.Н.* / Математика. Задачи с ответами и решениями: учебное пособие. – 6-е изд. – М.: КДУ, 2013. – 360 с., ил.
11. *Джендубаев, Э.А.-З.* / Невероятное методическое пособие по математике для решения задачи 19 профильного ЕГЭ-2015. – Черкесск, 2015. – [Электронный ресурс] режим доступа свободный. – http://4ege.ru/matematika/6235-reshenie-zadaniy-19-po-matematike-profilnyy-uroven.html.
12. *Воронин, В.П., Федотов, М.В.* / Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: факультет ВМиК МГУ, 2011. – 111 с.