Задачка экономического факультета МГУ (2005), полное решение которой я не смог найти в интернете и поэтому решил сделать эту заметку.

Э. Джендубаев

Условие задачи.

Фигура F задается на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2\arcsin\left(\frac{y-x+9}{13}\right)\cdot\arccos\left(\frac{10+2x+2y}{18}\right)}{|x-4|\cdot\left(\left|\sqrt{9\sqrt{128}-97}+x\right|+|y+5|\right)} \geq 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Решение.

После того, как гнев, паника, негодование и сокрушительное бессилие отступили, заметим, что не смотря ни на что знаменатель нашей дроби неотрицателен при допустимых значениях переменных.

Взглянем теперь на числитель и попытаемся понять его знак. Вспоминаем про аркфункции:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\alpha \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \arccos\alpha \leq \pi, \qquad -1 \leq \alpha \leq 1.$$

Эти вещи легко восстанавливаются из тригонометрического круга.

А что дальше делать будем? Кто-нибудь представляет вообще, как можно свернуть числитель в совокупность простейших тригонометрических уравнений? Лично я не представляю.

Единственность, четность, монотонность, графики, особые точки, целочисленный перебор, геометрические аналогии, симметрия... Остается метод оценки.

Предположив, что наши аркфункции принимают максимальные значения (не задаваясь вопросом при каких переменных), заметим, что

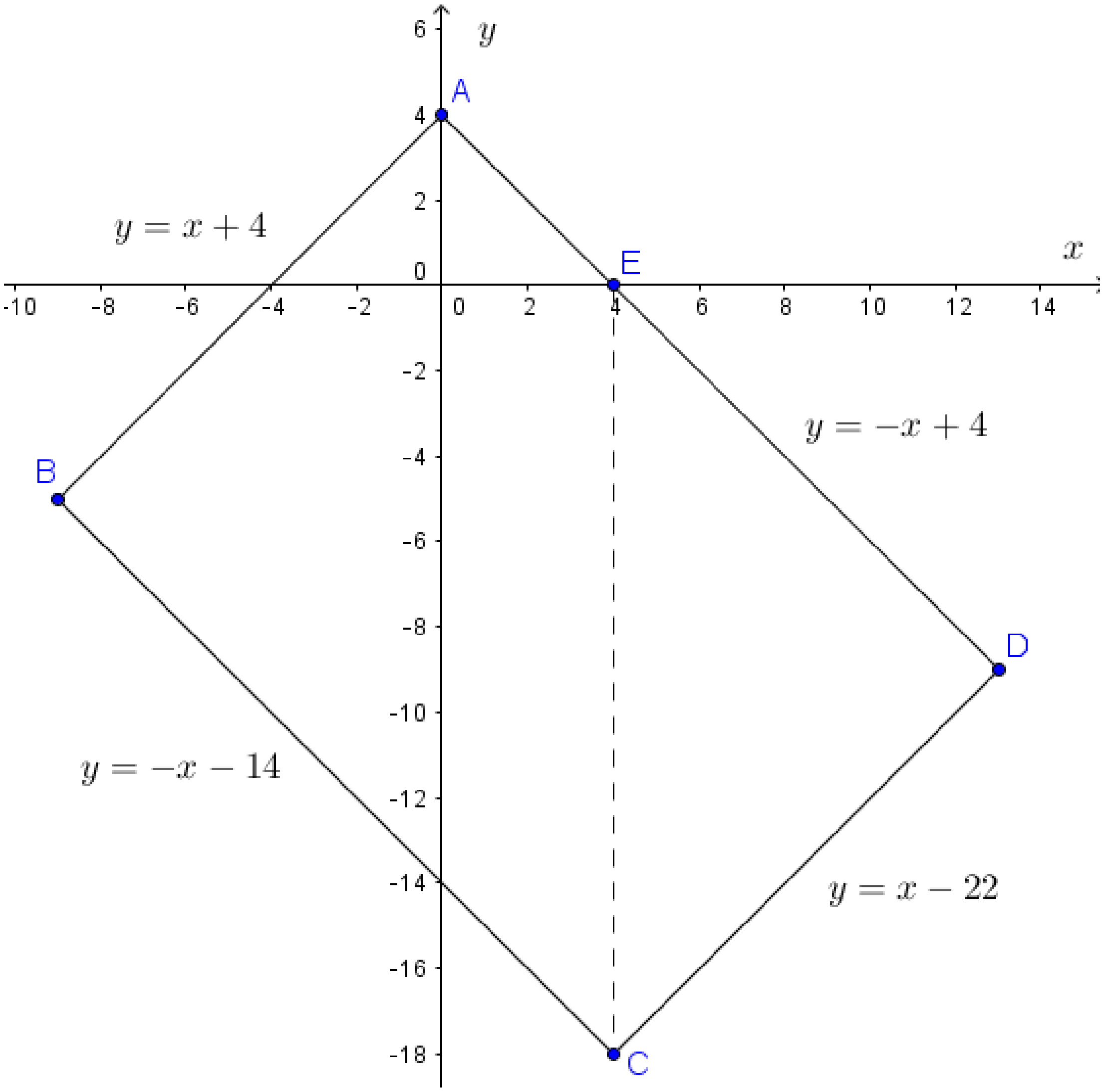
$$3\pi^2 - 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\pi = 2\pi^2 > 0.$$

Нам теперь осталось найти значения переменных, при которых знаменатель не обращается в ноль и аркфункции вычислимы. ОДЗ запишется так:

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{y-x+9}{13} \leq 1, \\ -1 \leq \dfrac{10+2x+2y}{18} \leq 1, \\ x \neq 4, \\ \left|\sqrt{9\sqrt{128}-97}+x\right| + |y+5| \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -22 \leq y-x \leq 4, \\ -14 \leq y+x \leq 4, \\ x \neq 4, \\ (x;y) \neq \left(-\sqrt{72\sqrt{2}-97}; -5\right). \end{cases}$$

Этой системой и задается наша фигура F. Много ли мы сделали? Да, вспомнить D_f и E_f для арксинуса и арккосинуса – дело хорошее. Много ли осталось сделать? Да, самое трудное, как всегда, впереди.

Первые две строки нашей системы задают прямоугольник с вершинами $A(0;4)$, $B(-9;-5)$, $C(4;-18)$ и $D(13;-9)$. Линию $x=4$ рисуем пунктиром – точки, лежащие на этой линии, не являются частью нашей фигуры F.



Мы должны определить хотя бы качественное положение точки M. Понятно, что её абсцисса меньше нуля, надо сравнить её с абсциссой точки B (эти точки лежат на одной прямой $y=-5$).

$$-\sqrt{72\sqrt{2}-97} \vee -9, \qquad \sqrt{72\sqrt{2}-97} \wedge 9, \qquad 72\sqrt{2} \wedge 178, \qquad 72^2 \cdot 2 < 2^2 \cdot 89^2,$$

$$-\sqrt{72\sqrt{2}-97} > -9.$$

Отметим для себя, что точка M находится где-то между точкой $B(-9;-5)$ и точкой $(0;-5)$. Фигура F построена и изображена на рисунке (без "выколотой" точки M).

Как говорится, самое время перечитать условие задачи и вспомнить, что от нас требуется.

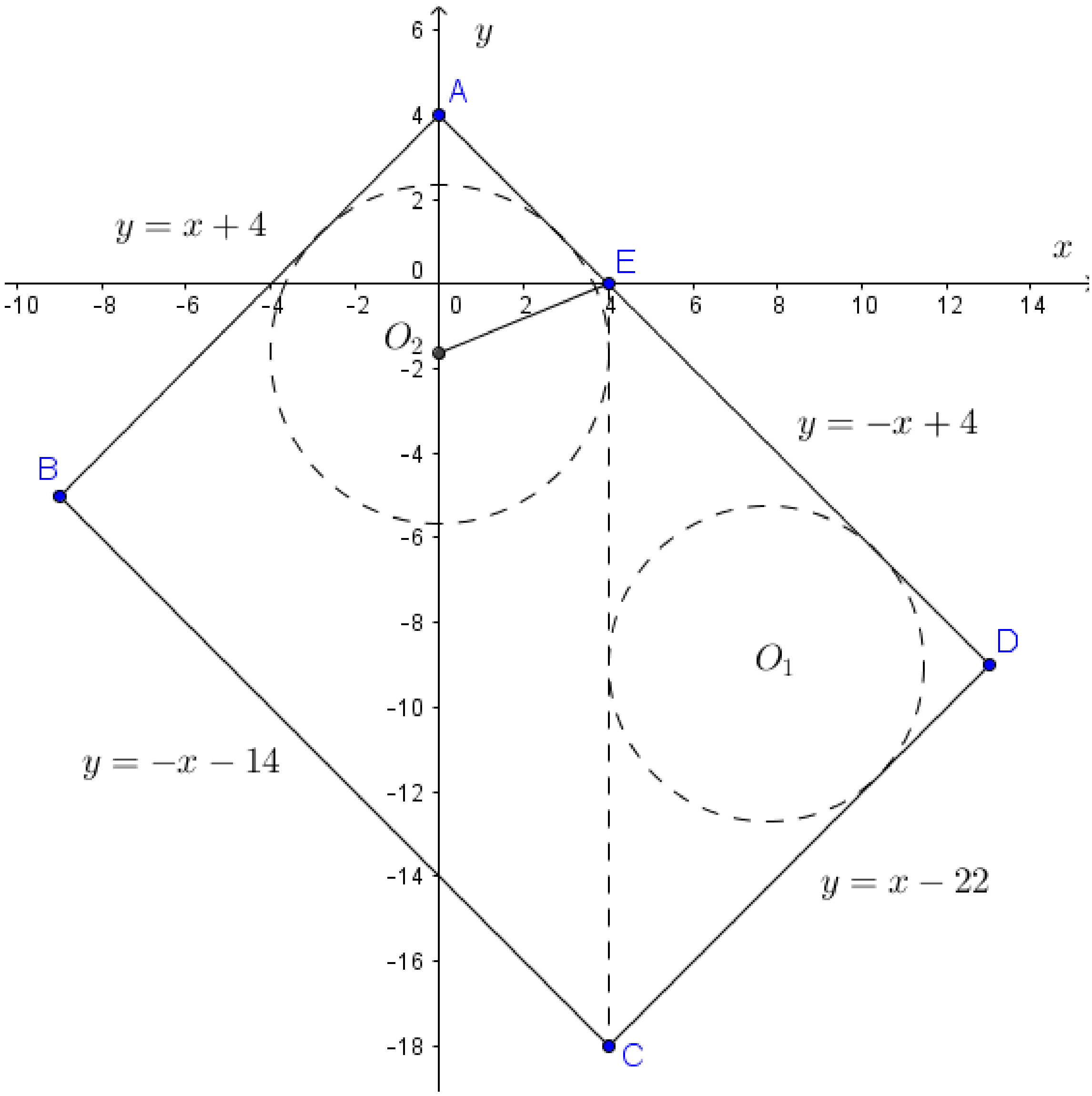
Дело ясное, что нас интересуют круги максимально возможной площади или, что то же самое, окружности максимально возможного радиуса. Проще и приятнее находить радиусы окружностей, вписанных в треугольники.

Прямоугольный равнобедренный треугольник с вершинами в точках (0;4), (–9;–5) и (0;–14) равен треугольнику *CDE*, но в первом еще есть запрещенная точка *M*, поэтому перспективнее искать и находить радиус окружности, вписанной в треугольник *CDE*.

$$CD = DE = \sqrt{(13-4)^2 + \left(-18-(-9)\right)^2} = 9\sqrt{2}.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\left(18+9\sqrt{2}+9\sqrt{2}\right)} = \frac{9}{1+\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}-9.$$

Хорошо, теперь попробуем найти радиус окружности, которая касалась бы *AB*, *AE*, и *CE*. К счастью, это проще, чем кажется: ось ординат – биссектриса угла *BAD*, проведем биссектрису угла *AEC* до пересечения с осью ординат, полученная точка с одной стороны будет равноудалена от *AB* и *AE*, а с другой – равноудалена от *AE* и *CE*.



Угол *AEC* равен 135°, его половина, угол AEO_2 равен 67,5°, а угол AO_2E равен 180–45––67,5=67,5°. Значит

$$AO_2 = AE = 4\sqrt{2}.$$

Подставляем координаты точки M в уравнение окружности O_2 и смотрим, что получается:

$$(x-0)^2 + \left(y - \left(4 - 4\sqrt{2}\right)\right)^2 = 16,$$

$$\left(-\sqrt{72\sqrt{2}-97}\right)^2 + \left(-5-4+4\sqrt{2}\right)^2 = 72\sqrt{2} - 97 + 81 - 72\sqrt{2} + 32 = 16.$$

Я почему-то ничуть не удивлен (но это не точно). Да, точка M находится на самой окружности O_2.

Остается исследовать область, находящуюся где-то недалеко от угла BCE. Как провести исследование максимально безболезненно? Никто или вернее мало кто любит массивную алгебру, поэтому пока попытаемся не думать о какой-то системе уравнений расстояний от O_3 до M, до прямых BC и CE, а потом искать максимумы этих расстояний...

Также попытаемся не думать о том, что M может и не лежит на биссектрисе угла BCE и не получится сказать "а давайте поместим M в середину равнобедренного треугольника и попытаемся найти вписанную в него окружность"... Вернуться к этим страшным штукам мы всегда успеем.

А можно ли вписать где-то в области угла BCE окружность радиуса больше четырех? Для начала попробуем вписать окружность радиуса четыре. Абсцисса точки O_3, в таком случае, находится сразу – это ноль, потому что от прямой $x = 4$ на расстоянии 4 отстоит ось Oy. Дальше надо записать формулу расстояния от точки $O_3(0;\, b)$ до прямой $x+y+14=0$.

$$\rho\left(O_3(0;b), (x+y+14=0)\right) = \frac{|b+14|}{\sqrt{2}} = 4, \qquad b = -14 + 4\sqrt{2}.$$

Второе значение b мы даже не пишем, потому что оно будет вне нашей фигуры F. Проверяем, где теперь точка M относительно третьей окружности:

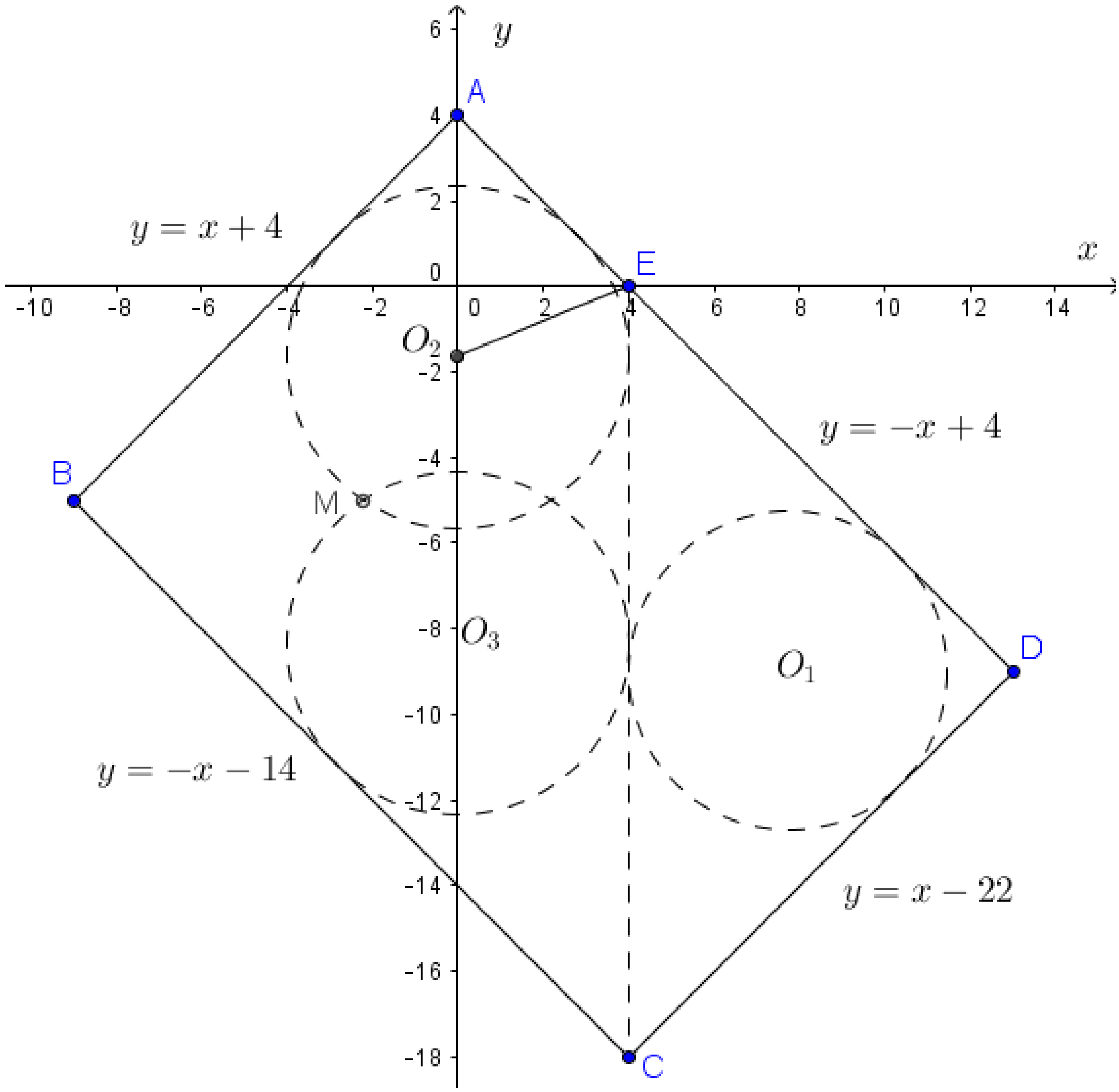
$$(x-0)^2 + \left(y - \left(-14 + 4\sqrt{2}\right)\right)^2 = 16,$$
$$\left(-\sqrt{72\sqrt{2}-97}\right)^2 + \left(-5+14-4\sqrt{2}\right)^2 = 72\sqrt{2} - 97 + 81 - 72\sqrt{2} + 32 = 16.$$

Вот теперь я совершенно не удивлен. Итак, остается теперь только сравнить два числа:

$$9\sqrt{2} - 9 \vee 4, \qquad 9\sqrt{2} \vee 13, \qquad 162 < 169.$$

Окончательно, площади кругов, находящихся в пределах F, могут меняться от нуля до 16π не включительно.

Ответ: $(0;16\pi)$.



Благодарю за внимание!