1. Основы тригонометрии

Числовая окружность

Отметьте на числовой окружности все точки, соответствующие заданной формуле. Одно задание — один чертеж.

1.1. $t = 2\pi k$.
1.2. $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
1.3. $t = \pi k$.
1.4. $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
1.5. $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.
1.6. $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.
1.7. $t = \frac{2\pi k}{3}$.
1.8. $t = \frac{\pi k}{3}$.
1.9. $t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$.
1.10. $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.
1.11. $t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$.
1.12. $t = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.

Точки со знаменателем «4»

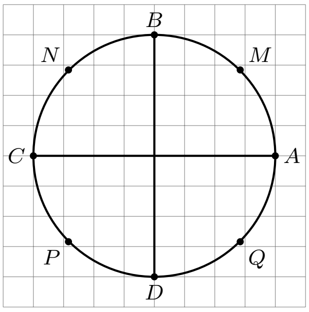


Рис. 1

Точки со знаменателями «3» и «6»

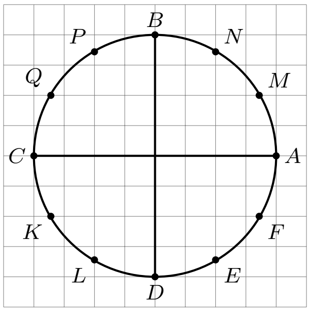


Рис. 2

Числовая окружность разделена точками на восемь равных частей (рис. 1). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

1.13. а) M, N, P, Q; б) A, B, C, D; в) N, Q; г) M, P; д) B, D; е) A, M, B, N, C, P, D, Q.

Числовая окружность разделена точками на 12 равных частей (рис. 2). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

1.14. а) M, K; б) P, E; в) P, L; г) M, F.

1.15. а) A, P, L; б) B, F, K; в) F, M, Q, K; г) A, N, P, C, L, E.

Отметьте на числовой окружности все точки, соответствующие заданным формулам. Составьте общую формулу для всех чисел, которым соответствуют найденные точки.

1.16. $t = 2\pi k, t = \pi + 2\pi k$.
1.17. $t = \pi k, t = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
1.18. $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.
1.19. $t = \pi k, t = \frac{\pi k}{2}$.
1.20. $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, t = \frac{\pi k}{3}$.
1.21. $t = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$.
1.22. $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, t = 2\pi k$.
1.23. $t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$.
1.24. $t = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1), t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5}$.
1.25. $t = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k, t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k, t = \pi k$.
1.26. $t = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t = \pi k$.
1.27. $t = -\frac{\pi}{4} + \pi k, t = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$.
1.28. $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Табличные значения тригонометрических функций

Вычислите.

1.29. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.
1.30. $2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.
1.31. $2\sin\pi + 3\cos\pi + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.
1.32. $2\operatorname{tg}0 + 8\cos\frac{3\pi}{2} - 6\sin\frac{2\pi}{3}$.

Найдите значение выражения при данном значении α.

1.33. $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{5\cos(3\pi+\alpha)}, \alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

1.34. $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(-\pi-\alpha)}, \alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

1.35. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}, \alpha=-\dfrac{4\pi}{3}$.

1.36. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}, \alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

1.37. $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(3\pi-\alpha)}, \alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

1.38. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(-3\pi+\alpha)}, \alpha=\dfrac{4\pi}{3}$.

1.39. $\dfrac{\cos(4\pi+\alpha)}{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}, \alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

1.40. $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{7\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}, \alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

1.41. $\dfrac{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}, \alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

1.42. $\dfrac{2\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}, \alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

Докажите равенство.

1.43. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

1.44. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{2\cos\frac{11\pi}{6}+2\sin^2\frac{11\pi}{4}}=\sqrt{3}-1$.

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций.

1.45. $\sin x=\dfrac{4}{5}, \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$.

1.46. $\cos x=\dfrac{5}{13}, \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

1.47. $\cos x=\dfrac{24}{25}, \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<0$.

1.48. $\sin x=-0{,}6, \quad -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$.

1.49. $\operatorname{tg} x=-\dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$.

1.50. $\operatorname{tg} x=\dfrac{9}{40}, \quad \pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

1.51. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{7}{24}, \quad 2\pi<x<\dfrac{5\pi}{2}$.

1.52. $\operatorname{ctg} t=-\dfrac{5}{12}, \quad \dfrac{7\pi}{2}<x<4\pi$.

Ответы

1.13. а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **1.13. б)** $\frac{\pi k}{2}$ **1.13. в)** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ **1.13. г)** $\frac{\pi}{4}+\pi k$ **1.13. д)** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ **1.13. е)** $\frac{\pi k}{4}$ **1.14. а)** $\frac{\pi}{6}+\pi k$ **1.14. б)** $\frac{2\pi}{3}+\pi k$ **1.14. в)** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **1.14. г)** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$ **1.15. а)** $\frac{2\pi k}{3}$ **1.15. б)** $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}$ **1.15. в)** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **1.15. г)** $\frac{\pi k}{3}$ **1.16.** πk **1.17.** $\frac{\pi k}{2}$ **1.18.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ **1.19.** $\frac{\pi k}{2}$ **1.20.** $\frac{\pi k}{3}$ **1.21.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **1.22.** $\frac{2\pi k}{3}$ **1.23.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **1.24.** $\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}$ **1.25.** $\frac{\pi k}{3}$ **1.26.** $\frac{\pi k}{4}$ **1.27.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$ **1.28.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ **1.29.** $1{,}5$ **1.30.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ **1.31.** -3 **1.32.** $-3\sqrt{3}$ **1.33.** $-0{,}4$ **1.34.** $-1{,}5$ **1.35.** -1 **1.36.** $0{,}5$ **1.37.** $1/3$ **1.38.** 2 **1.39.** $-0{,}5$ **1.40.** $-2/7$ **1.41.** -2 **1.42.** 2 **1.45.** $\cos x=-\frac{3}{5}, \operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}$ **1.46.** $\sin x=\frac{12}{13}, \operatorname{tg} x=\frac{12}{5}$ **1.47.** $\sin x=-\frac{7}{25}, \operatorname{tg} x=-\frac{7}{24}$ **1.48.** $\cos x=-0{,}8, \operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$ **1.49.** $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$ **1.50.** $\sin x=-\frac{9}{41}, \cos x=-\frac{40}{41}$ **1.51.** $\sin x=\frac{24}{25}, \cos x=\frac{7}{25}$ **1.52.** $\sin x=-\frac{12}{13}, \cos x=\frac{5}{13}$

2. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x=a$.
При $|a|>1$ решений нет.
При $-1\leqslant a\leqslant 1$ решение в общем случае имеет вид

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k.$$

То же самое можно записать в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+2\pi k, \\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k. \end{array}\right.$$

Отдельно нужно отметить случаи:

1) $\sin x=1, \quad x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$.
2) $\sin x=0, \quad x=\pi k$.
3) $\sin x=-1, \quad x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$.

$\cos x=a$.
При $|a|>1$ решений нет.
При $-1\leqslant a\leqslant 1$ решение в общем случае имеет вид

$$x=\pm\arccos a+2\pi k.$$

Отдельно нужно отметить случаи:

1) $\cos x=1, \quad x=2\pi k$.
2) $\cos x=0, \quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.
3) $\cos x=-1, \quad x=\pi+2\pi k$.

$\operatorname{tg} x=a$.
При любом a решение $x=\operatorname{arctg} a+\pi k$.
$\operatorname{ctg} x=a$.
При любом a решение $x=\operatorname{arcctg} a+\pi k$.

Решите уравнения.

2.1. $(2\sin x+1)(2\cos x-3)=0$.

2.2. $(2\sin x-1)(2\cos x+4)=0$.

2.3. $(3\sin y-4)\left(\sqrt{2}\cos y-1\right)=0$.

2.4. $(7\sin x+9)\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)=0$.

2.5. $(3\cos x+2)\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right)=0$.

2.6. $(5\cos y-1)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} y+1\right)=0$.

2.7. $(3\sin x-2)(2\sin x-3)=0$.

2.8. $(5\sin x+4)(4\sin x+5)=0$.

2.9. $(2\sin x-1)\left(3\operatorname{ctg}^2-1\right)=0$.

2.10. $(3\operatorname{tg}^2-1)\left(2\cos^2 x-1\right)=0$.

Ответы

2.1. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$ **2.2.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ **2.3.** $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ **2.4.** $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ **2.5.** $\frac{\pi}{3}+\pi k, \pm\arccos\left(-2/3\right)+2\pi k$ **2.6.** $-\frac{\pi}{6}+\pi k, \pm\arccos\left(1/5\right)+2\pi k$ **2.7.** $(-1)^k\arcsin\left(2/3\right)+\pi k$ **2.8.** $(-1)^{k+1}\arcsin\left(4/5\right)+\pi k$ **2.9.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **2.10.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

3. Методы решения тригонометрических уравнений

1) Разложение уравнения на множители.

$$2\sin x\cos 3x=\sin x,$$
$$2\sin x\cos 3x-\sin x=0,$$
$$\sin x(2\cos 3x-1)=0,$$

$\sin x=0$, или $2\cos 3x-1=0$;

$x=\pi k$, $\cos 3x=1/2$;

$$3x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;$$
$$x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}.$$

2) Введение вспомогательной переменной.

Пример:

$$4\sin^2 3x-13\sin 3x+3=0.$$

Пусть $t=\sin 3x$, тогда уравнение примет вид:

$$4t^2-13t+3=0,$$

$t_1=1/4$, $t_2=3$;

$\sin 3x=1/4$, $\sin 3x=3$;

$3x=(-1)^k\arcsin 1/4+\pi k$, решений нет;

$$x=\frac{1}{3}\cdot(-1)^k\arcsin 1/4+\frac{\pi k}{3}.$$

3) Решение однородного уравнения.

Однородное уравнение первой степени:

$$a\sin x+b\cos x=0.$$

Однородное уравнение второй степени:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

Обратите внимание, при $a\neq 0$ в однородных уравнениях $\cos x\neq 0$.

Для дальнейшего решения нужно первое уравнение разделить на $\cos x$, второе — на $\cos^2 x$.

Пример:

$$\sin^2 2x+2\sin 2x\cos 2x-3\cos^2 2x=0.$$

Заметим, что $\cos 2x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 2x$:

$$\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}+\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x}-\frac{3\cos^2 2x}{\cos^2 2x}=0,$$
$$\operatorname{tg}^2 2x+2\operatorname{tg} 2x-3=0.$$

Пусть $t=\operatorname{tg} 2x$, получим:

$$t^2+2t-3=0,$$

$t_1=1$, $t_2=-3$;

$\operatorname{tg} 2x=1$, $\operatorname{tg} 2x=-3$;

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $2x=\operatorname{arctg}(-3)+\pi k$;

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x=-\frac{\operatorname{arctg} 3}{2}+\frac{\pi k}{2}$.

Для решения уравнений данного параграфа достаточно пользоваться следующими формулами:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\qquad \frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ $\qquad \frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x$

Решите уравнения.

3.1. $2\sin^2 5x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

3.2. $\sqrt{2}\cos^2 7x-\cos 7x=0$.

3.3. $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

3.4. $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

3.5. $4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x=3$.

3.6. $2\sin x\cos x+\sqrt{3}=2\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

3.7. $\sin^4 x=1-\cos^4 x$.

3.8. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x$.

3.9. $2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

3.10. $2\sin x+\operatorname{tg} x=0$.

3.11. $\sqrt{3}\sin x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\sin x-\sqrt{3}=0$.

3.12. $2\operatorname{tg} x\cos x+1=2\cos x+\operatorname{tg} x$.

3.13. $\operatorname{tg}^2 3x-2\sin^2 3x=0$.

3.14. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=2+\operatorname{tg} x$.

3.15. $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$

3.16. $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

3.17. $\sin 2x + \cos^2 2x = \frac{1}{2}$.

3.18. $\cos x = 2\sin^2 x + 1$.

3.19. $\sin 3x = 2\operatorname{tg}^2 3x$.

3.20. $2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1 = 0$.

3.21. $2\sin x \operatorname{tg} x + 1 = \cos x$.

3.22. $2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{ctg} 3x = \dfrac{2}{\cos 3x}$.

3.23. $\cos^4 \frac{x}{10} + \sin^2 \frac{x}{10} = 1$.

3.24. $2\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{ctg} 2x - 3 = 0$.

3.25. $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$.

3.26. $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.

3.27. $\cos 3x + \sin 3x = 0$.

3.28. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$.

3.29. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

3.30. $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$.

3.31. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x + 2 = 0$.

3.32. $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 1$.

3.33. $1 + \cos 4x\sin 4x = \cos^2 4x$.

3.34. $6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 3$.

3.35. $2\sin x + 4\cos x = \dfrac{1}{\sin x}$.

3.36. $-3\cos x + 3\sin x = \dfrac{1}{\sin x}$.

3.37. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 4x} - 4\operatorname{tg} 4x = 0$.

3.38. $\dfrac{1}{\sin^2 3x} - \operatorname{ctg} 3x = 3$.

3.39. $\dfrac{\cos^2 x(1 + \operatorname{ctg} x) - 3}{\sin x - \cos x} = 3\cos x$.

3.40. $\sin^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

Ответы

3.1. $\frac{\pi k}{5}, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$ **3.2.** $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, \pm\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$ **3.3.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi k$ **3.4.** $\pi + 2\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ **3.5.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ **3.6.** $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ **3.7.** $\frac{\pi k}{2}$ **3.8.** $2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ **3.9.** $\pi + 2\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ **3.10.** $\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ **3.11.** $-\frac{\pi}{3} + \pi k$ **3.12.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k$ **3.13.** $\frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$ **3.14.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ **3.15.** $\pm\arccos\frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi k$ **3.16.** $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, (-1)^k\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$ **3.17.** $\frac{(-1)^{k+1}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\pi k}{2}$ **3.18.** $2\pi k$ **3.19.** $\frac{\pi k}{3}, \frac{(-1)^k}{3}\arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{\pi k}{3}$ **3.20.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, (-1)^k\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ **3.21.** $2\pi k, \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$ **3.22.** $\frac{(-1)^{k+1}}{3}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{\pi k}{3}$ **3.23.** $5\pi k$ **3.24.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}, -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$ **3.25.** $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ **3.26.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ **3.27.** $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$ **3.28.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$ **3.29.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k, -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$ **3.30.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg}(-3) + \pi k$ **3.31.** $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$ **3.32.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k$ **3.33.** $\frac{\pi k}{4}, -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$ **3.34.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi k$ **3.35.** $-\operatorname{arctg}\left(2 + \sqrt{5}\right) + \pi k, \operatorname{arctg}\left(\sqrt{5} - 2\right) + \pi k$ **3.36.** $\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{4} + \pi k$ **3.37.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$ **3.38.** $\frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 2 + \frac{\pi k}{3}, -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$ **3.39.** $\frac{3\pi}{4} + \pi k, \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ **3.40.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

4. Формулы двойного и половинного угла

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad = 2\cos^2 x - 1 \qquad = 1 - 2\sin^2 x.$$

4.1. *Синус половинного угла.* Выразите $\sin^2 x$ через $\cos 2x$, воспользовавшись формулой косинуса двойного угла.

4.2. *Косинус половинного угла.* Выразите $\cos^2 x$ через $\cos 2x$, воспользовавшись формулой косинуса двойного угла.

4.3. *Тангенс двойного угла.* Докажите равенство $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, воспользовавшись определением тангенса.

4.4. *Тангенс половинного угла.* Докажите равенство $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.

Найдите значение выражения.

4.5. $\sqrt{3}\cos^2\dfrac{5\pi}{12} - \sqrt{3}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$.

4.6. $\sqrt{27}\cos^2\dfrac{13\pi}{12} - \sqrt{27}\sin^2\dfrac{13\pi}{12}$.

4.7. $\sqrt{8} - \sqrt{32}\sin^2\dfrac{11\pi}{8}$.

4.8. $\sqrt{75} - \sqrt{300}\sin^2\dfrac{13\pi}{12}$.

4.9. $\sqrt{12}\cos^2\dfrac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$.

4.10. $\sqrt{72}\cos^2\dfrac{15\pi}{8} - \sqrt{18}$.

4.11. $11\sin\dfrac{5\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

4.12. $12\sqrt{2}\sin\dfrac{13\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{13\pi}{8}$.

4.13. $\dfrac{13\left(\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ\right)}{2\cos 60^\circ}$.

4.14. $\dfrac{14\left(\cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ\right)}{\cos 4^\circ}$.

4.15. $\dfrac{15\left(\cos^2 78^\circ - \sin^2 78^\circ\right)}{3\cos 156^\circ}$.

4.16. $\dfrac{16\left(\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ\right)}{5\cos 24^\circ}$.

4.17. $\dfrac{17\sin 38^\circ\cdot\cos 38^\circ}{\sin 76^\circ}$.

4.18. $\dfrac{18\cos 67^\circ\cdot\sin 67^\circ}{\sin 134^\circ}$.

4.19. $\dfrac{19\sin 22{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ}{\cos 45^\circ}$.

4.20. $\dfrac{20\sin 67{,}5^\circ\cdot\cos 67{,}5^\circ}{\cos 135^\circ}$.

4.21. Найдите $9\cos 2x$, если $\cos x=\dfrac{1}{3}$.

4.22. Найдите $\cos 2x$, если $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

4.23. Найдите $\sqrt{6}\sin 2x$, если $\cos x=-\dfrac{1}{5}$, $\quad \pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

4.24. Найдите $9\sin 2x$, если $\sin x=\dfrac{2}{3}$, $\quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$.

4.25. Найдите $\operatorname{tg} 2x$, если $\sin x=\dfrac{5}{6}$, $\quad 2\pi<x<\dfrac{5\pi}{2}$.

4.26. Найдите $\operatorname{tg} 2x$, если $\cos x=\dfrac{5}{8}$, $\quad \dfrac{3\pi}{4}<x<2\pi$.

Решите уравнения.

4.27. $1+\cos x+\cos 2x=0$.

4.28. $\cos 2x+3\sin x=2$.

4.29. $2\operatorname{tg} x=1-\cos 2x$.

4.30. $4\cos^2 x=\operatorname{ctg} x$.

4.31. $\cos x+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=1$.

4.32. $\sin 2x-\operatorname{tg} x=0$.

4.33. $\operatorname{tg}^2 x=4\sin^2 2x$.

4.34. $\operatorname{tg} 2x+2\cos 4x=2$.

4.35. $\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=1$.

4.36. $1-\cos 2x-4\sin^3 x=0$.

4.37. $\sin 2x-\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin x-\cos x$.

4.38. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$.

4.39. $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$.

4.40. $\dfrac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0$.

4.41. $1-\sin 2x=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

4.42. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$.

4.43. $\operatorname{tg} x+\sin 2x=2$.

4.44. $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x$.

4.45. $\sin x\operatorname{tg} x+\cos x\operatorname{ctg} x=\sin x+\cos x$.

4.46. $\operatorname{tg} 2x-4\sin x\cos x+1=4\sin^2 x$.

4.47. $\dfrac{7}{4}\cos\dfrac{x}{4}=\cos^3\dfrac{x}{4}+\sin\dfrac{x}{2}$.

4.48. $\cos^2 x\sin 6x+2\sin^2 x\sin 3x\cos 3x+$
$+\left(\dfrac{\cos^2 x}{\cos 3x}-\sin^2 x\right)\sin 6x=0$.

4.49. $4\sin x+\cos 2x+5=0$.

4.50. $3\sin\dfrac{x}{2}=\cos x+1$.

4.51. $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\dfrac{x}{2}$.

4.52. $3\cos 2x+5\sin^2 x=3\sin^2\dfrac{x}{2}$.

4.53. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=\frac{4}{3}\sin 2x$.

4.54. $\dfrac{3\cos^2 x}{\sin x}-4\sin 2x=3\operatorname{ctg} x$.

4.55. $\sin 4x+2\operatorname{ctg} 2x(1+\cos 2x)=0$.

4.56. $\cos 4x+2\sin^2 x=0$.

4.57. $\dfrac{2\cos 4x-8\cos 2x+5}{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 4x-2}=0$.

4.58. $\dfrac{\cos 4x+\sqrt{2}\cos 2x-1}{\sqrt{2}\sin 2x-\cos 4x-1}=0$.

4.59. $\dfrac{\cos 2x+\cos x}{\sin 2x-\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} 2x$.

4.60. $\dfrac{\cos 4x-5\cos 2x+2\cos x-3}{2\cos x-1}=1$.

4.61. $\sin 2x+\sin^2 x=3\cos^2 x$

4.62. $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin 2x$.

4.63. $2\sin 4x-3\sin^2 2x=1$.

4.64. $\sin 2x+\sin^2 x=\frac{1}{2}$

4.65. $\sin x+3\cos x=1$.

4.66. $3\sin 3x-4\cos 3x=5$.

4.67. $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$.

4.68. $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

4.69. $\sin^2 x-\cos^2 2x=0$.

4.70. $4\cos^2 x-2\cos 2x=1+\sin 2x$.

4.71. $1-\sin 2x-4(\sin x-\cos x)=5$.

4.72. $4+\sin 4x=4(\sin 2x+\cos 2x)$.

4.73. $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

4.74. $1+\cos 2x=\operatorname{tg}^2 x$.

4.75. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=0$.

4.76. $\operatorname{tg} 2x+6\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=6$.

4.77. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x=4\sqrt{3}$.

4.78. $3\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x+4\sin 2x=0$.

Ответы

4.1. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ **4.2.** $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ **4.5.** $-1{,}5$ **4.6.** $4{,}5$ **4.7.** -2 **4.8.** $7{,}5$ **4.9.** $-1{,}5$ **4.10.** 3 **4.11.** $2{,}75$ **4.12.** -6 **4.13.** $-6{,}5$ **4.14.** 14 **4.15.** 5 **4.16.** $-3{,}2$ **4.17.** $8{,}5$ **4.18.** 9 **4.19.** $9{,}5$ **4.20.** -10 **4.21.** -7 **4.22.** $\frac{3}{8}$ **4.23.** $\frac{24}{25}$ **4.24.** $-4\sqrt{5}$ **4.25.** $-\frac{5\sqrt{11}}{7}$ **4.26.** $\frac{5\sqrt{39}}{7}$ **4.27.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.28.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.29.** πk **4.30.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ **4.31.** $2\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi k$ **4.32.** $\pi k, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **4.33.** $\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **4.34.** $\frac{\pi k}{2}, (-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$ **4.35.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.36.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \pi k$ **4.37.** $\operatorname{arctg} 2+\pi k, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.38.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.39.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.40.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.41.** $\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.42.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k, \pi k$ **4.43.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.44.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k, 2\pi k$ **4.45.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **4.46.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.47.** $2\pi+4\pi k, (-1)^k\frac{2\pi}{3}+4\pi k$ **4.48.** $\frac{\pi k}{3}$ **4.49.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **4.50.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$ **4.51.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.52.** $\pi+2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.53.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **4.54.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ **4.55.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **4.56.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.57.** $-\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.58.** $-\frac{\pi}{8}+\pi k$ **4.59.** $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$ **4.60.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **4.61.** $\frac{\pi}{4}+\pi k, -\operatorname{arctg} 3+\pi k$ **4.62.** $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ **4.63.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$ **4.64.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$ **4.65.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$ **4.66.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg} 3+\frac{2\pi k}{3}$ **4.67.** $(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$ **4.68.** $(-1)^k\frac{\pi}{16}+\pi k$ **4.69.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **4.70.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.71.** $2\pi k, -\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **4.72.** $\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k$ **4.73.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **4.74.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **4.75.** $\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ **4.76.** $\pi k, -\operatorname{arctg}\frac{7}{6}+\pi k$ **4.77.** $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$ **4.78.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$

5. Формулы приведения

Любую тригонометрическую функцию, аргументом которой является выражение вида $t+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$, можно привести к виду, когда качестве аргумента будет выступать только t. Для данных преобразований используются формулы приведения.
С помощью приведенной ниже схемы можно не запоминать каждую формулу отдельно, а выполнять нужные преобразования, пользуясь тригонометрическим кругом.
Разберем схему на примере преобразования выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$.

1. Отметьте на окружности произвольную точку t. Удобнее всего взять ее в районе точки $\frac{\pi}{6}$.
2. Выделите жирным $\sin t$ и $\cos t$ на соответствующих осях. Значение одной функции должно получиться больше другой.
3. Отметьте на окружности точку, соответсующую аргументу преобразовываемой функции. В данном случае это $\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$.
4. Отметьте на соответствующей оси значение искомой функции. Мы отметим $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$.
5. Сопоставьте значение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$ и выделенные ранее $\sin t$ и $\cos t$. В данном случае видно, что абсолютное значение (длина выделенного отрезка) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$ равно $\cos t$. Записываем $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\cos t$.
6. Проверяем знак. Поскольку $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)<0$, а $\cos t>0$, приведенном выше равенстве не хватает знака «минус». Итого:
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t.$$

Замените тригонометрической функцией от t.

5.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$.
5.2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$.
5.3. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+t\right)$.
5.4. $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+t\right)$.
5.5. $\sin(\pi-t)$.
5.6. $\cos(\pi+t)$.
5.7. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$.
5.8. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$.
5.9. $\sin(360^\circ-t)$.
5.10. $\cos(-180-t)$.
5.11. $\sin(450^\circ+t)$.
5.12. $\cos(-270^\circ-t)$.

Найдите значение выражения.

5.13. $\dfrac{11\sin 3^\circ}{\cos 87^\circ}$.
5.14. $\dfrac{12\cos 73^\circ}{\sin 17^\circ}$.
5.15. $\dfrac{13\cos 131^\circ}{\sin 41^\circ}$.
5.16. $\dfrac{14\sin 117^\circ}{\cos 27^\circ}$.
5.17. $\dfrac{15\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ}$.
5.18. $\dfrac{40\sin 150^\circ}{\cos 60^\circ}$.
5.19. $\dfrac{17\sin(-21^\circ)}{\sin 159^\circ}$.
5.20. $\dfrac{18\sin 49^\circ}{\sin 409^\circ}$.
5.21. $\dfrac{19\cos 103^\circ}{\cos 463^\circ}$.
5.22. $\dfrac{20\sin 208^\circ}{\cos 62^\circ}$.
5.23. $\dfrac{12}{\sin^2 27^\circ+\sin^2 117^\circ}$.
5.24. $\dfrac{15}{\sin^2 34^\circ+\sin^2 124^\circ}$.
5.25. $\dfrac{\cos^2 27^\circ+\sin^2 153^\circ}{5}$.
5.26. $\dfrac{\cos^2 45^\circ-\cos^2 135^\circ}{8}$.
5.27. $\dfrac{\sin^2 270^\circ+\cos^2 60^\circ}{5}$.
5.28. $\dfrac{\sin^2 59^\circ+\cos^2 121^\circ}{2}$.
5.29. $5\operatorname{tg}33^\circ\cdot\operatorname{tg}417^\circ$.
5.30. $3\operatorname{tg}208^\circ\cdot\operatorname{tg}62^\circ$.

Решите уравнение.

5.31. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sqrt{5}\cos(x-\pi)=0$.
5.32. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0$.
5.33. $\sin\left(\frac{360^\circ-x}{2}\right)+1=\sin(90^\circ+x)$.
5.34. $2-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.
5.35. $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1+\sqrt{2}+\cos(\pi+2x)$.
5.36. $6\sin^2(3\pi-x)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-3=0$.
5.37. $\sin^2\left(6x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin^2(3x-\pi)-1=0$.
5.38. $\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(4\pi-x)=\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$.
5.39. $\sin(-5x)\cos 5x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
5.40. $\sin(-6x)\cos(6x)=\frac{1}{4}$.

Ответы

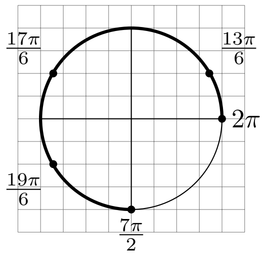
5.1. $\cos t$ **5.2.** $-\sin t$ **5.3.** $-\sin t$ **5.4.** $-\cos t$ **5.5.** $\sin t$ **5.6.** $-\cos t$ **5.7.** $\operatorname{ctg} t$ **5.8.** $-\operatorname{ctg} t$ **5.9.** $-\sin t$ **5.10.** $-\cos t$ **5.11.** $\cos t$ **5.12.** $\sin t$ **5.13.** 11 **5.14.** 12 **5.15.** −13 **5.16.** 14 **5.17.** −15 **5.18.** 40 **5.19.** −17 **5.20.** 18 **5.21.** 19 **5.22.** −20 **5.23.** 12 **5.24.** 15 **5.25.** 0,2 **5.26.** 0 **5.27.** 0,25 **5.28.** 0,5 **5.29.** 5 **5.30.** −3 **5.31.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ **5.32.** $\pi k, \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ **5.33.** $2\pi k, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k$ **5.34.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **5.35.** $\pm\frac{\pi}{8}+\pi k$ **5.36.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **5.37.** $\frac{\pi k}{9}$ **5.38.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k, \pi+2\pi k$ **5.39.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{40}+\frac{\pi k}{10}$ **5.40.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{72}+\frac{\pi k}{12}$

6. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Приведем пример отбора корней из серии $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$ на отрезке $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

1. Аналитически. Для удобства будем рассматривать отдельно серии $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$ и $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$. Для каждой из них решим двойное неравенство:
$$2\pi\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi k\leqslant\frac{7\pi}{2},$$
$$\frac{11\pi}{6}\leqslant\pi k\leqslant\frac{20\pi}{6},$$
$$\frac{11}{6}\leqslant k\leqslant\frac{20}{6}.$$
Поскольку k может принимать только целые значения, получаем, $k\in\{2;3\}$. Данным k соответствуют $x=\frac{13\pi}{6}, x=\frac{19\pi}{6}$.
Решая аналогичное неравенство для серии $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, получим $x=\frac{17\pi}{6}$.

2. Графически.
Выделим на окружности дугу $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.
И отметим точки из серии корней, принадлежащие этой дуге.



Решите уравнение.

6.1. $\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x}=0.$

6.2. $\left(4\cos x-\sqrt{8}\right)\sqrt{-9\sin x}=0.$

6.3. $\left(2\cos^2 x-\cos x\right)\sqrt{-11\operatorname{tg} x}=0.$

6.4. $\left(2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\right)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0.$

6.5. $\left(6\sin^2 x+5\sin x-4\right)\sqrt{-7\cos x}=0.$

6.6. $\dfrac{6\cos^2 x-\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0.$

6.7. $\dfrac{2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0.$

6.8. $\dfrac{2\cos^2 x-2\cos x\cos 2x-1}{\sqrt{\sin x}}=0.$

6.9. $\dfrac{6\sin^3-\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0.$

6.10. $\dfrac{2\cos^3+3\cos^2 x+\cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=0.$

В заданиях ниже решите уравнения под буквой а) и найдите корни, принадлежащие отрезкам, указанным под буквой б).

6.11. а) $\sin x+\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)=0,$
б) $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

6.12. а) $\cos x=\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2-1,$
б) $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

6.13. а) $8\sin^2 x-2\sin x-3=0,$
б) $\left[-\frac{3\pi}{2},0\right]$.

6.14. а) $7\cos^2 x-\cos x-8=0,$
б) $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right]$.

6.15. а) $\dfrac{7}{\sin^2 x}-\dfrac{10}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+3=0,$
б) $\left[-\frac{5\pi}{2};\pi\right]$.

6.16. а) $\dfrac{6}{\cos^2 x}-\dfrac{7}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+1=0,$
б) $[-3\pi;\pi]$.

6.17. а) $\dfrac{5}{\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{19}{\sin x}+17=0,$
б) $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

6.18. а) $5\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{12}{\cos x}+9=0,$
б) $\left[-\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

6.19. а) $\cos 2x+\sin^2 x=0{,}75,$
б) $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

6.20. а) $2\cos^2 x+2\sin 2x=3,$
б) $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$.

6.21. а) $\dfrac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0,$
б) $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

6.22. а) $\dfrac{5\operatorname{tg} x-12}{13\cos x-5}=0,$
б) $\left[4\pi;\frac{11\pi}{2}\right]$.

Ответы

6.1. $\frac{\pi}{2}+\pi k, -\frac{\pi}{3}+2\pi k$ **6.2.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \pi k$ **6.3.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \pi k$ **6.4.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, \pi k$ **6.5.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k$ **6.6.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, -\arccos\frac{2}{3}+2\pi k$ **6.7.** $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k$ **6.8.** $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{3}+2\pi k$ **6.9.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k, \pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$ **6.10.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ **6.11. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ **6.11. б)** $\frac{7\pi}{4}$ **6.12. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ **6.12. б)** $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **6.13. а)** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, (-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$ **6.13. б)** $-\pi-\arcsin\frac{3}{4}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ **6.14. а)** $\pi+2\pi k$ **6.14. б)** -3π **6.15. а)** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **6.15. б)** $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ **6.16. а)** $2\pi k$ **6.16. б)** $-2\pi, 0$ **6.17. а)** $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$ **6.17. б)** $-3\pi-\arcsin\frac{1}{3}$ **6.18. а)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ **6.18. б)** $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ **6.19. а)** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ **6.19. б)** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ **6.20. а)** $\frac{\pi}{4}+\pi k, \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$ **6.20. б)** $-\frac{3\pi}{4}, \operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi$ **6.21. а)** $\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi k$ **6.21. б)** $-3\pi-\arccos\frac{4}{5}$ **6.22. а)** $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}+\pi+2\pi k$ **6.22. б)** $5\pi+\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$