

# 1. Алгебраические неравенства и системы неравенств

Решите неравенства.

- 1.1. а)  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ .  
 б)  $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$ .  
 в)  $3x^2 - 5x - 4 < 0$ .  
 г)  $2x^2 - 3x + 5 > 0$ .  
 д)  $x^2 - 2x + 3 < 0$ .  
 е)  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ .  
 ж)  $x^2 - 7x > 0$ .  
 з)  $x^2 \leq 25$ .  
 и)  $x^2 \geq 36$ .  
 к)  $x^2 > 0$ .
- 1.2. а)  $x^2 - 11x + 30 > 0$ .  
 б)  $-x^2 + x + 1 \geq 0$ .  
 в)  $x^2 \geq 3x - 2$ .  
 г)  $x(3x + 1) < -4$ .  
 д)  $x(x + 2) > 7(x - 1)$ .  
 е)  $x^2 + 2 \leq 1 - 2x$ .  
 ж)  $12x - 9 > 4x^2$ .  
 з)  $x^2 + 5x > 0$ .  
 и)  $x^2 < 9$ .  
 к)  $x^2 \geq 16$ .
- 1.3.  $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4) < 0$ .  
 1.4.  $(x^2 + x - 6)(x^2 - 6x + 8) \geq 0$ .  
 1.5.  $(x + 5)^2(x^2 - 3x - 4) \leq 0$ .  
 1.6.  $(x - 1)^3(x + 2)^2(x - 4)^4 \times (x + 5)^5 \leq 0$ .  
 1.7.  $(x - 3)^2(x - 4)(x + 5) < 0$ .  
 1.8.  $(x + 4)(2x + 1)^2(3 - x) \leq 0$ .  
 1.9.  $\frac{(2x - 3)(5 - x)}{4x} > 0$ .  
 1.10.  $\frac{\sqrt{3}x(x + 3)}{9 - x} < 0$ .  
 1.11.  $\frac{(x + 1)(2x - 7)}{\sqrt{5}(\sqrt{5} - x)} > 0$ .  
 1.12. а)  $\frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3} < 0$ .  
 б)  $(x - 1)(x - 2) < 0$  при  $x \neq 3$ .  
 1.13.  $\frac{(x - 1)^2(x + 2)^3(x + 3)}{(x + 1)^4(x - 5)} \leq 0$ .  
 1.14.  $\frac{(x + 1)^4(x + 4)(x + 5)^3}{(x + 3)^2(3 - x)^5} \leq 0$ .
- 1.15.  $\frac{3x - 15}{x^2 + 5x - 14} \geq 0$ .  
 1.16.  $\frac{3x^2 - 4x - 7}{7 - x} \leq 0$ .  
 1.17.  $\frac{2x^2 + x - 6}{20 + x - x^2} > 0$ .  
 1.18.  $\frac{x^2 - 6x + 9}{5 - 4x - x^2} \geq 0$ .  
 1.19.  $\frac{2x + 3}{x - 1} \leq 1$ .  
 1.20.  $\frac{5x + 4}{2x + 1} \geq 3$ .  
 1.21.  $\frac{4x + 1}{x + 5} \leq 4$ .  
 1.22.  $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} < -2$ .  
 1.23.  $x + 4 < -\frac{2}{x + 1}$ .  
 1.24.  $x + 3 + \frac{10}{x - 4} < 0$ .  
 1.25.  $x - 3 + \frac{4}{x + 1} > 0$ .  
 1.26.  $x + 3 + \frac{4}{x - 1} < 0$ .  
 1.27.  $x - 1 > \frac{4x}{3 - x}$ .  
 1.28.  $2 - x < \frac{x + 4}{x + 1}$ .  
 1.29.  $\frac{1}{2 - x} + \frac{5}{2 + x} < 1$ .  
 1.30.  $\frac{1}{3 - x} + \frac{12}{3 + x} \leq 1$ .  
 1.31.  $\frac{(x - 3)^2}{x + 2} \leq 0$ .  
 1.32.  $\frac{(x + 1)^2}{x - 2} \geq 0$ .  
 1.33.  $\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} + \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$ .  
 1.34.  $\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 2} \leq 0$ .  
 1.35.  $\frac{(x - \log_3 5)(x - \log_2 0,7)}{x} > 0$ .  
 1.36.  $\frac{(x - \log_2 3)(\log_{0,3} 2 - x)}{x} > 0$ .  
 1.37.  $x(1 - \sqrt{2}) \leq 2\sqrt{2} - 2$ .  
 1.38.  $x(\sqrt{3} - 5) \geq 10 - 2\sqrt{3}$ .
- Решите системы неравенств.
- 1.39.  $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0. \end{cases}$
- 1.40.  $\begin{cases} 3x - 1 > 2x + 2, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0, \\ \frac{x - 5}{x - 6} > 0. \end{cases}$
- 1.41.  $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 > 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$
- 1.42.  $\begin{cases} 4x + 1 < 3x + 8, \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ \frac{x + 7}{x - 8} \leq 0. \end{cases}$
- 1.43.  $\begin{cases} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 4)(x + 2)} < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ \frac{x + 4}{x - 2} \geq 0, \\ \frac{x - 2}{x^2 + 3x} \geq 0. \end{cases}$
- 1.44.  $\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 27}{x + 3} > 1, \\ \frac{3x - 9}{x - 7} < 2, \\ x^2 + 10x + 24 \geq 0. \end{cases}$
- 1.45.  $\begin{cases} \frac{x}{x - 6} < 2 - x, \\ (3 - 2\sqrt{3})x \leq 6 - 4\sqrt{3}, \\ x^2 - 3x \leq 10. \end{cases}$
- 1.46.  $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{3} \leq \frac{4}{x}, \\ \frac{1}{x} < 1, \\ x^2 + 3x + 1 > 0. \end{cases}$
- 1.47.  $\begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2 - 8x + 7} \geq \frac{1}{2}, \\ x^2 < 64, \\ x^2 - 17x + 70 \geq 0. \end{cases}$
- 1.48.  $\begin{cases} \frac{5x^2 - 15x - 1}{x^2 - 3x - 10} \geq 1, \\ x^2 \leq 25, \\ x^2 + 7x + 6 > 0. \end{cases}$
- Решите неравенства.
- 1.49. а)  $-3 < 2x - 1 < 3$ .  
 б)  $-12 < 5 - 5x < 17$ .  
 в)  $-1 \leq 5x + 4 \leq 19$ .  
 г)  $2x - 5 < 5x - 3 < 2x + 4$ .  
 д)  $3x + 2 < 4x - 5 < 2x + 13$ .
- 1.50.  $2x - 6 \leq x^2 - 3x < x + 5$ .  
 1.51.  $2x - 3 < 3x^2 - 8x \leq 2(x + 3) - 6$ .

Ответы

- 1.1. а)  $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$  1.1. б)  $[1/2; 2]$  1.1. в)  $\left(\frac{5 - \sqrt{73}}{6}; \frac{5 + \sqrt{73}}{6}\right)$  1.1. г)  $(-\infty; \infty)$  1.1. д) Решений нет 1.1. е)  $3$  1.1. ж)  $(-\infty; 0) \cup (7; \infty)$  1.1. з)  $[-5; 5]$  1.1. и)  $(-\infty; -6] \cup [6; \infty)$  1.1. к)  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$  1.2. а)  $(-\infty; 5) \cup (6; \infty)$  1.2. б)  $\left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$  1.2. в)  $(-\infty; 1] \cup [2; \infty)$  1.2. г) решений нет 1.2. д)  $(-\infty; \infty)$  1.2. е)  $-1$  1.2.

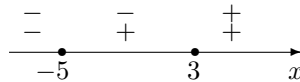
- ж) решений нет **1.2. з)**  $(-\infty; -5) \cup (0; \infty)$  **1.2. и)**  $(-3; 3)$  **1.2. к)**  $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$  **1.3.**  $(-4; 1) \cup (1; 3)$  **1.4.**  $(-\infty; -3] \cup \{2\} \cup [4; \infty)$  **1.5.**  $\{-5\} \cup [-1; 4]$  **1.6.**  $[-5; 1] \cup \{4\}$  **1.7.**  $(-5; 3) \cup (3; 4)$  **1.8.**  $(-\infty; -4] \cup \{-1/2\} \cup [3; \infty)$  **1.9.**  $(-\infty; 0) \cup (1,5; 5)$  **1.10.**  $(-3; 0) \cup (9; \infty)$  **1.11.**  $(-\infty; -1) \cup (\sqrt{5}; 3,5)$  **1.12. а)**  $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$  **1.12. б)**  $(1; 2)$  **1.13.**  $(-\infty; -3] \cup [-2; -1) \cup (-1; 5)$  **1.14.**  $[-5; -4] \cup \{-1\} \cup (3; \infty)$  **1.15.**  $(-7; 2) \cup [5; \infty)$  **1.16.**  $[-1; 7/3] \cup (7; \infty)$  **1.17.**  $(-4; -2) \cup (3/2; 5)$  **1.18.**  $(-5; 1) \cup \{3\}$  **1.19.**  $[-4; 1)$  **1.20.**  $(-1/2; 1]$  **1.21.**  $(-5; \infty)$  **1.22.**  $(-1; 0) \cup (0; 1)$  **1.23.**  $(-\infty; -3) \cup (-2; -1)$  **1.24.**  $(-\infty; -1) \cup (2; 4)$  **1.25.**  $(-1; 1) \cup (1; \infty)$  **1.26.**  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$  **1.27.**  $(3; \infty)$  **1.28.**  $(-1; \infty)$  **1.29.**  $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$  **1.30.**  $(-\infty; -3) \cup (3; 5] \cup [6; \infty)$  **1.31.**  $(-\infty; -2) \cup \{3\}$  **1.32.**  $(2; \infty) \cup \{-1\}$  **1.33.**  $(-\infty; 1) \cup (2; 4]$  **1.34.**  $(-\infty; -2) \cup (1; 3]$  **1.35.**  $(\log_2 0,7; 0) \cup (\log_3 5; \infty)$  **1.36.**  $(-\infty; \log_{0,3} 2) \cup (0; \log_2 3)$  **1.37.**  $[-2; \infty)$  **1.38.**  $(-\infty; -2]$  **1.39.**  $[-3; -1/3]$  **1.40.**  $[4; 5) \cup (6; \infty)$  **1.41.**  $(-\infty; -1) \cup (2/3; 3/4) \cup (3; \infty)$  **1.42.**  $[-7; -1] \cup [5; 7)$  **1.43.**  $(-3; -2) \cup (3; 4)$  **1.44.**  $[-4; -3) \cup (5; 7)$  **1.45.**  $[2; 3) \cup (4; 5]$  **1.46.**  $(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (1; 6]$  **1.47.**  $(-8; 1) \cup \{3\}$  **1.48.**  $1,5$  **1.49. а)**  $(-1; 2)$  **1.49. б)**  $(-2,4; 3,4)$  **1.49. в)**  $[-1; 3]$  **1.49. г)**  $(-2/3; 7/3)$  **1.49. д)**  $(7; 9)$  **1.50.**  $(-1; 2] \cup [3; 5)$  **1.51.**  $[0; 1/3) \cup (3; 10/3]$

## 2. Уравнения и неравенства с модулем

### Определение модуля

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

В случае раскрытия нескольких модулей, можно отмечать знаки подмодульных выражений на одной прямой. Например, для уравнения  $|x - 3| + |x + 5| = 9$ , удобно воспользоваться схемой:



На данной схеме в первой строке — знаки первого модуля, во второй — знаки второго. Далее уравнение (неравенство) решается на каждом из полученных интервалов с соответствующим раскрытием модулей.

Решите следующие уравнения и неравенства:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 2.1. $ x + 2  = 2(3 - x).$                  | 2.8. $ x + 1  -  x - 4  > 7.$                  | 2.14. $\sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2} = 1.$   |
| 2.2. $ 3x - 2  + x = 11.$                   | 2.9. $\frac{ 2 - x  - x}{ x - 3  - 1} \leq 2.$ | 2.15. $  x + 1  -  x - 1   < 1.$                   |
| 2.3. $ x  -  x - 2  = 2.$                   | 2.10. $\frac{ 1 - x  + 10}{4 x - 1  + 3} > 2.$ | 2.16. $\frac{ x + 1  +  x - 2 }{x + 199} < 1.$     |
| 2.4. $x^2 +  x  - 2 = 0.$                   | 2.11. $ 2x + 8  -  x - 5  = 12.$               | 2.17. $\frac{ x - 2 }{ x - 1  - 1} \geq 1.$        |
| 2.5. $x^2 - 6x + 8 +  x - 4  = 0$           | 2.12. $ 5x - 3  -  7x - 4  = 2x - 1.$          | 2.18. $ x^2 + x - 2  +  x + 4  \leq x^2 + 2x + 6.$ |
| 2.6. $ x^2 - 9x + 14  = x^2 + 3x - 14.$     | 2.13. $  x - 1  + 2  - 1  + 1  = 2.$           |  |
| 2.7. $ x + 2  -  x - 1  + \frac{3}{2} < x.$ |  |  |

### Геометрическая интерпретация модуля

Модуль произвольного числа равен расстоянию от нуля до точки, соответствующей этому числу на числовой прямой.

Пользуясь данной интерпретацией, удобно решать неравенства вида  $|f(x)| \vee g(x)$  (знак  $\vee$  соответствует одному из знаков неравенств). Далее от неравенства переходят к системе или совокупности:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

В обоих случаях знак строгого неравенства может быть заменен на знак нестрогий. Тогда в системе (совокупности) будут также нестрогие знаки неравенств.

Решите неравенства:

- |                       |                             |  |
|-----------------------|-----------------------------|--|
| 2.19. $ x + 2  < 5.$  | 2.23. $ 2x + 5  > 3.$       | 2.27. $\left  \frac{2x - 1}{x + 2} \right  < 4.$     |
| 2.20. $ x + 5  > 0.$  | 2.24. $ x^2 + 3x - 4  < 6.$ |  |
| 2.21. $ x + 1  < -2.$ | 2.25. $ x^2 - 4x  < 5.$     | 2.28. $\left  \frac{5x + 6}{2x - 5} \right  \geq 2.$ |
| 2.22. $ 2x - 3  > 4.$ | 2.26. $ x^2 - 5x  < 6.$     |  |

2.29.  $\left| \frac{x^2 - x + 2}{x - 3} \right| > -3.$

2.30.  $\left| \frac{3x + 1}{x - 3} \right| < 3.$

2.31.  $\left| \frac{x^2 + 2x}{x - 1} \right| > 0.$

2.32.  $\left| \frac{x^2 - x}{x - 3} \right| > 0.$

2.33.  $\left| \frac{x - 3}{x - 5} \right| \geq 1.$

2.34.  $\left| \frac{5x + 2}{x - 2} \right| \geq 1.$

2.35.  $2|x + 1| \leq x + 4.$

2.36.  $|x^2 - 2x| \leq x.$

2.37.  $|x - 4| > x^2 - 7x + 12.$

2.38.  $x^2 - 5x + 9 \leq |x - 6|.$

2.39.  $3x^2 - |x - 3| \geq 9x - 2.$

2.40.  $|x - 1| > \frac{x + 1}{2}.$

2.41.  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3.$

2.42.  $x^2 - |5x - 3| - x < 2.$

2.43.  $x^2 + 4 \geq |3x + 2| - 7x.$

2.44.  $|x^2 - 2x - 8| > 2x.$

2.45.  $\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3.$

2.46.  $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$

**Важно!** Если решать уравнение вида  $|f(x)| = g(x)$ , разбив его на два уравнения  $f(x) = \pm g(x)$ , то необходимо делать проверку: или подставить полученные решения  $x$  в исходное уравнение, или проверить  $g(x) \geq 0$ .

Решите уравнения:

2.47.  $|x^2 - 2x - 1| = \frac{5x + 1}{3}.$

2.48.  $|x^2 - 9x + 14| = x^2 + 3x - 14.$

2.50.  $|x - 2| = x^2 - x - 2.$

2.49.  $|2x + 1| = x^2 + x - 1.$

2.51.  $|x^2 - 9x + 18| = -2x^2 + 11x - 10.$

Ответы:

2.1.  $\frac{4}{3}$  2.2.  $-\frac{9}{2}; \frac{13}{4}$  2.3.  $[2; \infty)$  2.4.  $\pm 1$  2.5.  $3; 4$  2.6.  $3$  2.7.  $(\frac{9}{2}; \infty)$  2.8. Решений нет 2.9.  $(-\infty, 2) \cup \{3\} \cup (4, \infty)$   
 2.10.  $(\frac{3}{7}, \frac{11}{7})$  2.11.  $-25; 3$  2.12.  $(-\infty; \frac{4}{7}]$  2.13.  $1$  2.14.  $[2; 3]$  2.15.  $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  2.16.  $(-\infty; -199) \cup (-66; 200)$  2.17.  $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$  2.18.  $[-6; -1] \cup [0; \infty)$  2.19.  $(-7; 3)$  2.20.  $x \neq -5$  2.21. Решений нет 2.22.  $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$   
 2.23.  $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$  2.24.  $(-5; -2) \cup (-1; 2)$  2.25.  $(-1; 5)$  2.26.  $(-1; 2) \cup (3; 6)$  2.27.  $(-\infty; -\frac{9}{2}) \cup (-\frac{7}{6}; \infty)$   
 2.28.  $(-\infty; -16] \cup [\frac{4}{9}; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$  2.29.  $x \neq 3$  2.30.  $(-\infty; \frac{4}{3})$  2.31.  $x \neq -2, x \neq 0, x \neq 1$  2.32.  $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 3$   
 2.33.  $[4; 5) \cup (5; \infty)$  2.34.  $(-\infty; -1] \cup [0; 2) \cup (2; \infty)$  2.35.  $[-2; 2]$  2.36.  $\{0\} \cup [1; 3]$  2.37.  $(2; 4)$  2.38.  $[1; 3]$  2.39.  $(-\infty; \frac{4 - \sqrt{19}}{3}] \cup [\frac{4 + \sqrt{19}}{3}; \infty)$  2.40.  $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$  2.41.  $(2; 5)$  2.42.  $(-5; 3 + 2\sqrt{2})$  2.43.  $(-\infty; -5 - \sqrt{19}] \cup [\sqrt{2} - 2; \infty)$  2.44.  $(-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{3}; \infty)$  2.45.  $(-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$  2.46.  $[0; \frac{8}{5}] \cup [\frac{5}{2}; \infty)$  2.47.  $1; 4$  2.48.  $3$  2.49.  $2; -3$  2.50.  $\pm 2$  2.51.  $2; 4$

### 3. Показательные уравнения и неравенства

#### Методы решения показательных уравнений

1) Приведение к равенству двух степеней с одинаковыми основаниями.

Пример:

$$3^x \cdot 27^x = 81,$$

$$3^x \cdot 3^{3x} = 3^4,$$

$$3^{4x} = 3^4,$$

$$4x = 4,$$

$$x = 1.$$

2) Вынесение степени за скобки.

Пример:

$$3^{4x+3} + 2 \cdot 3^{4x+1} - 3^{4x} = 96,$$

$$3^{4x} \cdot (3^3 + 2 \cdot 3 - 1) = 96,$$

$$3^{4x} \cdot 32 = 96,$$

$$3^{4x} = 3,$$

$$4x = 1,$$

$$x = \frac{1}{4}.$$

3) Введение вспомогательной переменной.

Пример:

$$6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 = 0.$$

Пусть  $6^x = t$ , тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 7t + 6 = 0.$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 6;$$

$$6^x = 1, \quad 6^x = 6;$$

$$x = 0, \quad x = 1.$$

4) Решение однородного уравнения.

Пример:

$$4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0,$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot (3^x)^2 = 0.$$

Так как  $(3^x)^2 \neq 0$ , разделим обе части на  $(3^x)^2$ .

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 = 0.$$

Пусть  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ , получим уравнение  $t^2 + 2t - 3 = 0$ .

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -3;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = -3;$$

$$x = 0, \quad \text{решений нет.}$$

Решите уравнения.

- 3.1.  $5^{x^2-6x+8} = 1$ .  
 3.2.  $3^{x^2-7x+10} = 1$ .  
 3.3.  $0,125 \cdot 2^{4x-16} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ .  
 3.4.  $\sqrt[7]{3^{x-2}} = \left(\sqrt[4]{3^{1-3x}}\right)^{x-2}$ .  
 3.5.  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{5/x}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$ .  
 3.6.  $0,2^{x+0,5} = \frac{0,04^x}{25}$ .  
 3.7.  $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$ .  
 3.8.  $2^x \cdot 5^{x-1} = 10^x \cdot 5^{x+1}$ .  
 3.9.  $2^{3-2x} = 4^{3x+1-x^2}$ .  
 3.10.  $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$ .  
 3.11.  $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$ .  
 3.12.  $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$ .  
 3.13.  $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{2x/3} = 675$ .  
 3.14.  $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ .  
 3.15.  $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$ .  
 3.16.  $4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0$ .  
 3.17.  $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ .  
 3.18.  $2^{2x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} + 0,5 = 0$ .  
 3.19.  $2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x/2} - 8 = 0$ .  
 3.20.  $9^{x/2-1} - 12 \cdot 3^{x/2-2} + 3 = 0$ .  
 3.21.  $3^{x/3+5} = 3^{x/6+2} + 2$ .  
 3.22.  $8^{2/x} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0$ .  
 3.23.  $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$ .  
 3.24.  $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ .  
 3.25.  $10^{2/x} + 25^{1/x} = 4,25 \cdot 50^{1/x}$ .  
 3.26.  $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$ .  
 3.27.  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$ .  
 3.28.  $(\sqrt{5 + \sqrt{24}})^x + (\sqrt{5 - \sqrt{24}})^x = 10$ .  
 3.29.  $3^{2x} - 5^x - 9^x \cdot 15 + 5^x \cdot 15 = 0$ .  
 3.30.  $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$ .  
 3.31.  $7^{x+1} + 7^x = 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x$ .  
 3.32.  $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ .  
 3.33.  $16^x + 12^x = 2 \cdot 9^x$ .  
 3.34.  $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$ .  
 3.35.  $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$ .  
 3.36.  $4 \cdot 20^x + 7 \cdot 10^x - 2 \cdot 5^x = 0$ .  
 3.37.  $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$ .  
 3.38.  $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$ .

### Показательные неравенства

Пусть перед нами неравенство вида  $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$ .

$$\text{Тогда при } a > 1, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$

$$\text{при } 0 < a < 1, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

В нестрогих неравенствах знак ( $\geq, \leq$ ) после отбрасывания основания остается нестрогим.

Таким образом, наша задача — с помощью преобразований привести показательное неравенство к виду  $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$ . Преобразования показательных неравенств аналогичны преобразованиям уравнений.

Решите неравенства:

- 3.39.  $2^{5-10x} > 1$ .  
 3.40.  $16^x > 0,125$ .  
 3.41.  $0,5^x > \frac{1}{128}$ .  
 3.42.  $3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$ .  
 3.43.  $0,2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$ .  
 3.44.  $0,1^{\frac{2x+1}{1-x}} > 10^3$ .  
 3.45.  $0,75^{\frac{x-2}{x+2}} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2x-3}{4x-1}}$ .  
 3.46.  $1,25^{1-x} < 0,64^{2(1+x)}$ .  
 3.47.  $9^{-4x} \cdot 3^{-6} < 9^{3/2} \cdot (9\sqrt{3})^{-2x}$ .  
 3.48.  $\sqrt{7^{|x-3|}} \geq \sqrt[3]{3}$ .  
 3.49.  $(x-5)^{2x+1} < (x-5)^{3-x}$ .  
 3.50.  $(x+1)^{5-x} \leq (x+1)^{x+2}$ .  
 3.51.  $(4x^2 - 2x + 1)^{\frac{x}{3}} \geq (4x^2 - 2x + 1)^{\frac{2x-1}{x+2}}$ .  
 3.52.  $(x^2 - 5x + 6)^{2x-3} < (x^2 - 5x + 6)^{2-x}$ .  
 3.53.  $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$ .  
 3.54.  $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$ .  
 3.55.  $5^{2x+1} > 5^x + 4$ .  
 3.56.  $25^{-x} - 5^{-x+1} \geq 50$ .  
 3.57.  $3^{x-3} < \frac{3}{27^{1/x}}$ .  
 3.58.  $4^{\frac{2x-2}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-9}}$ .  
 3.59.  $0,3^{2x^2-3x+6} < 0,00243$ .  
 3.60.  $0,1^{4x^2-2x-2} < 0,1^{2x-3}$ .  
 3.61.  $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$ .  
 3.62.  $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_4 8$ .  
 3.63.  $\frac{2^{x-1} - 1}{2^{x+1} + 1} < 2$ .  
 3.64.  $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$ .  
 3.65.  $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ .  
 3.66.  $5^{x+4} - 3 \cdot 5^{x+3} - 12 \cdot 5^{x+2} > -10$ .  
 3.67.  $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$ .  
 3.68.  $9 \cdot 4^{-1/x} + 5 \cdot 6^{-1/x} < 4 \cdot 9^{-1/x}$ .  
 3.69.  $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$ .  
 3.70.  $\frac{5^x - 3^{x+1}}{3 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^x$ .

Ответы:

- 3.1.** 2, 4 **3.2.** 2; 5 **3.3.**  $38/3$  **3.4.**  $1/7; 2$  **3.5.**  $5/7$  **3.6.**  $-1,5$  **3.7.** 2 **3.8.**  $-2$  **3.9.**  $2 \pm \sqrt{7/2}$  **3.10.** 2 **3.11.** 1 **3.12.** 0 **3.13.** 3 **3.14.** 2 **3.15.**  $\pm 2$  **3.16.** 1 **3.17.** 0; 2 **3.18.** решений нет **3.19.** 6 **3.20.** 4; 2 **3.21.**  $-12$  **3.22.** 3;  $1/\log_3 6$  **3.23.** 0 **3.24.** 0;  $1/2$  **3.25.**  $\pm 1/2$  **3.26.**  $-1; 0$  **3.27.**  $\pm 1$  **3.28.**  $\pm 2$  **3.29.** 0 **3.30.** 0 **3.31.**  $\log_{7/3} \frac{13}{8}$  **3.32.**  $-1$  **3.33.** 0 **3.34.**  $-2$  **3.35.**  $\log_{3/7} 3$  **3.36.**  $-2$  **3.37.** 0 **3.38.** 1, 2 **3.39.**  $(-\infty, 1/2)$  **3.40.**  $(-3/4, \infty)$  **3.41.**  $(\infty, 7)$  **3.42.**  $(\infty, -1/2) \cup (5/8, \infty)$  **3.43.**  $(5/3, 2)$  **3.44.** (1, 4) **3.45.**  $(-2; 1/4) \cup [1; 4]$  **3.46.**  $(-\infty; -5/3)$  **3.47.**  $(-3; \infty)$  **3.48.**  $\left[\frac{6-\log_3 7}{2}; 3\right) \cup \left(3; \frac{6+3\log_3 7}{2}\right]$  **3.49.** (5; 6) **3.50.**  $(-1; 0] \cup [3/2; \infty)$  **3.51.**  $(-2; 0] \cup [1/2; 1] \cup [3; \infty)$  **3.52.**  $(-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}) \cup (5/3; 2) \cup \left(3; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$  **3.53.**  $(-\infty, 2]$  **3.54.** (0, 1) **3.55.** (0,  $\infty$ ) **3.56.**  $(-\infty, -\log_5 10)$  **3.57.**  $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$  **3.58.**  $(0, 1/3) \cup (4, \infty)$  **3.59.**  $(\infty, 1/2) \cup (1, \infty)$  **3.60.**  $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$  **3.61.**  $(-2, \infty)$  **3.62.**  $(-\infty, 0) \cup (\log_4 3, \infty)$  **3.63.**  $\mathbb{R}$  **3.64.**  $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$  **3.65.** (0,  $\infty$ ) **3.66.**  $(-\infty; -1)$  **3.67.**  $(-\infty, \log_{0,4} 2)$  **3.68.**  $(-1/2, 0)$  **3.69.**  $(0, \log_{2/3} \frac{1}{3})$  **3.70.**  $(0; 1) \cup \left(\log_{5/3} 5; \infty\right)$

## 4. Логарифмические уравнения и неравенства

### Логарифмические уравнения

Можно выделить четыре основных метода решения логарифмических уравнений. При решении любым способом нужно выполнять проверку.

1) С помощью определения логарифма:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a, b > 0, a \neq 1.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \log_2(x+4) &= 5, \\ x+4 &= 2^5, \\ x &= 28. \end{aligned}$$

Проверка. Подставим  $x = 28$  в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \log_2(28+4) &= 5, \\ \log_2 32 &= 5, \\ 5 &= 5. \end{aligned}$$

2) Потенцирование:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \quad a, x, y > 0, a \neq 1.$$

Пример:

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-3) = \log_3 2.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-3 > 0, \end{cases} \Rightarrow x > 3.$$

Далее:

$$\begin{aligned} \log_3((x-2)(x-3)) &= \log_3 2, \\ (x-2)(x-3) &= 2, \\ x^2 - 5x + 4 &= 0, \\ x_1 = 4 \in \text{ОДЗ}, \quad x_2 = 1 \notin \text{ОДЗ}. \end{aligned}$$

3) Введение вспомогательной переменной.

Пример:

$$\begin{aligned} \lg^2 x + \lg x^2 &= 3, & \text{ОДЗ: } x > 0 \\ \lg^2 x + 2 \lg x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Пусть  $t = \lg x$ .

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 3 &= 0. \\ t_1 = 1, \quad t_2 = -3, \\ \lg x = 1, \quad \lg x = -3, \\ x = 10, \quad x = 0,001. \end{aligned}$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

4) Логарифмирование.

Пример:

$$x^{1+2 \lg x} = 10x^2. \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

Поскольку обе части уравнения положительны, логарифмируем:

$$\begin{aligned} \lg x^{1+2 \lg x} &= \lg 10x^2, \\ (1+2 \lg x) \cdot \lg x &= 1+2 \lg x. \end{aligned}$$

Пусть  $\lg x = t$ .

$$\begin{aligned} (1+2t)t &= 1+2t, \\ (1+2t)(t-1) &= 0, \\ t = -1/2, \quad t = 1, \\ \lg x = -1/2, \quad \lg x = 1, \\ x = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad x = 10. \end{aligned}$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

**Важно!** При решении логарифмических уравнений необходимо выполнять проверку. Это можно сделать двумя способами: или подставить полученные решения в исходное уравнение, или найти ОДЗ и проверить, входят ли решения в нее.

Решите уравнения:

4.1.  $\log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 4.$

4.2.  $\log_2(5-x) = 3.$

4.3.  $\log_3(5+4 \log_3(x-1)) = 2.$

4.4.  $\log_4(61 - \log_2(2x-1)) = 3.$

4.5.  $\log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + 3 \log_3 x))) = \frac{1}{2}.$

4.6.  $\lg(5^{2x} - \lg x - 2) = 2x - x \lg 4$

4.7.  $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$

4.8.  $2 \log_4(4-x) = 4 - \log_2(-x-2).$

4.9.  $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1).$

4.10.  $2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}.$

4.11.  $\frac{3}{2} \log_{1/4}(x+2)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 + \log_{1/4}(x+6)^3.$

4.12.  $2 \log_2(\log_2 x) + \log_{1/2}(\log_2(2\sqrt{2}x)) = 1.$

4.13.  $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5.$

4.14.  $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9.$

4.15.  $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1.$

4.16.  $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4.$

4.17.  $\log_{x-1}(7-x-x^2) = 1.$

4.18.  $\log_{x-1} 2 = 3.$

4.19.  $\log_{x^2+1}(2x^2 - 3x + 1) = 1.$

4.20.  $\log_{x-1}(x^2 + x - 5) = 2.$

4.21.  $\log_3((x+1)(x-3)) = 4 \log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{5}} 5.$

4.22.  $\lg x - \frac{1}{2} \lg(x - \frac{1}{2}) = \lg(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \lg(x + \frac{1}{8}).$

4.23.  $\log_5\left(\frac{x+2}{10}\right) = \log_5\left(\frac{2}{x+1}\right).$

4.24.  $2 \lg x = -\lg \frac{1}{6-x^2}.$

4.25.  $\log_{1/2}(x-1) + \log_{1/2}(x+1) - \log_{\sqrt{2}/2}(7-x) = 1.$

4.26.  $2 \log_2 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(10-x)^2 + 2 \log_4(8-x).$

- 4.27.  $\lg^2 x - 3 \lg x = \lg x^2 - 4$ .  
 4.28.  $\log_2^2 x + 2 \log_2 \sqrt{x} = 2$ .  
 4.29.  $\log_{1/3} x - 3 \sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0$ .  
 4.30.  $3^{\log_3(\lg \sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$ .  
 4.31.  $3 + 2 \log_{x+1} 3 = 2 \log_3(x+1)$ .  
 4.32.  $\frac{\log_x \frac{8}{x^2}}{\log_8 x} = 3$ .  
 4.33.  $2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$ .  
 4.34.  $\log_3(x-4)^2 = \log_{x-2}((4-x)(x-2)) - 1$ .  
 4.35.  $\log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3$ .  
 4.36.  $1 + 2 \log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$ .  
 4.37.  $\log_2\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{15}{\log_2\left(\frac{x}{8}\right) - 1}$ .  
 4.38.  $\log_{2x-3}(3x-5) + 2 \log_{3x-5}(2x-3) = 3$ .  
 4.39.  $(\log_2 x)^{-1} + 4 \log_2 x^2 + 9 = 0$ .  
 4.40.  $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \log_4 x^2 + 9 = 0$ .  
 4.41.  $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg^2 x = 6$ .  
 4.42.  $\lg^2 x + \lg^2 \frac{x}{10} + \lg^2 \frac{x}{100} = 14$ .  
 4.43.  $\lg^2 x^3 - 20 \lg \sqrt{x} + 1 = 0$ .  
 4.44.  $\log_3^2 x^5 + 7 \log_3 x^7 - 2 = 0$ .  
 4.45.  $x^{1+\lg x} = 10x$ .  
 4.46.  $x^{2 \lg x} = 10x$ .  
 4.47.  $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$ .  
 4.48.  $x^{(5+\lg x)/3} = 10^{5+\lg x}$ .  
 4.49.  $\log_x(9x^2) \cdot (\log_3 x)^2 = 4$ .  
 4.50.  $\frac{3}{\log_x\left(\frac{x}{9}\right)} + \frac{1}{2 \log_x(x\sqrt{3})} = 2$ .

### Логарифмические неравенства

Приведенные ниже утверждения справедливы при условии, что все переменные удовлетворяют ОДЗ.

$$\begin{aligned} \text{При } a > 1, & \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) > g(x), \\ \text{при } 0 < a < 1, & \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) < g(x). \end{aligned}$$

Иными словами, знак при отбрасывании логарифма сохраняется, если  $a > 1$ , и меняется, если  $0 < a < 1$ .

Случай, когда в исходном неравенстве знак “ $<$ ” аналогичен приведенному выше.

В нестрогих неравенствах знак ( $\geq, \leq$ ) после отбрасывания логарифма остается нестрогим.

Решите неравенства:

- 4.51.  $\log_5(3x-1) < 1$ .  
 4.52.  $\log_2(3-x) < 3$ .  
 4.53.  $\log_{0,2}(x^2-4) > -1$ .  
 4.54.  $\log_{1/3}(5x-1) \geq 0$ .  
 4.55.  $\log_{1/3} \frac{3x-1}{x+2} < 1$ .  
 4.56.  $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$ .  
 4.57.  $\lg(x^2-5x+7) < 0$ .  
 4.58.  $\log_7\left(\frac{1-2x}{x}\right) \leq 0$ .  
 4.59.  $\log_{x^2+4} 8 < 1$ .  
 4.60.  $\log_{x^2+2} 3 \geq 1$ .  
 4.61.  $\log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$ .  
 4.62.  $\log_8(x^2-4x+3) \leq 1$ .  
 4.63.  $\log_{1/3} \frac{2-3x}{x} \geq -1$ .  
 4.64.  $\log_{1/3}(3x-4) > \log_{1/3}(x-2)$ .  
 4.65.  $\log_{0,5}(4-x) \geq \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x-1)$ .  
 4.66.  $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$ .  
 4.67.  $\log_{0,25} 5^{2/3x} < \log_{0,5} 5$ .  
 4.68.  $\log_{0,49} 7^{5/7x} > 2,5 \log_{0,7} 7$ .  
 4.69.  $2 \log_3 x - \log_{1/3}(4-x) \leq \log_3(x-1)^2 + 2 \log_9(10-x)$ .  
 4.70.  $\log_{1/2}\left(\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3}\right) < 0$ .  
 4.71.  $3 \log_{11}(x^2+8x-9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$ .  
 4.72.  $11 \lg(x^2+11x+30) \leq 12 + \lg \frac{(x+6)^{11}}{x+5}$ .  
 4.73.  $\log_3(x+5) + 3 \log_{x-1}^{-1} 27 \leq 3$ .  
 4.74.  $2 \log_x^{-1} 36 + \log_6(x+1) \leq 1$ .  
 4.75.  $2 \log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$ .  
 4.76.  $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$ .  
 4.77.  $\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < -1$ .  
 4.78.  $\log_{x^2}(x+2) < 1$ .  
 4.79.  $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x \leq 2$ .  
 4.80.  $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$ .  
 4.81.  $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$ .  
 4.82.  $\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$ .

### Метод рационализации

Приведенные ниже утверждения справедливы при условии, что все переменные удовлетворяют ОДЗ.

$$\begin{aligned} \log_a b > \log_a c & \quad \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)(b-c) > 0, \\ a^b > a^c & \quad \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)(b-c) > 0. \end{aligned}$$

Объяснение данных фактов можно найти в [этом видео](#).

Решите неравенства.

- 4.83.  $(x^2 - x + 1)^x < 1$ .  
 4.84.  $(x^2 + x + 1)^x < 1$ .  
 4.85.  $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$ .  
 4.86.  $\log_{2x+3} x^2 < 1$ .  
 4.87.  $\log_{x-3}(2x^2 - 20x + 48) \geq \log_{x-3}(x^2 - 9)$ .  
 4.88.  $\log_{9x^2-6x+1}(9x^2 - 18x + 8)^{-1} < -1$ .  
 4.89.  $\log_{\sqrt[3]{x-4,5}}(x-5)^3 \geq 9 \log_{x-4,5} \left( \frac{x+4}{2x-6} \right)$ .  
 4.90.  $\log_{x-5} |x^2 - 9x + 20| \leq 2$ .  
 4.91.  $\log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) > 1$ .  
 4.92.  $\log_{-4x^2+12x-8} |4x-5| > 0$ .  
 4.93.  $\frac{2 \log_2(x^2 + 2x)}{\log_2 x^2} \leq 1$ .  
 4.94.  $\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$ .  
 4.95.  $\log_{(x+1)^2} \left( \frac{(x+1)^3}{(x+0,5)^2} \right) \leq 1$ .  
 4.96.  $\log_{\sqrt[3]{x-1}} \left( \frac{(x-1)^3}{2(x-5/3)^2} \right) \geq 6$ .  
 4.97.  $\log_x(10x+3) \cdot \log_{10x}(3x+10) \geq 0$ .  
 4.98.  $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$ .  
 4.99.  $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left( \frac{x}{3} \right) > 0$ .  
 4.100.  $\log_{2x} \left( 6x + \frac{1}{7} \right) \cdot \log_{5x} \left( 3x + \frac{4}{7} \right) \leq 0$ .  
 4.101.  $(x+1) \cdot \log_8(x^2 + 2x - 2) < 0$ .  
 4.102.  $(x^2 - 5x + 3) \cdot \lg \left( 1 - \frac{x}{3} \right) \geq \lg \left( \frac{3}{3-x} \right)$ .  
 4.103.  $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$ .  
 4.104.  $\log_{2x-1} 2 \leq \log_{2x+1} 4$ .  
 4.105.  $\log_{x+1,5}^2(2x^2 - x) - \log_{x+1,5}^2 \left( \frac{2x^2 - x}{x+1,5} \right) \leq \frac{\log_{0,5}(2x^2 - x)}{\log_{0,5}(x+1,5)} + 1$ .  
 4.106.  $\log_{x+3}^2(2x^2 + 5x + 3) - \log_{x+3}^2 \left( \frac{2x^2 + 5x + 3}{x+3} \right) \leq \frac{\log_4(2x^2 + 5x + 3)}{\log_4(x+3)} + 1$ .

Ответы:

- 4.1. 5 4.2. -3 4.3. 4 4.4.  $9/16$  4.5. 3 4.6. 0,01 4.7. 0 4.8. -4 4.9.  $3/2, 10$  4.10. 2 4.11.  $2, 1 - \sqrt{33}$  4.12. 8 4.13.  $-2 - \sqrt{10}$  4.14. 5 4.15. 4 4.16. 1 4.17. Решений нет 4.18.  $1 + \sqrt[3]{2}$  4.19. 3 4.20. Решений нет 4.21.  $\frac{11+\sqrt{261}}{5}$  4.22. 1 4.23. 3 4.24.  $\sqrt{3}$  4.25. 3 4.26. 4 4.27. 10,  $10^4$  4.28.  $1/4, 2$  4.29.  $1/81, 1/3$  4.30. 100 4.31.  $\frac{-3+\sqrt{3}}{3}, 8$  4.32.  $1/8, 2$  4.33. -100 4.34.  $2 + \sqrt{3}$  4.35.  $1/2, 16$  4.36.  $-9/5, 23$  4.37.  $1/2, 128$  4.38.  $7/4$  4.39.  $2^{-1}, 2^{-1/8}$  4.40.  $2^{-2}, 2^{-1/4}$  4.41.  $10, 10^{-3}$  4.42.  $1/10, 10^3$  4.43.  $10, 10^{1/9}$  4.44.  $3^{1/25}, 1/9$  4.45.  $1/10, 10$  4.46.  $10, 10^{-1/2}$  4.47.  $25, 1/5$  4.48.  $10^3, 10^{-5}$  4.49.  $1/9, 3$  4.50.  $3^{-4/3}, 1/3$  4.51.  $(1/3, 2)$  4.52.  $(-5, 3)$  4.53.  $(-3, -2) \cup (2, 3)$  4.54.  $(1/5, 2/5]$  4.55.  $(-\infty, -2) \cup (5/8, \infty)$  4.56.  $(5/3, \infty)$  4.57.  $(2, 3)$  4.58.  $[1/3, 1/2)$  4.59.  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$  4.60.  $[-1, 1]$  4.61.  $(1, 2) \cup (3, 4)$  4.62.  $[-1, 1) \cup (3, 5]$  4.63.  $[1/3, 2/3)$  4.64. решений нет 4.65.  $(1, 2] \cup [3, 4)$  4.66.  $(-\sqrt{5}, -2) \cup (1, \sqrt{5})$  4.67.  $(0, 1/3)$  4.68.  $(-\infty, 0) \cup (1/7, \infty)$  4.69.  $(0, 5/8] \cup [2, 4)$  4.70.  $(3, 4) \cup (6, \infty)$  4.71.  $[-20, -9) \cup (1, 2]$  4.72.  $[-15, -6) \cup (-5, 5]$  4.73.  $(1, 2) \cup (2, 4]$  4.74.  $(0, 1) \cup (1, 2]$  4.75.  $(2, 3) \cup (3, \infty)$  4.76.  $(3, \infty)$  4.77.  $(1/2, 1)$  4.78.  $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$  4.79.  $[1/2; 4]$  4.80.  $(0; 1/2] \cup (2; 4]$  4.81.  $(1/10; 1) \cup (1; 10)$  4.82.  $(0; 10)$  4.83.  $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$  4.84.  $(-\infty; -1)$  4.85.  $(0; 1/2) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$  4.86.  $(-3/2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$  4.87.  $[10 - \sqrt{43}; 4) \cup [10 + \sqrt{43}; \infty)$  4.88.  $(-\infty; 0) \cup (7/12; 2/3)$  4.89.  $(5; 5,5) \cup [6,5; \infty)$  4.90.  $(5; 6)$  4.91.  $(-\infty; 0) \cup (5; \infty)$  4.92.  $(1; 5/4) \cup (5/4; 3/2)$  4.93.  $[-3; -2) \cup (0; 1)$  4.94.  $(-1; 0) \cup (5; 6]$  4.95.  $[-\sqrt{3}/2; -1/2) \cup (-1/2; 0) \cup [\sqrt{3}/2; \infty)$  4.96.  $\left( 1 - \frac{23-\sqrt{57}}{12} \right) \cup \left( 2; \frac{23+\sqrt{57}}{12} \right]$  4.97.  $(0; 0,1) \cup (1; \infty)$  4.98.  $(-2; -1] \cup (1; 2)$  4.99.  $(1; 3/2) \cup (2; 5/2) \cup (3; \infty)$  4.100.  $\{1/7\} \cup (1/5; 1/2)$  4.101.  $(-\infty; -3) \cup (-1 + \sqrt{3}; 1)$  4.102.  $(-\infty; 0] \cup [1; 3)$  4.103.  $(1; 4)$  4.104.  $(1/2; 1) \cup [3/2; \infty)$  4.105.  $(-3/2; -1/2) \cup (-1/2; 0) \cup (1/2; 9/2)$  4.106.  $(-3; -2) \cup (-2; -3/2) \cup (-1; 3]$

## 5. Замена в неравенствах. Обобщенный метод интервалов

Решите неравенства.

- 5.1.  $(x^2 - 5x)^2 - 30(x^2 - 5x) - 216 \geq 0$ .  
 5.2.  $2x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 5x - 6 > 0$ .  
 5.3.  $(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x < 3$ .  
 5.4.  $(x^2 + 3x + 1)^2 > 4(x^2 + 3x) + 9$ .  
 5.5.  $\frac{|2x-1|-3}{(2x-1)^2 + |2x-1|-2} \geq 0$ .  
 5.6.  $\frac{4}{|2x+3|-3} \geq |2x+3|$   
 5.7.  $|3x-9| + \frac{1}{|x-3|-1} < 7$ .  
 5.8.  $\frac{(x+1)^2 - 2|x+1| - 3}{|x+1| - 5} \geq 0$ .  
 5.9.  $(1/4)^x - 3 \cdot (1/2)^x - 4 \leq 0$ .  
 5.10.  $4^{x+1} - 16^x < \log_2 8$ .  
 5.11.  $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$ .  
 5.12.  $\log_{1/2}^2(x+3) + 4 \log_{1/2}(x+3) \geq 5$ .  
 5.13.  $\lg^2 x^3 \leq 20 \lg \sqrt{x} - 1$ .  
 5.14.  $\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x-3)^2 \geq 2$ .  
 5.15.  $\frac{1}{2-3^x} < \frac{1}{3^{x-1}-1}$ .  
 5.16.  $\frac{5}{2^{x-1}-1} > \frac{1}{2^x-1}$ .  
 5.17.  $\frac{3 \cdot 2^{x+2} - 27}{2^x - 1} > 2^x + 3$ .

- 5.18.  $25^{-x} - \frac{4}{5^x} \geq 5$ .
- 5.19.  $\frac{1}{10^{x+1}} < 0,8 + 2 \cdot 10^x$ .
- 5.20.  $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$ .
- 5.21.  $2^{2x+1} - 21 \cdot (1/2)^{2x+3} + 2 \geq 0$ .
- 5.22.  $2 \log_5 x - \log_x 125 < 1$ .
- 5.23.  $\log_7 x - \log_x 1/7 \leq 2$ .
- 5.24.  $\log_{1/3} x > \log_x 3 - 2,5$ .
- 5.25.  $25^x + 4 \cdot 15^x - 5 \cdot 9^x > 0$
- 5.26.  $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} < 4 \cdot 9^{1/x}$ .
- 5.27.  $\sqrt{x \log_2 \sqrt{x}} > 2$ .
- 5.28.  $x^{1-\log_{0,2} x} > \frac{1}{x}$ .
- 5.29.  $x^{\log_5 x - 3} \geq 5^{\log_{0,5} 8 + 1}$ .
- 5.30.  $x^{2+\log_2 x} \geq 256$ .
- 5.31.  $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 162$ .
- 5.32.  $5^{1+\log_5^2 x} - 4x^{\log_5 x} < 25$ .
- 5.33.  $\sqrt{x-3} - 3\sqrt[4]{x-3} + 2 > 0$ .
- 5.34.  $x^2 + 12 \leq x + 6\sqrt{x^2 - x + 4}$ .
- 5.35.  $\frac{x-4-\sqrt{x-2}}{3-\sqrt{x-2}} < 0$ .
- 5.36.  $\frac{2(3x-2) - 5\sqrt{3x-2} + 6}{3x-3\sqrt{3x-2}} \geq 2$ .
- 5.37.  $\log_{1/3}^2 x + \left| \log_{1/3} x \right| > 2$ .
- 5.38.  $\log_{0,5}^2(x-3) + 3\sqrt{\log_{0,5}^2(x-3)} - 4 < 0$ .
- 5.39.  $3 \log_4(4x) + \log_{2x} 8 \geq 7$ .
- 5.40.  $3/2 \log_{1/5}(25x) + \log_{5x} 125 \geq -3$ .
- 5.41.  $\left(4\sqrt{x^2-2}\right)^2 + 4 < 65\sqrt{16\sqrt{x^2-2}-1}$ .
- 5.42.  $\left(3\sqrt{5-x^2}\right)^2 + 2 < 11\sqrt{9\sqrt{5-x^2}-1}$ .
- 5.43.  $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{1/2}(2^{x+1} - 2) \leq -2$ .
- 5.44.  $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \cdot \log_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{5x-1}\right)^2 \leq 2$ .
- 5.45.  $(x^2 + x - 6)^2 \left(\frac{\sqrt{5x+11}}{x+1} - 1\right) \leq 0$ .
- 5.46.  $(x^2 - 3x - 4)^2 \left(\frac{\sqrt{3x+1}}{x-3} - 1\right) \leq 0$ .
- 5.47.  $\frac{3 \cdot 2^{x/2} - 7 \cdot 2^{x/4} - 20}{\sqrt{x-3}} \leq 0$ .
- 5.48.  $\sqrt{6-x} \cdot (2 \cdot 9^{2x} - 53 \cdot 3^{2x} - 27) \leq 0$ .
- 5.49.  $\sqrt{25-x^2} \cdot \log_{1/4}(x^2 + 5x - 5) \geq 0$ .
- 5.50.  $\sqrt{16-x^2} \cdot \log_{1/2}(x^2 - 3x - 8) \geq 0$ .

Ответы:

- 5.1.  $(-\infty; -4] \cup [2; 3] \cup [9; \infty)$  5.2.  $(-\infty; -0,5) \cup (0,5; 2) \cup (3; \infty)$  5.3.  $(-3; -1) \cup (-1; 1)$  5.4.  $(-\infty; -4) \cup (-2; -1) \cup (1; \infty)$  5.5.  $(-\infty; -1] \cup (0; 1) \cup [2; \infty)$  5.6.  $[-7/2; -3) \cup (0; 1/2]$  5.7.  $(1; 5/3) \cup (2; 4) \cup (13/3; 5)$  5.8.  $(-\infty; -6) \cup [-4; 2] \cup (4; \infty)$  5.9.  $[-2; \infty)$  5.10.  $(-\infty; 0) \cup (\log_4 3; \infty)$  5.11.  $[0,5; 4]$  5.12.  $(-3; -2,5] \cup [29; \infty)$  5.13.  $[10^{1/9}; 10]$  5.14.  $-1$  5.15.  $(\log_3 2; \log_3(9/4))$  5.16.  $(\log_2 8/9; 0) \cup (1; \infty)$  5.17.  $(-\infty; 0) \cup (2; \log_2 6)$  5.18.  $(-\infty; -1]$  5.19.  $(-1; \infty)$  5.20.  $(-\infty; -1)$  5.21.  $[\frac{1}{2} \log_2 3 - 1; \infty)$  5.22.  $(0; 0,2) \cup (1; 5\sqrt{5})$  5.23.  $(0; 1) \cup \{7\}$  5.24.  $(0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$  5.25.  $(0; \infty)$  5.26.  $(0; 1/2)$  5.27.  $(0; 1/4) \cup (4; \infty)$  5.28.  $(0; 0,04) \cup (1; \infty)$  5.29.  $(0; 5] \cup [25; \infty)$  5.30.  $(0; 1/16] \cup [4; \infty)$  5.31.  $(1/9; 9)$  5.32.  $(5^{-\sqrt{2}}; 5^{\sqrt{2}})$  5.33.  $[3; 4] \cup [19; \infty)$  5.34.  $[-3; 0] \cup [1; 4]$  5.35.  $[2; 6) \cup (11; \infty)$  5.36.  $[2/3; 1) \cup (2; \infty)$  5.37.  $(0; 1/3) \cup (3; \infty)$  5.38.  $(3,5; 5)$  5.39.  $(1/2; 1/\sqrt[3]{2}] \cup [4; \infty)$  5.40.  $(0; 1/25] \cup (1/5; 5]$  5.41.  $(-\sqrt{6}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{6})$  5.42.  $[-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}]$  5.43.  $(0; \log_2(5/4)] \cup [\log_2 3; \infty)$  5.44.  $(0; \log_5(1 + \sqrt{2})) \cup [\log_5 3; \infty)$  5.45.  $[-11/5; -1) \cup \{2\} \cup [5; \infty)$  5.46.  $[-1/3; 3) \cup \{4\} \cup [8; \infty)$  5.47.  $(3; 8]$  5.48.  $(-\infty; 3/2] \cup \{6\}$  5.49.  $\left(\frac{(-5+\sqrt{45})}{2}; 1\right] \cup \{5\}$  5.50.  $\{-4\} \cup \left[\frac{(3-\sqrt{45})}{2}; \frac{(3-\sqrt{41})}{2}\right)$