1. Дробно-рациональные неравенства

Важно! Решение неравенства, как правило, — **промежуток.**

Решение квадратных неравенств

Пусть дана $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Квадратным является неравенство вида

$$ax^2 + bx + c \vee 0,$$

где $\vee$ — это один из знаков неравенства $>, <, \geqslant, \leqslant$.
Решать такие неравенства удобнее всего графически.

1. Найти нули функции $f(x)$.
2. Схематически изобразить график функции.
3. Заштриховать часть оси абсцисс, которая соответствует решению неравенства.

Нули (корни) функции — точки на оси абсцисс, в которых выражение равно нулю. Их можно найти с помощью дискриминанта:

$$D = b^2 - 4ac.$$

- $D < 0$, функция не имеет корней. Обратите внимание, мы всегда можем вычислить дискриминант, даже если он отрицательный.
- $D = 0$, функция имеет один корень:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

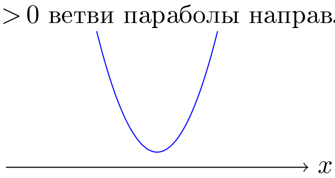
- $D > 0$, квадратное выражение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

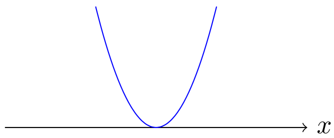
Примеры эскизов графика функции

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх.

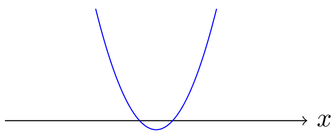
$D < 0$.



$D = 0$.

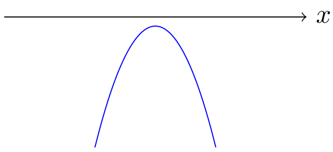


$D > 0$.

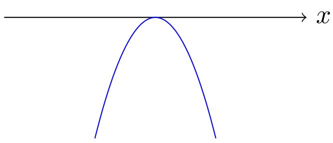


При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

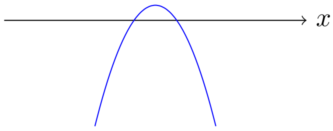
$D < 0$



$D = 0$



$D > 0$

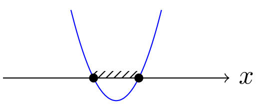


Штриховка решения неравенства

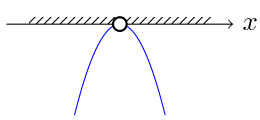
Если знак неравенства нестрогий $\geqslant, \leqslant$, то нули функции войдут в ответ, их необходимо закрасить. Если знак неравенства строгий $>, <$, то нули функции в ответ не войдут. Их необходимо «выколоть».
Если перед нами неравенство $f(x) > 0$, или $f(x) \geqslant 0$, то штрихуется та часть оси абсцисс, **над** которой находится парабола. Т. е. те x, при которых функция положительна.
Если перед нами неравенство $f(x) < 0$, или $f(x) \leqslant 0$, то штрихуется та часть оси абсцисс, **под** которой находится парабола. Т. е. те x, при которых функция отрицательна.

Примеры

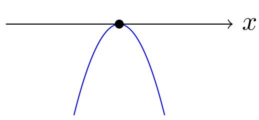
$f(x) \leqslant 0$



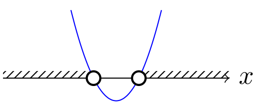
$f(x) < 0$



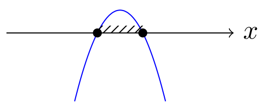
$f(x) \geqslant 0$



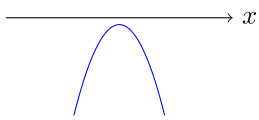
$f(x) > 0$



$f(x) \geqslant 0$



$f(x) \geqslant 0$



Метод интервалов

Часто многочлен имеет более высокие степени. В этом случае удобно пользоваться методом интервалов.

1. Найти все корни $x_1, x_2, ..., x_n$ многочлена и
2. Расположить их на оси абсцисс.
3. Определить знак функции на каждом из полученных интервалов (подставляя в функцию $f(x)$ вместо x конкретные значения переменной на интервале и вычисляя знак $f(x)$).
4. Заштриховать решение.

Вычислять знаки функции будет легче, если разложить $f(x)$ на произведение:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0,$$

если это возможно.

Для рациональных дробей метод интервалов работает аналогично.

Важно! Нули функции считаются отдельно как для знаменателя, так и для числителя! Корни, полученные из знаменателя на оси абсцисс всегда не закрашиваются. В этих точках знаменатель равен нулю, на него делить нельзя.

Важно! Дробно-рациональное неравенство нельзя домножать на знаменатель.

Пример

Решим неравенство

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+5)} \geqslant 0.$$

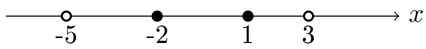
Находим нули числителя:

$$(x-1)(x+2)=0;$$
$$x=1 \quad x=-2.$$

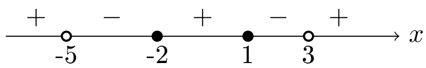
Нули знаменателя:

$$(x-3)(x+5)=0;$$
$$x=3 \quad x=-5.$$

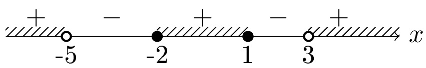
Отмечаем точки на оси абсцисс:



Находим знаки функции. Для этого подставляем значения x из каждого интервала. Например, на промежутке $(3;+\infty)$, возьмем $x=10$ и подставим в $f(x)$.
Получаем $f(10)>0$.
На промежутке $[1;3)$ возьмем $x=2$, $f(2)<0$. И так далее.
После этих действий получим картину:



Осталось только выбрать промежутки с подходящим знаком. Поскольку исходное неравенство $f(x) \geqslant 0$, то нам нужны промежутки со знаком $+$ и нули функции.



Важно! Знаки функции чередуются не всегда.

Кратность корней

Если корень встречается только один раз, то его кратность равна единице.

Если один и тот же корень встречается n раз, то его кратность равна n.

По-другому можно описать кратность корня x_1 как сумму всех степеней всех скобок вида $(x - x_1)$.

Например, в выражении $\frac{(x-2)^5(x+5)(x+3)^3}{(x+3)(4-x)}$ кратность корня $x=2$ равна 5, кратность корня $x=-3$ равна -4 (по количеству повторяющихся скобок в числителе и знаменателе).

Для того, чтобы не забыть оставить корень $x=-3$ незакрашенным (т. к. он присутствует в знаменателе в скобке $(x+3)$), мы рекомендуем не сокращать его.

Замечание. Описание кратности, которое мы здесь дали, отличается от классического определения кратности корня, однако его удобно использовать в школьном курсе.

Практическое применение кратности корня.

На интервалах, находящихся по разные стороны от корня **четной** кратности, функция будет иметь **одинаковые** знаки.

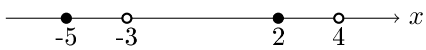
На интервалах, находящихся по разные стороны от корня **нечетной** кратности, функция будет иметь **разные** знаки.

Пример

Решим неравенство

$$\frac{(x-2)^5(x+5)(x+3)^3}{(x+3)(4-x)} \leqslant 0.$$

Отметим корни на оси абсцисс:



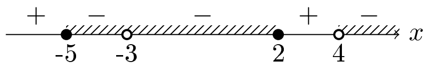
Выпишем кратности корней:
$x=-5$, кратность 1
$x=-3$, кратность 4
$x=2$, кратность 5
$x=4$, кратность 1

Поскольку кратность корня $x=-3$ четная, то на интервалах, находящиеся по разные стороны от него, будут иметь одинаковый знак. Остальные кратности нечетные. Знаки по разные стороны этих корней будут разными.

Вычислим знак для самого правого интервала при $x=10$. $f(10)<0$.
Затем расставим знаки используя кратность корня.

- Справа от 4 знак $-$, кратность нечетная, знак меняется, слева будет $+$.
- Справа от 2 знак $+$, кратность нечетная, знак меняется, слева будет $-$.
- Справа от -3 знак $-$, кратность четная, знак не меняется, слева будет $-$.
- Справа от -5 знак $-$, кратность нечетная, знак меняется, слева будет $+$.

Итого:



2. Модули

Определение модуля

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Принципиально различаются ситуации, когда в неравенстве несколько модулей или один модуль.

Если модулей **несколько**, необходимо раскрыть каждый **по определению** (в зависимости от знака подмодульного выражения).

Если модуль **один**, то можно воспользоваться **геометрической интерпретацией** модуля.

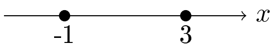
Раскрытие нескольких модулей

1. Найти нули всех модулей и нанести их на ось абсцисс. Точки разобьют ось на несколько интервалов.
2. На каждом из полученных интервалов найти знаки каждого из подмодульных выражений.
3. Решить неравенство на каждом интервале.

Пример

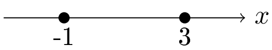
$$|2x+2| + |x-3| \leqslant 6$$

1. Первый модуль равен нулю при $x=-1$, второй — при $x=3$.



2. Расставим знаки, которые принимает подмодульные выражения на каждом интервале.

$2x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$



3. Теперь решим неравенство, раскрывая модули на каждом интервале.

   а) $x \leqslant -1$.
   Оба модуля раскрываются со сменой знаков (с минусом).

$$\begin{aligned} -2x-2-x+3 &\leqslant 6, \\ -3x &\leqslant 5, \\ x &\geqslant -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

   Необходимо учесть ограничение первого интервала $x \leqslant -1$.

   Таким образом, получим первую часть ответа: $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant -1$.

   б) $-1 < x \leqslant 3$. Первый модуль раскроется без смены знаков, второй — со сменой.

$$\begin{aligned} 2x+2-x+3 &\leqslant 6, \\ x &\leqslant 1. \end{aligned}$$

   Учитывая ограничение интервала, получим часть ответа: $-1 < x \leqslant 1$.

   в) $x > 3$. Оба модуля раскрываются без смены знаков.

$$\begin{aligned} 2x+2+x-3 &\leqslant 6, \\ x &\leqslant \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

   Учитывая ограничение, получим, что в данном случае решений нет.

Осталось объединить ответы всех интервалов (случаев) примера :

$$-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 1.$$

Замечание. Уравнения с несколькими модулями по данной схеме решаются абсолютно аналогично.

Раскрытие одного модуля

Для раскрытия одного модуля можно воспользоваться геометрической интерпретацией модулей.

Геометрический смысл модуля: модуль произвольного числа равен расстоянию от нуля до точки, соответствующей этому числу на прямой.

Не вдаваясь в подробности: неравенство приводится к виду $|f(x)| \vee g(x)$ (знак $\vee$ соответствует одному из знаков неравенств).

Далее от неравенства переходят к системе или совокупности:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

В обоих случаях знак строгого неравенства может быть заменен на знак нестрогого. Тогда в системе (совокупности) будут также нестрогие знаки неравенств.

Пример

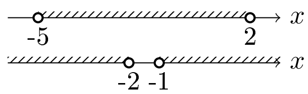
$$|x^2 + 3x - 4| < 6$$

Переходим к системе

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 6, \\ x^2 + 3x - 4 > -6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 < 0, \\ x^2 + 3x + 2 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+5)(x-2) < 0, \\ (x+2)(x+1) > 0. \end{cases}$$



Таким образом, ответ $(-5;-2) \cup (-1;2)$.

Замечание. Данным способом можно решать и уравнения.

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{array} \right.$$

Последние неравенство $(g(x) \geqslant 0)$ можно не решать, но тогда необходима проверка полученных решений. Их нужно подставить в исходное уравнение и убедиться в правильности ответа.

---

3. Показательные уравнения и неравенства

Методы решения показательных уравнений

Задача — свести решение показательного уравнения к одному из следующих случаев.

1) Приведение к равенству двух степеней с одинаковыми основаниями.
Пример:

$$3^x \cdot 27^x = 81,$$
$$3^x \cdot 3^{3x} = 3^4,$$
$$3^{4x} = 3^4,$$
$$4x = 4,$$
$$x = 1.$$

2) Вынесение степени за скобки.
Пример:

$$3^{4x+3} + 2 \cdot 3^{4x+1} - 3^{4x} = 96,$$
$$3^{4x} \cdot \left(3^3 + 2 \cdot 3 - 1\right) = 96,$$
$$3^{4x} \cdot 32 = 96,$$
$$3^{4x} = 3,$$
$$4x = 1,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

3) Введение вспомогательной переменной.
Пример:

$$6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 = 0.$$

Пусть $6^x = t$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 7t + 6 = 0.$$
$$t_1 = 1, \qquad t_2 = 6;$$
$$6^x = 1, \qquad 6^x = 6;$$
$$x = 0, \qquad x = 1.$$

4) Решение однородного уравнения.
Пример:

$$4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0,$$
$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot (3^x)^2 = 0.$$

Так как $(3^x)^2 \neq 0$, разделим обе части на $(3^x)^2$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, получим уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$.

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = -3;$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = -3;$$
$$x = 0, \qquad \text{решений нет.}$$

Показательные неравенства

Задача — свести неравенство к виду $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$, где $\vee$ — это один из знаков неравенства.
После этого (вследствие монотонного убывания или возрастания функции) действует правило:

$$\text{При } a>1, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x),$$
$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x).$$

То есть при $a > 1$ при отбрасывании одинаковых оснований знак сохраняется.

$$\text{При } 0<a<1, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x),$$
$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x).$$

То есть при $0 < a < 1$ при отбрасывании одинаковых оснований знак меняется.

Важно! Если неравенство решается методом введения новой переменной t, то сперва нужно выписать решение для t, после чего сделать обратную замену.
Пример

$$6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 > 0.$$

Пусть $6^x = t$.

$$t^2 - 7t + 6 > 0.$$
$$\left[\begin{array}{l} t>6, \\ t<1. \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} 6^x>6, \\ 6^x<1. \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<0. \end{array}\right.$$

---

4. Логарифмические уравнения и неравенства

ОДЗ логарифма

Логарифмическая функция $\log_a b$ определена при следующих значениях переменных:

$$\begin{cases} a>0; \\ a\neq 1; \\ b>0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений

Важно! При решении уравнения любым способом нужно выполнять проверку или определять ОДЗ.
Как и в показательных уравнениях задача — привести уравнение к одному из следующих видов.

1) С помощью определения логарфима:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a, b > 0, a \neq 1.$$

Пример:

$$\log_2(x+4) = 5,$$
$$x+4 = 2^5,$$
$$x = 28.$$

Проверка. Подставим $x = 28$ в исходное уравнение:

$$\log_2(28+4) = 5,$$
$$\log_2 32 = 5,$$
$$5 = 5.$$

2) Потенциирование:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \quad a, x, y > 0, a \neq 1.$$

Пример:

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-3) = \log_3 2.$$
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>3.$$

Далее:

$$\log_3((x-2)(x-3)) = \log_3 2,$$
$$(x-2)(x-3) = 2,$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$
$$x_1 = 4 \in \text{ОДЗ}, \quad x_2 = 1 \notin \text{ОДЗ}.$$

3) Введение вспомогательной переменной.
Пример:

$$\lg^2 x + \lg x^2 = 3, \qquad \text{ОДЗ: x>0}$$
$$\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0.$$

Пусть $t = \lg x$.

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$
$$t_1 = 1, \qquad t_2 = -3,$$
$$\lg x = 1, \qquad \lg x = -3,$$
$$x = 10, \qquad x = 0{,}001.$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

4) Логарифмирование.
Пример:

$$x^{1+2\lg x} = 10x^2. \qquad \text{ОДЗ: x>0}$$

Поскольку обе части уравнения положительны, логарифмируем:

$$\lg x^{1+2\lg x} = \lg 10x^2,$$
$$(1+2\lg x) \cdot \lg x = 1 + 2\lg x.$$

Пусть $\lg x = t$.

$$
\begin{gathered}
(1+2t)t = 1+2t,\\
(1+2t)(t-1) = 0,\\
t = -1/2, \qquad t = 1,\\
\lg x = -1/2, \quad \lg x = 1,\\
x = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad x = 10.
\end{gathered}
$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Важно! При решении логарифмических уравнений необходимо выполнять проверку. Это можно сделать двумя способами: или подставить полученные решения в исходное уравнение, или найти ОДЗ и проверить, входят ли решения в нее.

Логарифмические неравенства

Приведенные ниже утверждения справедливы при условии, что все переменные удовлетворяют ОДЗ.

При $a > 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) > g(x),$$

При $a < 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) < g(x),$$

Иными словами, знак при отбрасывании логарфима сохраняется, если $a > 1$, и меняется, если $0 < a < 1$.

Случай, когда в исходном неравенстве знак "$<$" аналогичен приведенному выше.

В нестрогих неравенствах знак ($\geqslant, \leqslant$) после отбрасывания логарифма остается нестрогим.

Пример

$$\log_5(3x-1) \leqslant 1.$$

ОДЗ:

$$x > \frac{1}{3}.$$

Представим 1 в правой части неравенства в виде $\log_5 5$.

$$\log_5(3x-1) \leqslant \log_5 5.$$

Так как основание логарифма больше единицы, то при отбрасывании логарифма знак неравенства сохранится.

$$
\begin{gathered}
3x - 1 \leqslant 5,\\
x \leqslant 2.
\end{gathered}
$$

Совмещая с ОДЗ, получим ответ: $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right]$.

5. Метод рационализации для логарифмов

Приведенные ниже утверждения справедливы при условии, что все переменные удовлетворяют ОДЗ.

$$
\begin{aligned}
\log_a b > \log_a c \quad &\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)(b-c) > 0,\\
a^b > a^c \quad &\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)(b-c) > 0.
\end{aligned}
$$

Как обычно, знак неравенства "$>$" во всех неравенствах может быть заменен на любой другой.

Объяснение данных фактов можно найти в этом видео.

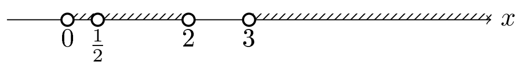
Пример.

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

ОДЗ:

$$
\begin{cases}
2x > 0;\\
2x \neq 1;\\
x^2 - 5x + 6 > 0.
\end{cases}
$$

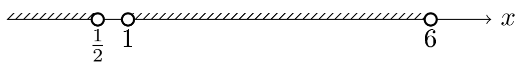
Решение удобно хранить в виде штриховки на оси:



$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x}(2x).$$

Теперь, применяя метод рационализации, приводим исходное неравенство к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
(2x-1)(x^2 - 5x + 6 - 2x) < 0,\\
(2x-1)(x-6)(x-1) < 0.
\end{gathered}
$$



Совмещая решение неравенства и ОДЗ, получим ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.

6. Другие равносильные преобразования

В случае, если в неравенстве присутствует множитель $M(x)$, то его можно заменить на множитель $N(x)$ по следующим правилам:

$M(x)$	$N(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\cdot h$	$(f(x)-g(x))\cdot h$
$(\lvert f(x)\rvert-\lvert g(x)\rvert)\cdot h$	$\left(f^2(x)-g^2(x)\right)\cdot h$
$\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\cdot h$	$(a-1)\,(f(x)-g(x))\cdot h$
$(\log_a f(x)-\log_a g(x))\cdot h$	$(a-1)\,(f(x)-g(x))\cdot h$
$\left(\log_{f(x)} g(x)\right)\cdot h$	$(f(x)-1)\cdot(g(x)-1)\cdot h$

Важно! Выполняя данные преобразования, необходимо отдельно учитывать ОДЗ. Далее обозначение $\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$ подразумевает, что все переменные удовлетворяют ОДЗ.

Примеры:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\leqslant 0 \quad\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\quad \frac{x^2-2x+1-(x^2+x)}{x^2+x-1}\leqslant 0,$$

$$|2x-1|-|5x+4|>0 \quad\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\quad (2x-1)^2-(5x+4)^2>0,$$

$$\frac{x^{x^2-3x-2}-x^{x^2-2}}{3^{3x}-3^{x+1}}>0 \quad\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\quad \frac{(x-1)((x^2-3x-2)-(x^2-2))}{(3x)-(x+1)}>0,$$

$$\log_x(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\geqslant 0. \quad\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\quad (x-1)(10x+3-1)(10x-1)(3x+10-1)\geqslant 0,$$