ТЕМА САМООБРАЗОВАНИЯ

«Подготовка слабовидящих учащихся к ЕГЭ (решение тригонометрических уравнений)»

ВВЕДЕНИЕ

Работая в школе-интернат для слабовидящих, приходится сталкиваться с учащимися, которые имеют различные нарушения зрения. В школу-интернат направляются дети, зрение которых может коррегироваться с помощью оптических средств, а иногда этого сделать нельзя.

В школе учатся дети с различной патологией зрения. Например, часто встречающиеся заболевания: ретинопатия недоношенных, катаракта оперированная, врождённая отслойка сетчатки, глаукома, центральная дистрофия сетчатки, атрофия зрительного нерва, нистагм, амблиопия и т.д.

Ретинопатия недоношенных – заболевание глаз, которое возникает вследствие нарушения развития сетчатки, (происходят изменения в сетчатке и стекловидном теле).

Амблиопия – нарушение зрения, которое не исправляется и присутствует на глазу, который выглядит нормальным. Иногда называют амблиопию «ленивым глазом», но это название не является корректным, т.к. ленивым является не глаз, а зрительные клетки коры головного мозга.

Нистагм – самопроизвольные колебательные движения глазных яблок. Учащийся, который страдает нистагмом, отличается характерным блуждающим взглядом, поэтому возникают трудности концентрирования внимания на каком-либо тексте.

Таких детей приходиться учить. Поэтому важно организовать учебный процесс таким образом, чтобы учащиеся могли при различных испытаниях показать качество образования. Качество образования сводится к качеству обученности. Качество обученности проверяется постоянно в виде промежуточных, диагностических, контрольных, итоговых работ, ЕГЭ.

В основном под качеством образования подразумевают качество знаний по учебным предметам, положительная сдача ЕГЭ, поступление по окончании школы в ВУЗ.

Тема моей методической работы в 2011 – 2012 учебном году , а позже в 2014 – 2015 учебном году «Подготовка слабовидящих учащихся к ЕГЭ (решение тригонометрических уравнений)».

Организация учебного процесса является одним из способов повышения у учащихся качества знаний.

К организации учебного процесса относится не только организация этапов урока, подбор содержания учебного материала, определённые способы подачи, использование наглядности, технических средств обучения. Но также взаимодействие между учителем и учеником, реакция учителя на поступки учащихся. Учитель постоянно обращает внимание на продуктивность мотивации учения, на настроение учащихся во время урока.

На качество знаний очень сильно влияет отработка учебного материала дома, выполнения домашнего задания.

В школе-интернат для слабовидящих, выполнение работы учащимися в классе или дома, контролируется постоянно, на каждом уроке. Проверяется каждое домашнее задание, не обращая внимания на то, что данная работа выполнена учеником 5 класса или 12 класса.

Постоянно находим различные возможности для развития личности. Детям с нарушением зрения оказываем многостороннюю помощь для благоприятного развития способностей.

1. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

В связи с тем, что учащиеся имеют нарушения зрения, записи в тетрадях выполняются медленнее, чем в массовой школе. Наши учащиеся быстрее устают. Поэтому приходиться многие упражнения выполнять устно, не глядя в книгу: «на слух». Тем самым простейшие тригонометрические уравнения нашими учениками решаются быстрее устно, чем письменно, когда записи решения осуществляют в тетрадях. При выполнении каких-либо упражнений устно, не происходит напряжения на глаза.

Чтобы научиться решать некоторые тригонометрические уравнения «на слух» (без записи на доске, не глядя в книгу), приходится обучать учащихся использовать основные формулы в преобразованиях тригонометрических уравнениях и неравенств устно.

Например, отрабатываем «на слух» упражнения типа:

1) привести к тригонометрической функции угла α:

$sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; $tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; $ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

$sin(\pi - \alpha)$; $cos(\pi - \alpha)$; $tg(180° + \alpha)$; $ctg(270° - \alpha)$;

$sin(360° + \alpha)$; $cos(-\alpha + 270°)$; $cos(\alpha - 180°)$;

$sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; $tg^4\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$; $sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) привести к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента (наименьший положительный угол меньше $45°$ или $\frac{\pi}{4}$): $sin\,77°$; $cos\,\frac{7\pi}{8}$; $cos\,\frac{11\pi}{10}$; $tg(-325°)$; $ctg\,220°$; $sin\,4{,}3\pi$;

3) вычислить: $sin\,120°$; $cos\,225°$; $tg\,(-240°)$; $ctg\,(-330°)$; $sin\,\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; $cos\,\frac{5\pi}{4}$; $tg\,\frac{7\pi}{6}$; $ctg\,\frac{11\pi}{6}$;

4) упростить выражения:

$sin\,(30° + \alpha) + sin(30° - \alpha)$;

$cos\,(60° - \alpha) + sin(60° + \alpha)$;

$sin\,(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$;

$sin\,(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$;

$cos\,(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)$;

$cos\,(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)$;

5) упростить выражения:

$sin\,12° \cdot cos\,18° + sin\,18° \cdot cos\,12°$;

$sin\,70° \cdot sin\,50° + cos\,70° \cdot cos\,50°$;

$sin\,4{,}25 \cdot cos\,1{,}11 - sin\,1{,}11 \cdot cos\,4{,}25$;

$sin\,\frac{3\pi}{7} \cdot sin\,\frac{5\pi}{21} - cos\,\frac{3\pi}{7} \cdot cos\,\frac{5\pi}{21}$;

$sin\,\varphi \cdot cos\,2\varphi + cos\,\varphi \cdot sin\,2\varphi$;

6) вычислить: $arcsin\,0$; $arccos\,0$; $arctg\,0$; $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$; $arcctg\,\sqrt{3}$; $arcsin\left(sin\,\frac{\pi}{7}\right)$; $arccos\left(cos\,\frac{1}{3}\right)$; $arctg\left(tg\,\frac{10\pi}{11}\right)$; $arcctg\,(ctg\,5)$. [3]

Выполняем упражнения типа: $arccos\,(sin\,10°)$; $arcsin\left(cos\,\frac{2}{17}\right)$; $arctg\left(ctg\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $arcctg\left(tg\,\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$. [3]

Учимся строить графики функций: $y = \frac{sin\,x}{sin\,x}$; $y = \frac{|sin\,x|}{sin\,x}$; $y = \frac{sin\,|x|}{sin\,x}$; $y = tg\,x \cdot cos\,x$; $y = ctg\,x \cdot sin\,x$; $y = tg\,x \cdot sin\,x$; $y = \frac{sin\,x - sin\,3x}{2cos\,2x}$; $y = \sqrt{cos\,x - 1}$. [4]

Выполняем подготовительные задания, например:

1) решите уравнение $7cos^2\,x - cos\,x - 8 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2}\right]$;

2) найдите все корни уравнения $\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right)(2\sin x - 3) = 0$, удовлетворяющие неравенству $tg\, x < 0$;

3) решите уравнение $\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 1 = 0$ найдите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ \pi]$;

4) решите уравнение $8\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[0;\ \pi]$;

5) решите уравнение $\frac{2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{ctg\, x}} = 0$;

6) решите уравнение $\frac{5}{tg^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$. [9]

В школе предлагаются учащимся листы с напечатанными заданиями крупным шрифтом. Таким образом, ученики не тратят время на переписывание какого-либо примера, и за счёт этого количество выполняемых упражнений увеличивается.

Отрабатываем такого типа уравнения:

$\sin\frac{\pi x}{4} = -1$; $\cos\frac{\pi(2x-5)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\frac{\pi(x+1)}{3} = -\sqrt{3}$. [14]

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{sin\,x + cos\,x} = cos\,2x$.

Решение. Данное уравнение эквивалентно смешанной системе:

$$\begin{cases}(sin\,x + cos\,x) = cos^2 2x, \\ \qquad cos\,2x \geq 0.\end{cases}$$

Пусть $sin\,x + cos\,x = t$. Тогда $cos^2 2x = (cos\,x + sin\,x)^2 \cdot (cos\,x - sin\,x)^2 = t^2(cos^2 x + sin^2 x - 2sin\,x\,cos\,x) = t^2(2cos^2 x + 2sin^2 x - sin^2 x - cos^2 x - 2sin\,x\,cos\,x) = t^2(2 - t^2)$.

Получаем уравнение $t = t^2(2 - t^2)$; $t^4 - 2t^2 + t = 0$. Решая уравнение четвёртой степени, получаем $t(t^3 - 2t + 1) = 0$, корнями являются числа 0 и 1, а также $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Учитывая, что $t = sin\,x + cos\,x$, получаем $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -\sqrt{2}$, данный корень является посторонним корнем, так как $sin\,x + cos\,x = \sqrt{2}\,sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2}; +\sqrt{2}\right]$.

1) Пусть $sin\,x + cos\,x = 0$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.Тогда $cos\,2x = (cos\,x + sin\,x)(cos\,x - sin\,x) = 0 \cdot (cos\,x - sin\,x = 0$ и, значит вся вышеприведённая серия является решением уравнения.

2) Пусть $sin\,x + cos\,x = a > 0$, где a – одно из чисел 1 или $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Из серии $x = (-1)^n\,arcsin\,\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$, выбираем такие x , что $cos\,2x \geq 0$.

Учитываем, что $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому из тех x, для которых $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} > 0$, надо найти такие, что $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$. Получаем либо $x + \frac{\pi}{4} = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$, либо $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

В первой серии $x + \frac{\pi}{4}$ лежит в первой четверти, поэтому все значения x удовлетворяют уравнению. Во второй серии $x + \frac{\pi}{4}$ лежит во второй четверти ($\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$), и ни одно значение x не является решением данного уравнения.

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ 2\pi n,\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$ [7]

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x).$$

Решение. $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x$. Разделим обе части уравнения на два. Получим:

$$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x.$$

В правой части заменим $\frac{1}{2}$ на $\sin\frac{\pi}{6}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}$ – на $\cos\frac{\pi}{6}$, а в левой части $\frac{1}{2}$ – на $\cos\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ – на $\sin\frac{\pi}{3}$. Получаем

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x,$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$-2\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$, откуда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,\\ \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z, \frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$ [3]

Задача 3. Решите уравнение

$$4\cos x\,ctg\,x+4ctg\,x+\sin x=0\,.$$

Решение. Представим котангенс в виде дроби $ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$, приведём левую часть уравнения к общему знаменателю, получим

$$\frac{4\cos^2 x+4\cos x+\sin^2 x}{\sin x}=0.$$

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}3\cos^2 x+4\cos x+1=0,\\ \sin x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\left(\cos x+\frac{1}{3}\right)(\cos x+1)=0,\\ \cos x\neq\pm 1;\end{cases} \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{3},\\ \cos x=-1,\end{array}\right.\\ \sin x\neq 0;\end{cases} \cos x=-\frac{1}{3},$$

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k, k\in Z.$$

Ответ. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k, k\in Z.$ [6]

Задача 4. Решите уравнение $2\,tg^2 x-\frac{7}{\cos x}+8=0$ и укажите те из его корней, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Решение. $tg^2\, x = \frac{sin^2\, x}{cos^2\, x} = \frac{1 - cos^2\, x}{cos^2\, x} = \frac{1}{cos^2\, x} - 1$. Поэтому уравнение перепишем в виде $\frac{2}{cos^2\, x} - \frac{7}{cos\, x} + 6 = 0$. Решим уравнение методом замены переменной.

Пусть $\frac{1}{cos\, x} = a$, тогда уравнение принимает вид

$2a^2 - 7a + 6 = 0$, решая это уравнение получаем, что $a = 2$ или $a = \frac{3}{2}$, таким образом, $\frac{1}{cos\, x} = 2$ или $\frac{1}{cos\, x} = \frac{3}{2}$, откуда $cos\, x = \frac{1}{2}$ или $cos\, x = \frac{2}{3}$. Таким образом, решениями данного уравнения являются все $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, и $x = \pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Отбираем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Из чисел вида $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, данному отрезку принадлежит лишь $x = \frac{\pi}{3}\ (k = 0)$, т.к. при $k \geq 1$ получим, что $x > 2\pi$, а при $k \leq -1$ получим, что $x < -\pi$.

Из чисел вида $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, данному отрезку принадлежит лишь $x = -\frac{\pi}{3}\ (k = 0)$, т.к. при $k \geq 1$ получим, что $x > \pi$, а при $k \leq -1$ получим, что $x < -2\pi$.

Из чисел вида $x = arccos\frac{2}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$, данному отрезку принадлежит лишь $x = arccos\frac{2}{3}\ (m = 0)$, т.к. при $m \geq 1$ получим, что $x > 2\pi$, а при $m \leq -1$ получим, что $x < -\pi$.

Из чисел вида $x = -arccos\frac{2}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$, данному отрезку принадлежит лишь $x = -arccos\frac{2}{3}\ (m = 0)$, т.к. при $m \geq 1$ получим, что $x > \pi$, а при $m \leq -1$ получим, что $x < -2\pi$.

Ответ. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; $\pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$. $-\frac{\pi}{3}$; $-arccos\frac{2}{3}$; $arccos\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{3}$. [9]

Задача 5. Решите уравнение $\frac{sin\,x\,(2sin\,x+1)(\sqrt{2}\,sin\,x-1)}{lg\,(tg\,x)} = 0$.

Решение. Учитывая, что $lg\,(tg\,x) \neq 0;\ tg\,x > 0;\ tg\,x \neq 1$, решаем уравнение $sin\,x\,(2sin\,x + 1)(\sqrt{2}\,sin\,x - 1) = 0$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла. Поэтому $sin\,x = 0$, откуда $x = \pi n,\ n \in Z$. Но $tg\,x > 0;\ tg\,x \neq 1$, следовательно, числа вида $x = \pi n,\ n \in Z$ являются посторонними корнями.

Решаем уравнение $2sin\,x + 1 = 0$; $sin\,x = -\frac{1}{2}$;

$$x = (-1)^k\,arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z;$$

$$x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;$$

таким образом, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ или $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. Обращаем внимание, что $tg\,x > 0;\ tg\,x \neq 1$, следовательно, числа вида $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$, являются посторонними корнями. Получаем, что числа вида $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ являются корнями уравнения.

Решаем ещё одно уравнение $\sqrt{2}\,sin\,x - 1 = 0$, $sin\,x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sin\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^p\,\frac{\pi}{4} + \pi p,\ p \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi p,\ p \in Z$ или $x = \frac{3\pi}{4} + \pi p,\ p \in Z$. Проверяя условие $tg\,x > 0;\ tg\,x \neq 1$, находим, что числа вида $x = \frac{3\pi}{4} + \pi p,\ p \in Z$ являются посторонними корнями, т.к. $tg\,x > 0$, а числа вида $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi p,\ p \in Z$ являются посторонними корнями, т.к. $tg\,x \neq 1$.

Ответ.$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. [9]

Задача 6. Решите уравнение $2 \cdot 16^{\cos x} + 4^{\cos x} - 1 = 0$ и укажите наименьший положительный корень.

Решение. Решаем методом заменой переменной. Пусть $4^{\cos x} = a,$ $a > 0$, тогда $2a^2 + a - 1 = 0$, получаем $a = -1$ или $a = \frac{1}{2}$. Выполняем обратную замену, рассматриваем $a = -1$, т.е. $4^{\cos x} = -1$, но $a > 0$, а $-1 < 0$, поэтому уравнение $4^{\cos x} = -1$ не имеет решений.

Рассматриваем $a = \frac{1}{2}$, т.е. $4^{\cos x} = \frac{1}{2};\ 2^{2\cos x} = 2^{-1};$

$2\cos x = -1; \cos x = -\frac{1}{2};\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Отбираем наименьший положительный корень: $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. $\frac{2\pi}{3}$. [14]

Задача 7. а) Решите уравнение

$$58\cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26\sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \sin 2x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) =$$
$$= 58\cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26\sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right).$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. Упрощаем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, получаем уравнение вида $sin\,2x + cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Преобразовываем это уравнение, воспользовавшись формулой $sin\,2x =$ $= 2sin\,x\,cos\,x$, и формулой приведения $cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -sin\,x$, получаем уравнение

$$2sin\,x\,cos\,x - sin\,x = 0 \text{, решаем его,}$$

$$sin\,x \cdot (2\,cos\,x - 1) = 0\,.$$

Из уравнения $sin\,x = 0$ находим: $x = \pi k, k \in Z$.

Из уравнения $2\,cos\,x - 1 = 0$ находим: $cos\,x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{7\pi}{3}, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}$ и $-\pi$.

Ответ. а) $\pi k, k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

б) $-\frac{7\pi}{3}, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\pi$. [5]

Задача 8. Найдите все решения уравнения

$$2sin\left(x + \frac{7\pi}{25}\right) \cdot sin\left(3x + \frac{18\pi}{25}\right) = cos\,4x + 2^{cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10};\ \frac{4\pi}{5}\right]$.

Решение. Преобразовываем левую часть уравнения:

$$2sin\left(x + \frac{7\pi}{25}\right) \cdot sin\left(3x + \frac{18\pi}{25}\right) = 2sin\left(\pi - \left(\frac{18\pi}{25} - x\right)\right) \cdot$$

$$sin\left(3x + \frac{18\pi}{25}\right) = 2sin\left(\frac{18\pi}{25} - x\right) \cdot sin\left(3x + \frac{18\pi}{25}\right) =$$

$$\frac{2 \cdot cos\left(\frac{18\pi}{25} - x - 3x - \frac{18\pi}{25}\right) - cos\left(\frac{18\pi}{25} - x + 3x + \frac{18\pi}{25}\right)}{2} = cos\,(-4x) -$$

$cos\left(\frac{36\pi}{25}+2x\right)=cos\,4x-cos\left(\pi+\left(\frac{11\pi}{25}+2x\right)\right)=cos\,4x+cos\left(\frac{11\pi}{25}+2x\right)$.

Преобразовываем правую часть данного уравнения:

$$2^{cos\frac{2\pi}{3}}=2^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем уравнение вида

$$cos\,4x+cos\left(\frac{11\pi}{25}+2x\right)=cos\,4x+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решаем это уравнение, получаем $cos\left(\frac{11\pi}{25}+2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{11\pi}{25}+2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; $2x=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{11\pi}{25}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{8}-\frac{11\pi}{50}+\pi k,\ k\in Z$, перепишем значения переменной в виде $x=-\frac{19\pi}{200}+\pi k,\ k\in Z$ и $x=-\frac{69\pi}{200}+\pi n$, $n\in Z$.

Отбираем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10};\frac{4\pi}{5}\right]$, получаем $x=-\frac{19\pi}{200}, x=\frac{131\pi}{200}$.

Ответ. $-\frac{19\pi}{200},\frac{131\pi}{200}$. [15]

Задача 9. Решите уравнение

$$3sin^2x-4sin\,x\,cos\,x+cos^2x=0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. Данное уравнение является однородным уравнением. Никогда одновременно $sin\,x$ и $cos\,x$ не будут равняться нулю. Поэтому разделим левую и правую части уравнения на cos^2x. Получаем уравнение вида $3tg^2x-4tg\,x+1=0$. Решая его, получаем $tg\,x=1$ или

$tg\, x = \frac{1}{3}$, поэтому $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = arctg\,\frac{1}{3} + \pi n,$ $n \in Z$.

С помощью числовой окружности, находим корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Если $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$, то $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{9\pi}{4}$. Если $x = arctg\,\frac{1}{3} + \pi,\ n \in Z$, то $x = arctg\,\frac{1}{3} + \pi$, $x = arctg\,\frac{1}{3} + 2\pi$.

Ответ. $arctg\,\frac{1}{3} + \pi$; $\frac{5\pi}{4}$; $arctg\,\frac{1}{3} + 2\pi$; $\frac{9\pi}{4}$. [10]

Задача 10. Решите уравнение $\left(2cos^2 x - cos\, x\right)\sqrt{-11tg\, x} = 0$.

Решение. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2cos^2 x - cos\, x = 0, \\ tg\, x < 0, \\ cos\, x \neq 0, \end{cases} \\ tg\, x = 0. \end{array}\right.$$

Решаем уравнение $2cos^2 x - cos\, x = 0$, получаем $cos\, x = \frac{1}{2}$ или $cos\, x = 0$. Но $cos\, x \neq 0$, поэтому решаем уравнение $cos\, x = \frac{1}{2}$, получаем $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. Решением уравнения $cos\, x = \frac{1}{2}$ соответствуют две точки единичной окружности, одна из которых лежит в первой четверти (и значит, для неё неравенство $tg\, x < 0$ не выполняется), а другая – в четвёртой четверти (для неё неравенство $tg\, x < 0$ выполняется). Поэтому решением этого уравнения являются числа вида $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Решаем уравнение $tg\, x = 0$, $x = \pi k,\ k \in Z$.

Ответ. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; $\pi k,\ k \in Z$. [8]

Задача 11. Решите уравнение $5sin\,5x - 3sin\,7x = 8$.

Решение. Учитывая, что $|sin\,\alpha| \le 1$, то данное уравнение выполняется, если одновременно $\begin{cases} sin\,5x = 1, \\ sin\,7x = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 7x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{10}(4n + 1), \\ x = \frac{\pi}{14}(4k + 3). \end{cases}$

Находим общее решение этой системы:

$$\frac{\pi}{10}(4n + 1) = \frac{\pi}{14}(4k + 3),$$

$\frac{(4n+1)}{5} = \frac{(4k+3)}{7}$, $28n + 7 = 20k + 15$, $28n = 20k + 8$,

$$7n = 5k + 2.$$

Чтобы n было целым, необходимо, чтобы $k - 1$ было кратно 7 , т.е. $k - 1 = 7p$, или $k = 7p + 1$, тогда $x = \frac{\pi}{14}(4k + 3) = \frac{\pi}{14}(4(7p + 1) + 3) = \frac{\pi}{14}(28p + 7) = \frac{\pi}{2}(4p + 1),\ p \in Z$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}(4p + 1),\ p \in Z$. [2]

Задача 12. Решите уравнение $\frac{3}{cos^2 x} + 1 = \frac{7sin\,x}{|cos\,x|}$.

Решение. Воспользуемся формулой $1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2 x}$, тогда

$$\frac{3}{cos^2 x} = 3(1 + tg^2x).$$

Данное уравнение примет вид:

$3(1 + tg^2x) + 1 = \frac{7sin\,x}{|cos\,x|}$, $3tg^2x + 4 = \frac{7sin\,x}{|cos\,x|}$.

Возможны два случая:

1) $cos\,x > 0$, тогда $|cos\,x| = cos\,x$ и уравнение

$3tg^2x + 4 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}$, примет вид $3tg^2x + 4 = 7\,tg\,x,$

$3tg^2x - 7tg\,x + 4 = 0$. Решая это уравнение, получаем, что $tg\,x = \frac{4}{3}$ или $tg\,x = 1$.

Если $tg\,x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. Учитывая, что $\cos x > 0$, получаем $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Если $tg\,x = \frac{4}{3}$, то $x = arctg\,\frac{4}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Учитывая, что $\cos x > 0$, получаем $x = arctg\,\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2) $\cos x < 0$, тогда $|\cos x| = -\cos x$ и уравнение $3tg^2x + 4 = \frac{7\sin x}{|\cos x|}$, примет вид $3tg^2x + 4 = 7\,tg\,x,$

$3tg^2x + 7tg\,x + 4 = 0$. Решая это уравнение, получаем, что $tg\,x = -1$ или $tg\,x = -\frac{4}{3}$.

Если $tg\,x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. Учитывая, что $\cos x < 0$, получаем $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Если $tg\,x = -\frac{4}{3}$, то $x = -arctg\,\frac{4}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Учитывая, что $\cos x < 0$, получаем $x = \pi - arctg\,\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ arctg\,\frac{4}{3} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $\pi - arctg\,\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. [2]

Задача 13. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x$.

Решение. Должно выполняться неравенство $\sin x \geq 0$, получаем

$$2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ. $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. [1]

Задача 14. Решите уравнение $|tg\,x| + ctg\,x = \frac{1}{2} lg\,sin\,\frac{\pi}{2}$.

Решение. Находим область определения данного уравнения:

$cos\,x \neq 0$ и $sin\,x \neq 0$, получаем $x \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

1) Рассмотрим случай, когда $tg\,x \geq 0$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} tg\,x \geq 0, \\ tg\,x + ctg\,x = \frac{1}{2} lg\,sin\,\frac{\pi}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} tg\,x \geq 0, \\ tg\,x + ctg\,x = \frac{1}{2} lg\,1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} tg\,x \geq 0, \\ \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin\,x\,cos\,x} = 0 \end{cases}; \begin{cases} tg\,x \geq 0, \\ \frac{1}{sin\,x\,cos\,x} = 0 \end{cases}; \begin{cases} tg\,x \geq 0, \\ \frac{2}{sin\,x\,cos\,x} = 0 \end{cases};$$ – решений нет.

2) Рассмотрим случай, когда $tg\,x < 0$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} tg\,x < 0, \\ -tg\,x + ctg\,x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} tg\,x < 0, \\ -\frac{sin\,x}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{sin\,x} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} tg\,x < 0, \\ \frac{cos^2 x - sin^2 x}{sin\,x\,cos\,x} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} tg\,x < 0, \\ \frac{cos\,2x}{\frac{1}{2} sin\,2x} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} tg\,x < 0, \\ 2ctg\,2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} tg\,x < 0, \\ ctg\,2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} tg\,x < 0, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} tg\,x < 0, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z \end{cases};$$ получаем $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. [1]

Задача 15. а). Решите уравнение

$$3sin\,2x - 4cos\,x + 3sin\,x - 2 = 0.$$

б). Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а). Преобразовываем данное уравнение

$$3 \cdot 2\,sin\,x\ cos\,x - 4cos\,x + 3sin\,x - 2 = 0;$$

$$3sin\,x\,(2\,cos\,x + 1) - 2(2\,cos\,x + 1) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(3\sin x - 2) = 0 .$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

1) $2\cos x + 1 = 0;\ \cos x = -\frac{1}{2};\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z .$

2) $3\sin x - 2 = 0;\ \sin x = \frac{2}{3};\ x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k, k \in Z;$

$x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in Z .$

б). Отбираем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Получаем $x = \frac{2\pi}{3};\ x = \frac{4\pi}{3};\ x = \pi - \arcsin\frac{2}{3}$.

Ответ. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ ; \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

б) $\frac{2\pi}{3};\ \pi - \arcsin\frac{2}{3};\ \frac{4\pi}{3}$. [11]

Задача 16. а). Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0 .$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. [12]

Решение. а). Находим область определения данного уравнения:

$$2\cos x - \sqrt{3} \neq 0 ; \cos x \neq \sqrt{3} ;$$

$x \neq \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z; x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Преобразовываем данное уравнение

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 ; \sin x\,(2\sin x - 1) = 0 ;$$

1) $\sin x = 0 ; x = \pi k, k \in Z$;

2) $2\sin x - 1 = 0 ; \sin x = \frac{1}{2} ; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Получаем, учитывая, что $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, $x = \pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности, находим корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Данному отрезку принадлежат корни $2\pi, \frac{17\pi}{6}$, 3π .

Ответ. а) $\pi k,$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $2\pi, \frac{17\pi}{6}, 3\pi$.

Задача 17. а). Решите уравнение

$$\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} sin\, x} .$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. [12]

Решение. а). Преобразовываем данное уравнение

$16^{sin\, x \cdot \cos x} = 4^{-\sqrt{3} sin\, x}$; $4^{2 sin\, x \cdot \cos x} = 4^{-\sqrt{3} sin\, x}$;

$2\, sin\, x \cdot cos\, x = -\sqrt{3} sin\, x$; $2\, sin\, x \cdot cos\, x + \sqrt{3} sin\, x = 0$;

$sin\, x \left(2\, cos\, x + \sqrt{3}\right) = 0$;

1) $sin\, x = 0$; $x = \pi k, k \in Z$;

2) $2 cos\, x + \sqrt{3} = 0$; $cos\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \pm arccos\left(\pi - arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$;

$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) На числовой окружности находим корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Данному отрезку принадлежат корни $2\pi, \frac{17\pi}{6}, 3\pi, \frac{19\pi}{6}$.

Ответ. а) $\pi k,$; $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $2\pi, \frac{17\pi}{6}, 3\pi, \frac{19\pi}{6}$.

Задача 18. а). Решите уравнение

$$cos\,2x + 2cos^2 x - sin\,2x = 0 .$$

б). Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$. [12]

Решение. а). Преобразовываем данное уравнение

$$cos^2 x - sin^2 x + 2cos^2 x - 2\,sin\,x \cdot cos\,x = 0 ;$$

$$3cos^2 x - sin^2 x - 2\,sin\,x \cdot cos\,x = 0 .$$

Данное уравнение является однородным уравнением. Никогда одновременно $sin\,x$ и $cos\,x$ не будут равняться нулю. Поэтому разделим левую и правую части уравнения на $cos^2 x$. Получаем уравнение вида

$$3 - tg^2 x - 2\,tg\,x = 0 ; tg^2 x + 2\,tg\,x - 3 = 0 .$$

Применим метод замены переменной.

Пусть $tg\,x = a$, тогда получаем уравнение $a^2 + 2a - 3 = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a = -3, \\ a = 1 . \end{array}\right.$

Применяем обратную замену, тогда $\left[\begin{array}{l} tg\,x = -3, \\ tg\,x = 1; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = -arctg\,3 + \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z . \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Данному отрезку принадлежат корни $2\pi - arctg\ 3,\ \frac{9\pi}{4}$.

Ответ. а) $-arctg\ 3 + \pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$;

б) $2\pi - arctg\ 3,\ \frac{9\pi}{4}$.

Задача 19. а). Решите уравнение

$$\frac{1}{tg^2\, x} + \frac{7}{tg\, x} + 5 = \ 0 \,.$$

б). Укажите корни, принадлежащие промежутку $[3\pi;\ 4\pi]$. [13]

Решение. а). Воспользуемся методом замены переменной, введём $\frac{1}{tg\, x} = a$, тогда $2a^2 + 7a + 5 = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Обратная замена приводит к совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{tg\, x} = -1, \\ \frac{1}{tg\, x} = -\frac{5}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\, x = -1, \\ tg\, x = -\frac{2}{5}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z, \\ x = -arctg\ \frac{2}{5} + \pi k,\ k \in Z\,. \end{array}\right.$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие промежутку $[3\pi;\ 4\pi]$.

Данному отрезку принадлежат корни $\frac{15\pi}{4};\ 4\pi - arctg\ \frac{2}{5}$.

Ответ. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ -arctg\ \frac{2}{5} + \pi k,\ \ k \in Z$;

б) $\frac{15\pi}{4};\ 4\pi - arctg\ \frac{2}{5}$.

Задача 20. а). Решите уравнение

$$(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0 .$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. [13]

Решение. а). Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, другой при этом не теряет смысла. В силу этого

1) $2x^2 - 5x - 12 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

2) $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) Находим корни, с помощью числовой окружности, принадлежащие промежутку $[3\pi;\ 4\pi]$.

Данному отрезку принадлежат корни $-\frac{3}{2};\ \frac{2\pi}{3}$.

Ответ. а) $-\frac{3}{2}; 4;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

б) $-\frac{3}{2};\ \frac{2\pi}{3}$.

Задача 21. а). Решите уравнение

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 .$$

б). Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{3}\right]$. [13]

Решение. а). Выполним преобразования, которые приводят данное уравнение к квадратному уравнению $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$, решая его , получаем совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1, \\ \cos 2x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array}\right. ; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z .$$

б) С помощью числовой окружностин находим корни, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

Данному отрезку принадлежат корни $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}$.

Ответ. а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k, k\in Z$;

б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди детей с нарушениями зрения, снижение умственной работоспособности нельзя объяснить снижением одарённости и способности. Возникает необходимость находить возможности для благоприятствующего формирования, развития, становления личности и предоставления разносторонней помощи слабовидящим учащимся.

Такой помощью является организация педагогических мероприятий, например, как проведение коррекционных занятий, на которых можно уделить внимание различным задачам. Тем самым увлечь детей математикой, дополнить обязательную учебную работу и способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, который предусмотрен программой.

Решение задач стимулирует развитие аккуратности, наблюдательности, силы воли, самостоятельности, развитие наглядно-образного мышления, а также становления творческих способностей обучающихся, повышение мотивации к учебной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э.Н. Комплексные упражнения по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам (с решениями): 7 – 11 классы. – Ростов н/Д : Феникс, 2010.
2. Балаян Э.Н. Сборник задач по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам: задачи повышенной сложности: 9 – 11 классы. – Ростов н/Д : Феникс, 2010.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. – М. : АСТ-ПРЕСС : Магистр-S, 1998.
4. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажёр: Пособие для школьников и абитуриентов. – М. : Илекса, Харьков : Гимназия, 1998.
5. Семёнов А.В., Трепалин А.С., Ященко И.В. ЕГЭ по математике: завершающий этап подготовки. – М. : МЦНМО, 2012.
6. Сергеев И.Н., Панфёров В.С. ЕГЭ: 1000 задач с ответами и решениями по математике. Все задания группы С «Закрытый сегмент». – М. : Издательство «Экзамен», 2013.
7. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. – 10-е изд., исправленное и дополненное. – М. : МЦНМО, 2003.
8. Шестаков С.А., Захаров П.И., ЕГЭ 2011. Математика. Задача С 1. / Под ред. А.Л.Семёнова и И.В.Ященко. – М. : МЦНМО, 2011.
9. Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2012 году. Методические указания. – М. : МЦНМО, 2012.
10. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/ под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М. : Национальное образование, 2011. – (ЕГЭ-2012. ФИПИ – школе).

11. ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/ под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М. : Издательство «Национальное образование», 2012. – (ЕГЭ-2013. ФИПИ – школе).

12. ЕГЭ-2015. Математика. 30 вариантов типовых текстовых заданий и 800 заданий части 2 / И.Р.Высоцкий, П.И.Захаров, В.С.Панфёров, С.Е.Посицельский, А.В.Семёнов, под ред. И.В.Ященко. – М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2015.

13. ЕГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В.Ященко. – М. : Издательство Национальное образование», 2015.

14. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2012. Математика. Учебное пособие. / А.В.Семёнов, А.С.Трепалин, И.В.Ященко, П.И.Захаров; под ред. И.В.Ященко; Московский центр непрерывного математического образования. – М. : Интеллект – Центр, 2012.

15. Вступительные экзамены в ВУЗы. Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова. Журнал «Математика в школе», 2008, № 1.

СОДЕРЖАНИЕ