Текстовые задачи

1. В театре 16 рядов, в первом ряду 10 мест, в последнем – 70. Известно, что каждый следующий ряд имеет на одно и то же число мест больше, чем предыдущий. Сколько всего мест в театре?
   А) 640; Б) 360; В) 720; Г) так не может быть.
2. Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй – за 2 дня, третий – за 3 дня, четвертый – за 4 дня. Сколько времени потребуется четырем источникам вместе, чтобы заполнить бассейн? (задача Герона Александрийского, I в. до н.э.)
   А) 10 дней; Б) 4 дня; В) $\frac{25}{12}$ дня; Г) $\frac{12}{25}$ дня.
3. Цена на книгу сначала увеличилась на 20%, а потом снизилась на 20% (от новой цены). Сравнить первоначальную цену и итоговую.
   А) первоначальная выше; Б) равны; В) итоговая выше.
4. Марии 12 лет. Она вдвое младше, чем будет Ивану, когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас. Сколько лет Ивану?
   А) 18; Б) 12; В) нельзя найти.
5. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два велосипедиста. При этом скорость второго была вдвое больше, чем скорость первого. Каждый из них, прибыв в пункт В, сразу повернул обратно. Первый велосипедист обратный путь проехал с той же скоростью. На обратном пути скорость второго была вдвое меньше, чем скорость первого. Кто из них раньше вернулся в пункт А?
   А) первый; Б) второй; В) одновременно.
6. Что больше 5% от 10% заданного числа или 10% от его 5%
   А) первое; Б) второе; В) равны; Г) зависит от числа.
7. В центре прямоугольного листа бумаги размером 20×10 вырезана прямоугольная дыра. Периметр дыры равен 20. Найти длину диагонали дыры, если известно, что площадь дыры максимальная среди возможных прямоугольных дыр с тем же периметром.
   А) 5; Б) $10\sqrt{2}$; В) $5\sqrt{2}$; Г) нельзя найти.
8. Автомобиль ехал некоторое время со скоростью 100 км/ч, а потом еще столько же времени – со скоростью 90 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.
   А) 190 км/ч; Б) 95 км/ч; В) 90 км/ч; Г) 10км/ч.
9. Производительность труда на производстве повысилась на 30%. На сколько процентов сократилось время, затрачиваемое на тот же объем работы?
   А) $23\frac{1}{13}$; Б) $76\frac{12}{13}$; В)30; Г) $7\frac{9}{13}$.

Ответы:

1. Согласно условию, количества мест в рядах образуют арифметическую прогрессию. Такая ситуация так как разность этой прогрессии является натуральным числом: $\frac{70-10}{16-1}=4$. Всего мест $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{10+70}{2}\cdot 16=640$.
2. $\frac{12}{25}$ дня. $\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{25}$.
3. Если начальная цена равна t, то цена после повышения составляет $t+\frac{20}{100}t=\frac{6}{5}t$, а после понижения $\frac{6}{5}t-\frac{20}{100}\cdot\frac{6}{5}t=\frac{24}{25}t<t$, то есть итоговая цена меньше первоначальной.
4. Пусть сейчас Ивану x лет. Когда Марии будет x лет, Ивану будет 24 года. Так как разница в возрасте Ивана и Марии постоянна, то $x-12=24-x$; $x=18$. Сейчас Ивану 18 лет.
5. Первый раньше вернулся в пункт А. Если расстояние от А до В S, а скорость первого велосипедиста x км/ч, то время, затраченное на поездку 1 велосипедистом, равно $\frac{2S}{x}$. Время, затраченное на всю поездку 2 велосипедистом, равно $\frac{S}{2x}+\frac{2S}{x}=\frac{5S}{2x}=2{,}5\frac{S}{x}$.
6. Пусть дано число x. Тогда 5% от его 10% равно $\frac{5}{100}\left(\frac{10}{100}x\right)$, а 10% от его 5% равно $\frac{10}{100}\left(\frac{5}{100}x\right)$, то есть тому же числу.
7. Среди прямоугольников одного периметра максимальную площадь имеет квадрат. Поэтому дыра имеет квадратную форму. Так как ее периметр равен 20, то сторона имеет длину 5, значит, длина диагонали равна $5\sqrt{2}$.
8. Пусть 2S (км) – длина всего пути. Первую половину пути автомобиль проехал за $\frac{S}{100}$ часов, а вторую – за $\frac{S}{90}$ часов. Средняя скорость равна отношению длины всего пути к суммарному затраченному времени: $V_{ñð.}=\frac{2S}{\frac{S}{100}+\frac{S}{90}}=\frac{2}{\frac{1}{100}+\frac{1}{90}}=\frac{1800}{19}$ (км/ч)
9. Пусть A – объем производимой работы, V – исходная производительность труда. Тогда $\frac{A}{V}$ - время, затраченное до повышения производительности, $V+\frac{30}{100}V=\frac{13}{10}V$ - повышенная производительность. Время, затраченное после повышения производительности, равно $\frac{A}{13/10\,V}=\frac{10A}{13V}$. Это время составляет $\frac{10}{13}$ исходного времени, что на $100\cdot\frac{3}{13}\%=23\frac{1}{13}\%$ меньше.

Работа, производство, технология

Между величинами, описывающими равномерное движение и величинами, характеризующими процесс работы, имеется полная аналогия. Эту аналогию удобно представить в виде следующей таблицы:

Движение	Путь - S	Время движения - t	Скорость движения $V=\frac{S}{t}$
Работа	Вся работа - A	Время работы - t	Скорость работы (производительность) $p=\frac{A}{t}$

Почему же мы разделяем текстовые задачи на движение и на работу? Дело в том, что имеется одно существенное отличие между этими типами задач: при совместной работе нескольких объектов, выполняющих однородную работу, их общая производительность является суммой производительностей отдельных объектов, в задачах на «движение» такого эффекта нет.

Кроме того, во многих задачах на работу точный характер этой работы не определяется. В таких случаях бывает удобным принять объем всей работы за единицу и измерять части этой работы в долях от единицы.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

1. В рукописи 42 страницы. Одна машинистка перепечатает рукопись за 3 часа, а вторая за 6 часов. За сколько часов машинистки перепечатают рукопись при совместной работе?
2. Токарь может обточить 72 заготовки за 3 ч, а его ученику на выполнение той же работы требуется в 2 раза больше времени. За сколько часов они обточат 144 такие же заготовки при совместной работе?

Вводные задачи 1 и 2 содержат лишние данные и имеют целью подготовить школьников к решению задач на совместную работу. Рекомендуем к таким задачам отнестись со всем вниманием.

3. В цехе поставили автомат, производительность которого была на 8 деталей в час выше производительности рабочего. После двух часов работы автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

x дет/ч – производительность рабочего,

(x+8) дет/ч – производительность автомата

$2(x+8)=6x$; $x=4$. 12 дет/ч – производительность автомата.

4. Одна машинистка печатает страницу за 6 мин, а другая – за 10 минут. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка? Сколько страниц распечатает за это же время принтер, производительность которого на 50% больше?

$\frac{1}{6}$ стр./мин – производительность 1 машинистки, тогда $150\div\frac{1}{6}=900$ мин. время работы. $\frac{1}{10}$ стр./мин – производительность 2 машинистки, $900\cdot\frac{1}{10}=90$ стр. отпечатала 2 машинистка.

5. В январе два цеха изготовили 1080 деталей. В феврале первый цех увеличил выпуск деталей на 15%, второй на 12%, оба цеха изготовили 1224 детали. Сколько деталей изготовил в феврале каждый цех?

Пусть x деталей изготовил в январе 1 цех, у деталей – 2 цех,

$$\begin{cases} x+y=1080, \\ 1{,}15x+1{,}12y=1224 \end{cases} \quad x=480,\ y=600.$$

$480\cdot 1{,}15=552, \quad 600\cdot 1{,}12=672$

6. Мастерская в определенный срок должна выпустить 5400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар больше, чем предполагалось, и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

Пусть х пар/день план мастерской, $\frac{5400}{x+30}+9=\frac{5400}{x}$, $x=120$.

Ответ: 36 дней.

7. Лена набирала на компьютере рукопись книги. Ей надо было набирать по 20 страниц в день, чтобы успеть выполнить работу к сроку. Она же набирала ежедневно на 2 страницы больше, поэтому в последний день ей осталось набрать 6 страниц. Сколько страниц было в рукописи?

Пусть х страниц было в рукописи, $\frac{x}{20}-\frac{x-6}{22}=1$, $x=160$

8. Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объем земляных работ за 3 ч 45 минут. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объем работ на 4 часа быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объема земляных работ?

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=3\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{x}+4=\frac{1}{y} \end{cases} \quad x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{10}$$

. Ответ: 6часов, 10 часов.

9. Одна из дорожных бригад может заасфальтировать некоторый участок дороги на 4 часа быстрее, чем другая. За сколько часов может заасфальтировать участок каждая бригада, если известно, что за 24 часа совместной работы они заасфальтировали 5 таких участков?

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+4=\frac{1}{y}, \\ \frac{5}{x+y}=24; \end{cases} \quad x=\frac{1}{8},\ y=\frac{1}{12}$$

Ответ: 8 ч и 12 ч

10. Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая ее, открыли вторую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

Обозначим х - время в часах, за которое наполняет бассейн одна первая труба, вторая – у. Тогда $x=1{,}5y$. $\frac{1}{x}$ - часть бассейна, наполняемая первой трубой за 1 час, $\frac{1}{y}$ - часть бассейна, наполняемая второй трубой за 1 час, $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ - часть бассейна, наполняемая обеими трубами за 4 часа.

$$\begin{cases} x = 1{,}5y, \\ 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{x} = 1; \end{cases} \quad y = 8, x = 12$$

11. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы, один из них был переведен на другой участок, второй закончил работу, проработав еще 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

Пусть x и y – производительности 1 и 2 рабочего, V – объем работы, $V = V_1 + V_2$, где $V_1 = 7(x + y)$, а $V_2 = 9y$ и $V = 10(x + y)$. Подставляя значения в полученное равенство, получим $x = 2y$. Необходимо найти $\frac{V}{x} = \frac{V_1 + V_2}{x} = \frac{30y}{x} = \frac{30y}{2y} = 15$, аналогично $\frac{V}{y} = 30$. Ответ: 15 и 30 дней.

12. Отряд механизаторов в весеннее-посевную кампанию в первый день вспахал 100 га пашни, а в каждый следующий день – на 3 га больше, чем в предыдущий. Найти, сколько гектаров пашни отряд механизаторов вспахал за 19 дней.

Есть арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 100$ и разностью $d = 3$, найти сумму первых 19 членов арифметической прогрессии.

$a_{19} = 100 + 3 \cdot 18 = 154$; $S_{19} = \frac{100 + 154}{2} \cdot 19 = 2413$. Ответ: 2413 га.

13. Бак заполняют керосином за 2 часа 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3:5:8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 час 18 минут совместной работы второго и третьего насосов?

Так как объем бака не указан, примем его за 1. Пусть коэффициент пропорциональности равен x, тогда производительности насосов равны 3x,5x, 8x. И время наполнения бака при совместной работе всех трех насосов равно $\frac{1}{3x + 5x + 8x} = \frac{1}{16x}$.

$\frac{1}{16x} = 2{,}5$, $x = \frac{1}{40}$. Производительность второго насоса равна $\frac{1}{40} \cdot 5 = \frac{1}{8}$. Производительность третьего насоса - $\frac{1}{40} \cdot 8 = \frac{1}{5}$. Совместная производительность второго и третьего насосов - $\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40}$. За 1 час 18 минут второй и третий насосы наполнят $\frac{13}{40} \cdot 1\frac{18}{60} = \frac{13}{40} \cdot 1{,}3 = \frac{16{,}9}{40} = 0{,}4225$ объема бака.

Ответ: 42,25.

Задачи с экономическим содержанием

1. Зарплату повысили на р%. Затем новую зарплату повысили на 2р%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

Пусть исходная зарплата составляла а рублей. Тогда после первого повышения она стала равна $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей. После второго повышения (на 2р%) зарплата стала равна

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{2p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{2p}{100}\right)$$ рублей.

По условию задачи эта величина равна 1,32а.

Получаем уравнение: $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{2p}{100}\right)=1{,}32.$ $p=10$

Ответ: 20.

2. Первоначальная цена товара на торгах повышалась несколько раз на одно и то же количество рублей. После третьего повышения цена равнялась 1200 рублей, а после двенадцатого повышения – 1650 рублям. Через сколько повышений первоначальная цена удвоилась?

Пусть х – первоначальная цена товара на торгах. Пусть после первого повышения цена стала х+а рублей, после второго х+2а рублей и после третьего повышения цена стала равной х+3а рублям, что по условию равно 1200 рублям. Т.е. $x+3a=1200$. После двенадцатого повышения цена стала равной $x+12a=1650.$ Отсюда $9a=450$ и $a=50.$ Следовательно, $x=1200-3\cdot 50=1050$. Теперь пусть число повышений равно n. Составим равенство: $1050+50n=2100$. Отсюда $n=21.$ Следовательно, цена товара удвоится через 21 повышение первоначальной цены.

Ответ: 21.

3. На рынке костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20% дешевле, чем такой же костюм в магазине, причем брюки стоят на 35% дешевле, чем в магазине, а пиджак – на 10%. Сколько процентов стоимости этого костюма в магазине составляет стоимость пиджака?

Пусть х рублей стоит пиджак в магазине, а у рублей стоят брюки в магазине, тогда на рынке пиджак стоит 0,9х рублей, а брюки – 0,65 у рублей.

Тогда $0{,}9x+0{,}65y=0{,}8(x+y)$, т.е. $y=\frac{2}{3}x$.

$$\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=0{,}6$$

Ответ: 60.

4. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в январе завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в декабре того же года – 726 изделий.

600(1+а) - увеличение продукции завода в первый раз, $600(1+a)^2$ – увеличение во второй раз. Следовательно, $600(1+a)^2=726$, $a=0{,}1$.

Ответ: 10.

5. После двух повышений зарплата увеличилась в 1,43 раза. При этом число процентов, на которое повысилась зарплата во второй раз, было в 3 раза

больше, чем в первый раз. На сколько процентов повысилась зарплата во второй раз?

Пусть х рублей – первоначальная зарплата. Тогда $x(1+a)$ рублей зарплата после первого повышения, $x(1+a)+x(1+a)b = x(1+a)(1+b)$ рублей зарплата после второго повышения. Следовательно, $\begin{cases} x(1+a)(1+b) = 1{,}43x, \\ b = 3a, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0{,}1, \\ b = 0{,}3. \end{cases}$

Ответ: 30.

6. За первый год предприятие увеличило выпуск продукции на 8%. В следующем году выпуск увеличился на 25%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

Пусть х изделий – плановый выпуск продукции, 1,08х – выпуск продукции в конце первого года, 1,08х+1,08х $\cdot\,0{,}25$ =1,35х

Ответ: 35.

7. В течение календарного года зарплата каждый месяц повышалась на одно и то же число рублей. За июнь, июль, август зарплата в сумме составила 9900 рублей, а за сентябрь, октябрь и ноябрь – 10350 рублей. Найдите сумму зарплат за весь год.

Пусть в январе зарплата составила $x+a$ рублей, в феврале - $x+2a$ и т.д.Тогда сумма за июнь, июль, август составит - $x+6a+x+7a+x+8a$, а сумма за сентябрь, октябрь, ноябрь составит $x+9a+x+10a+x+11a$. Получаем систему уравнений:

$\begin{cases} 3x+21a = 9900, \\ 3x+30a = 10350, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 50, \\ x = 2950. \end{cases}$

Так как мы имеем дело с арифметической прогрессией, то $S = \dfrac{(x+a)+(x+12a)}{2}\cdot 12$.

$S = 6\cdot(3000+2950+12\cdot 50) = 6\cdot 6550 = 39300.$

Ответ: 39300.

8. Акциями предприятия владеют фирмы А,В и С. Количество их акций находится в отношении 4:12:9 и составляет 75% от числа всех выпущенных акций. Остальными 350000 акций владеют работники этого предприятия. Сколько акций имеет каждая из фирм?

Пусть х – количество всех выпущенных акций. Тогда $0{,}25x = 350000$. Следовательно, $x = 1400000$. Но $\frac{3}{4}x = 25a$, $a = 0{,}03x$. Тогда фирма А владеет $4a = 0{,}12x = 168000$ акций, фирма В владеет $12a = 0{,}36x = 504000$ акций, фирма С владеет $9a = 0{,}27x = 378000$ акций.

Ответ: 168000,504000 и 378000 акций

9. За 10 дней Карл украл у Клары 165 кораллов и из них 147 – в первые 7 дней. Каждый день он крал на одно и то же число кораллов меньше, чем в предыдущий день. Сколько кораллов Карл украл в десятый день?

Пусть x кораллов украл Карл в 1 день, тогда во 2 день - $x-a$, в 3 день - $x-2a$, в 4 день - $x-3a,$ и т.д., в 10 день - $x-9a$ кораллов. В первые семь дней - $\dfrac{x+x-6a}{2}\cdot 7 = 147$ кораллов, в последние три дня - $x-7a+x-8a+x-9a = 165-147$ кораллов. Получаем: $\begin{cases} 7x-21a = 147, \\ 3x-24a = 18, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 3, \\ x = 30. \end{cases}$

В десятый день Карл украл - $x-9a=30-27=3$ коралла.
Ответ: 3.

10. Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 200 рублей, а окончательная 338 р.?
11. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 35% больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 20%, а ботинки на 70%, Сколько процентов от стоимости лыж с ботинками составляла два года назад стоимость лыж?
12. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 7:6:5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?
13. При подготовке к экзамену ученик каждый день увеличивал количество решенных задач на одно и то же число. С 3 мая по 6 мая включительно он решил 24 задачи, а с 5 мая по 10 мая – 72 задачи. Сколько задач ученик решил с 3 мая по 10 мая включительно?
14. При подготовке к экзамену ученик каждый день с 1 по 8 июня включительно увеличивал количество решенных задач на одно и то же число. С 1 июня по 4 июня включительно он решил 24 задачи, а с 2 июня по 6 июня – 45 задач. Сколько задач ученик решил 8 июня?
15. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена товара, если выставленный на продажу за 8000 рублей, он через три месяца стал стоить 4096 рублей.
16. Вкладчик сначала снял со своего счета в сбербанке $\frac{1}{5}$ своих денег, потом $\frac{5}{16}$ оставшихся и еще 999 рублей. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{1}{4}$ всех денег. Каким был первоначальный вклад?
17. Заработные платы рабочего за январь и февраль относятся как 9:8, а за февраль и март как 6:8. За март он получил на 450 рублей больше, чем за январь, и за перевыполнение квартального клана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найдите размер премии

Задачи на смеси и сплавы

Текстовые задачи на смеси и сплавы при всей их кажущейся простоте часто вызывают проблемы у выпускников. При решении таких задач приходится работать со следующими понятиями:

- Абсолютное содержание вещества в смеси;
- Относительное содержание вещества в смеси.

Абсолютное содержание вещества в смеси – это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т.д.). Относительное содержание вещества в смеси – это отношение абсолютного содержания к общей массе смеси. Часто относительное содержание называют концентрацией или процентным содержанием. При этом используются различные формы записи относительного содержания вещества: в долях и в процентах. Например, относительное содержание $0{,}05 = \frac{1}{20} = 5\%.$

Чтобы проиллюстрировать эти понятия, предположим, что в сосуд, содержащий 450 г воды, добавили 50 г соли. Таким образом, общая масса получившегося раствора 500 г. В растворе абсолютное содержание соли 50 г, а относительное - $\frac{50}{500} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%.$ Аналогично, в растворе абсолютное содержание воды 450 г, а относительное - $\frac{450}{500} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%.$

Решение любой задачи на смеси обычно сводится к расчету абсолютного и относительного содержания компонент всех смесей, фигурирующих в условии задачи, хотя часто эта информация избыточна.

Типичные ситуации.

1. **Смешали две смеси.**

При образовании смеси складываются абсолютные содержания. Поэтому, если известны только относительные содержания, то нужно:

1) Подсчитать абсолютные содержания;
2) Сложить абсолютные содержания, то есть подсчитать абсолютные содержания компонент смеси;
3) Подсчитать относительные содержания компонент смеси.

Пример: Смешали 500 г 10%-го раствора соли и 400 г 55% раствора соли. Определите концентрацию соли в смеси.

В первом растворе абсолютное содержание соли $500 \cdot 0{,}1 = 50$ г. Абсолютное содержание воды 450 г. Во втором растворе абсолютное содержание соли

$400 \cdot 0{,}55 = 220$ г, абсолютное содержание воды 180 г. Рассмотрим смесь исходных растворов. Общая масса $500 + 400 = 900$ г. Абсолютное содержание соли: $50 + 220 = 270$ г. Относительное содержание соли:

$$\frac{270\text{ã}\left(\text{àáñîëþòíîå} \quad \text{ñîäåðæàíèå} \quad \text{ñîëè}\right)}{900\text{ã}\left(\text{îáùàÿ} \quad \text{ìàññà}\right)} = \frac{27}{90} = 30\%$$

. Итак, концентрация соли в смеси двух исходных растворов – 30% .

2. **Отлили часть раствора/отрезали кусок сплава.**

При этой операции, очевидно, остается неизменным концентрация веществ (если из чашки отлить немного чая в другую чашку, то чай не станет слаще). Поэтому после отливания части раствора относительные содержания можно считать известными и необходимо подсчитывать абсолютные содержания.

Пример: От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10% содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.

Исходный сплав: абсолютное содержание золота $500 \cdot 0{,}1 = 50$ г, абсолютное содержание серебра 450 г, относительное содержание серебра 90%.

Отрезанный кусок: относительное содержание золота 10%. Абсолютное содержание золота $20 \cdot 0{,}1 = 2$ г. Абсолютное содержание серебра 18 г. Итак, в отрезанном куске содержится 2 г золота и 18 г серебра.

Практикум.

1. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

	примеси	Чистое сырье
24 т	0,4	0,6
? т	0,04	0,96

Абсолютное содержание чистого металла в руде: $24 \cdot 0{,}6 = 14{,}4$ т.

В процессе плавки из руды удаляется большая часть примесей, а общее количество чистого металла остается неизменным, то есть справедливо равенство: $0{,}96x = 14{,}4$; $x = 15$ т.

Ответ: 15.

2. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

	вода	Чистое сырье
140 кг	0,98	0,02
х т	0,93	0,07

$0{,}07x = 140 \cdot 0{,}02$

$x = \frac{140 \cdot 2}{7} = 40$ кг.

Ответ: 40.

3. К 200 г раствора, содержащего 60% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

1) $200 \cdot 0{,}6 = 120$ г соли в 1 растворе

2) $300 \cdot 0{,}5 = 150$ г соли во 2 растворе

3) $\frac{120+150}{200+300} = \frac{270}{500} = 0{,}54 = 54\%$ концентрация соли в получившемся растворе.

Ответ: 54.

4. Имеется два слитка сплава золота с медью. Первый слиток содержит 230 г золота и 20 г меди, а второй слиток – 240 г золота и 60 г меди. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 300 г сплава, в котором оказалось 84% золота. Определите массу (в граммах) куска, взятого от первого слитка.

Пусть х г взяли от первого куска, тогда 300-х г взяли от второго куска. Концентрация золота в первом сплаве равна $\frac{230}{230+20} = 0{,}92$. Поэтому во взятом куске первого сплава содержится 0,92х граммов золота. Аналогично, концентрация золота во втором сплаве равна $\frac{240}{240+60} = 0{,}8.$ Поэтому, во взятом куске второго сплава содержится 0,8(300-х) граммов золота. Поэтому в полученном куске нового сплава содержится $0{,}92x + 0{,}8(300 - x) = 240 + 0{,}12x$ граммов золота. Поскольку масса нового сплава по условию задачи составляет 300 граммов, то концентрация золота в куске в 300 граммов равна $\frac{240 + 0{,}12x}{300} = 0{,}84$. Отсюда находим $x = 100$.

Ответ: 100.

5. Имеется два слитка сплава серебра и олова. Первый слиток содержит 360 г серебра и 40 г олова, а второй слиток – 450 г серебра и 150 г олова. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 200 г сплава, в котором оказалось 81% серебра. Определите массу (в граммах) куска, взятого от второго слитка.

Пусть x г взяли от второго слитка, тогда 200-x г взяли от первого слитка. Концентрация серебра в первом слитке равна $\frac{360}{400}=0{,}9.$ Поэтому во взятом куске первого сплава содержится 0,9(200-x) г серебра. Аналогично, концентрация серебра во втором сплаве $\frac{450}{600}=0{,}75.$ Поэтому, во взятом куске второго сплава содержится 0,75x г серебра. Концентрация серебра в новом куске $\frac{0{,}75x+0{,}9(200-x)}{200}=0{,}81$; $x=120$.

Ответ: 120.

Задачи на движение

В задачах «на движение» используются обычно формулы, выражающие закон равномерного движения: $S = Vt$, где S - пройденное расстояние, V - скорость равномерного движения и t - время движения.

При составлении уравнений в таких задачах часто бывает удобно прибегнуть к геометрической иллюстрации процесса движения; путь изображать в виде отрезка прямой, место встречи движущихся с разных сторон объектов точкой на отрезке и т.п. К выполнению рисунков и чертежей можно предъявить следующие требования: они должны быть наглядными, аккуратными, соответствующими тексту задачи. На них должны быть отражены, по возможности, все данные, входящие в условие задачи, и введенные переменные. Рисунки по условию задачи можно назвать фотографиями. Действительно, если бы мы взяли в руки фотоаппарат и встали неподалеку от дороги, по которой движутся персонажи задачи, то увидели бы то, о чем идет речь в задаче. Мы наблюдали бы за перемещением объектов постоянно, но фотографировали только самые важные моменты: когда происходит что-то новое. Первая фотография делается в момент выхода персонажа, раньше другого начавшего движение, или их одновременного выхода. Последующие снимки будут сделаны, если на дороге появится еще один участник движения, путешественники встретятся, повернут обратно, изменят свою скорость, остановятся и т.п.

Иногда для решения задач на движение, формулировка которых включает варианты движения объекта, удобно бывает представить эти варианты в виде таблицы. В таблице для краткой записи всегда будет три столбца, не считая еще одного, самого левого, столбца для заголовков названия. Названия столбцов стандартные: скорость, время, расстояние. Количество строчек таблицы и их названия зависят от сюжета задачи, например:

Характер движения	Пройденный путь	Скорость	Время
Против течения			
По течению			

При движении по течению реки скорость объекта складывается из его скорости в стоячей воде и скорости течения; при движении против течения реки, скорость объекта равна разности его скорости в стоячей воде и скорости течения реки. Движущийся плот всегда имеет скорость течения реки.

Часто для усложнения задачи ее условие формулируется в различных единицах измерения. В этом случае при выписывании уравнений необходимо пересчитывать все данные задачи в одинаковых единицах измерения. Помнить нужно и о следующих соображениях: объекты, начавшие двигаться навстречу друг другу, одновременно движутся до момента встречи одинаковое время, если объекты прошли одинаковые расстояния, то величину этого расстояния удобно принять за общее неизвестное этой задачи.

Примеры устных дидактических упражнений на актуализацию знаний:

1. От турбазы до станции турист доехал на велосипеде за 4 ч. На мопеде он смог бы проехать это расстояние за 2 ч. Известно, что на мопеде он едет со скоростью, на 9 км/ч большей, чем на велосипеде. Чему равно расстояние от турбазы до станции?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой *x* обозначено расстояние (в км) от турбазы до станции.

1) $4(x-9)=2x$ 2) $4x=2(x+9)$ 3) $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=9$ 4) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}=9$

2. Автомобиль расходует *a* литров бензина на 100 км пути. Сколько литров бензина потребуется, чтобы проехать 37 км?

А. $\frac{a\cdot 37}{100}$ л Б. $\frac{100\cdot 37}{a}$ л В. $\frac{a\cdot 100}{37}$ л Г. $\frac{a}{37\cdot 100}$ л

3. От города до поселка автомобиль доехал за 3 *ч*. Если бы он увеличил скорость на 25 *км/ч*, он затратил бы на этот путь 2 *ч*. Чему равно расстояние от города до поселка?

Пусть *x* км – расстояние от города до поселка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=25$	Б. $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=25$	В. $\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=25$	Г. $\frac{3}{x}-\frac{2}{x}=25$

4. Придумайте задачу на равномерное движение, для решения которой составлены уравнения с неизвестным x. Буквами S,V,t обозначены данные в задачах путь, скорость и время.

1. $\frac{S}{x-2}=\frac{S}{x}+t_0$,
2. $\frac{x}{V}=\frac{S-x}{2V}$,
3. $Vx=(V+2)x-S_0$,
4. $(x+V)(t+t_1)+xt+S_0=S$.

5. Скорость поезда 60 км/ч. Чему равна величина скорости, если ее измерять в м/мин?

6. Запишите результат действий в виде буквенного выражения.

1) Путник первый час шел пешком, второй час ехал на попутной машине, скорость которой была в 10 раз больше его собственной скорости, а затем еще полчаса его везли на телеге, которая шла впятеро медленнее машины. Какой путь проделал путник за эти два с половиной часа?

2) В пути поезд сделал две остановки по 15 минут. До первой остановки он прошел половину всего пути с некоторой постоянной скоростью. На втором отрезке пути он увеличил скорость на 20% и прошел с этой скоростью половину оставшегося пути. На последнем отрезке поезд шел со скоростью, превышающей начальную скорость на 20 км/ч. Какое время затратил поезд на весь путь с двумя остановками?

7. Автомобиль был в пути 4 ч. За первый час он проехал а км, а в каждый следующий час проезжал на 5 км/ч больше, чем в предыдущий. Вычислите: путь, пройденный автомобилем за первый час, путь, пройденный автомобилем за 3 часа, скорость, с которой автомобиль двигался четвертый час, время, которое понадобилось бы автомобилю на весь путь, если бы он ехал с первоначальной скоростью.

8. Два поезда отправляются одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Обозначим через d расстояние между А и В, V_1 и V_2 – скорости поездов, t – время

от момента отправления до момента встречи, а – расстояние от пункта А до точки встречи. Найдите неизвестные значения этих величин, пользуясь данными следующей таблицы:

№	d	V_1	V_2	t	a
1	360	70	50		
2	400		V_1+40	4	
3	300		V_1+40		100
4	300		2 V_1	2	

Задачи с познавательными функциями, направленные на усвоение основного содержания школьного курса математики.

1. Из пункта А вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ней из А вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от А легковая машина догонит грузовую?

Пусть t ч – время, которое потребуется легковой машине чтобы догнать грузовую,

$90t = 120 + 60t$; $t = 4$. $90 \cdot 4 = 360$ (км).

2. Прогулочный теплоход отправился вниз по течению реки от пристани А и причалил к пристани В. После получасовой стоянки теплоход отправился обратно и через 8 часов после отплытия из А вернулся на эту же пристань. Какова скорость теплохода в стоячей воде, если расстояние между пристанями А и В равно 36 км, а скорость течения реки 2 км/ч?

x км/ч скорость теплохода в стоячей воде, тогда $\frac{36}{x+2} + \frac{36}{x-2} = 7\frac{1}{2}$. Ответ: 10 км/ч

3. Экскурсанты отправились из города А в город В на теплоходе, а возвратились обратно на поезде. Расстояние от А до В по водному пути равно 108 км, а по железной дороге 88 км. Поездка по железной дороге продолжалась на 4 ч меньше, чем на теплоходе. Сколько километров в час проходил поезд, если его скорость была на 26 км/ч больше скорости теплохода.

x км/ч скорость теплохода, тогда $\frac{108}{x} - \frac{88}{x+26} = 4$, $x = 18$. Ответ: 44 км/ч

4. Из пункта А отправили по реке плот. Вслед за ним через 5 ч 20 мин из того же пункта вышел катер и догнал плот, пройдя 20 км. Сколько км/ч проходил плот, если катер шел быстрее его на 12 км/ч?

x км/ч скорость плота, тогда $\frac{20}{x} = \frac{20}{x+12} + 5\frac{1}{3}$ Ответ: 3 км/ч

5. Мотоциклист проехал расстояние от пункта M до пункта N за 5 часов. На обратном пути он первые 36 км ехал с той же скоростью, а остальную часть пути – со скоростью, на 3 км/ч большей. С какой скоростью ехал мотоциклист первоначально, если на обратный путь он затратил на 15 мин меньше, чем на путь из M в N?

x км/ч первоначальная скорость, тогда $\frac{36}{x} + \frac{5x-36}{x+3} + \frac{15}{60} = 5$; Ответ: 48 км/ч или 9 км/ч

6. Скорость рейсового трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше, чем скорость прежнего трамвая, поэтому он проходит маршрут в 20 км на 12 мин быстрее, чем трамвай старой конструкции. За какое время новый трамвай проходит этот маршрут?

x км/ч скорость трамвая, тогда $\frac{20}{x}=\frac{20}{x+5}+\frac{12}{60}$; $x=20$ Ответ: 48 мин.

7. Пешеход и велосипедист отправились одновременно навстречу друг другу из разных городов, расстояние между которыми 40 км. Велосипедист проехал мимо пешехода через 2 ч после отправления и на весь путь затратил на 7,5 ч меньше, чем пешеход. Найти скорость движения каждого, считая, что они двигались все время с постоянными скоростями.

   Пусть x и y км/ч скорости пешехода и велосипедиста, тогда $\begin{cases} 2(x+y)=40, \\ \frac{40}{x}=\frac{15}{2}+\frac{40}{y}; \end{cases}$ $x=4; y=16$

8. Путь от поселка до озера идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист, добираясь до озера и обратно, на горизонтальном участке пути ехал со скоростью 12км/ч, на подъеме – со скоростью 8 км/ч, а на спуске со скоростью 15 км\ч. Путь от поселка до озера у него занял 1 час, а обратный путь – 46 минут. Найдите расстояние от поселка до озера.

   Пусть x км расстояние от поселка до озера, y км горизонтальный участок пути, тогда $\begin{cases} \frac{y}{12}+\frac{x-y}{8}=1, \\ \frac{x-y}{15}+\frac{y}{12}=\frac{46}{60}; \end{cases}$ $x=10$. Ответ: 10 км.

Практикум:

9. Пешеход проходит расстояние от города А до города В за 4 ч, а велосипедист проезжает это расстояние за 2 ч. Если пешеход выйдет из города А, а одновременно навстречу ему велосипедист выедет из города В, то они встретятся на расстоянии 8 км от города А. Найдите скорость пешехода.
10. С турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 минут. Первый идет со скоростью 5 км/ч, второй – со скоростью 4 км/ч. Третий турист догоняет второго, а еще через 4 ч догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.
11. Велосипедист едет сначала 2 минуты с горы, а затем 6 минут в гору. Обратный путь он проделывает за 13 минут. Во сколько раз скорость велосипедиста при движении с горы больше, чем скорость при движении в гору? (Считайте, что скорость движения с горы одинакова в обоих направлениях; это же относится и к скорости движения в гору).