Кадлубинская Наталия Олеговна,
учитель математики МАОУ «Лицей города Троицка»

Разработка урока математики в 11 классе

Тема урока:

Координатно-векторный метод решения стереометрических задач при подготовке к ЕГЭ

Цели:

- выработать умение рассматривать различные подходы к решению задач и проанализировать “эффект” от применения этих способов решения;
- выработать умение учащегося выбирать метод решения задачи в соответствии со своими математическими предпочтениями, базирующимися на более прочных знаниях и уверенных навыка;
- выработать умение составить план последовательных этапов для достижения результата;
- выработать умение обосновать все предпринимаемые шаги и вычисления;
- повторить и закрепить различные темы и вопросы стереометрии и планиметрии, типовые стереометрические конструкции, связанные с решением текущих задач;
- развить пространственное мышление.

Задачи:

- анализ различных методов решения задачи: координатно-векторный метод, применение теоремы косинусов, применение теоремы о трех перпендикулярах;
- сравнение преимуществ и недостатков каждого метода;
- повторение свойств куба, треугольной призмы, правильного шестигранника;
- подготовка к сдаче ЕГЭ;
- развитие самостоятельности при принятии решения.

Схема урока

Учитель. Сегодня на уроке мы рассмотрим 3 задачи, которые будем решать двумя способами: координатным и «методом построений». Выясним достоинства каждого из этих способов, обратим внимание на нюансы, имеющиеся в каждом из них, в результате каждый сможет разобраться, какой способ для него предпочтительнее на экзамене в зависимости от условия задачи.

Задача 1.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка O – центр грани ABCD.

Найти:

а) угол между прямыми A_1D и BO;

б) расстояние от точки B до середины отрезка A_1D.

Решение пункта а).

1 способ. Координатно-векторный метод

Поместим наш куб в прямоугольную систему координат как показано на рисунке, вершины A_1 (1; 0; 1), D (1; 1; 0), B_1 (0; 0; 1), O (½; ½; 0).

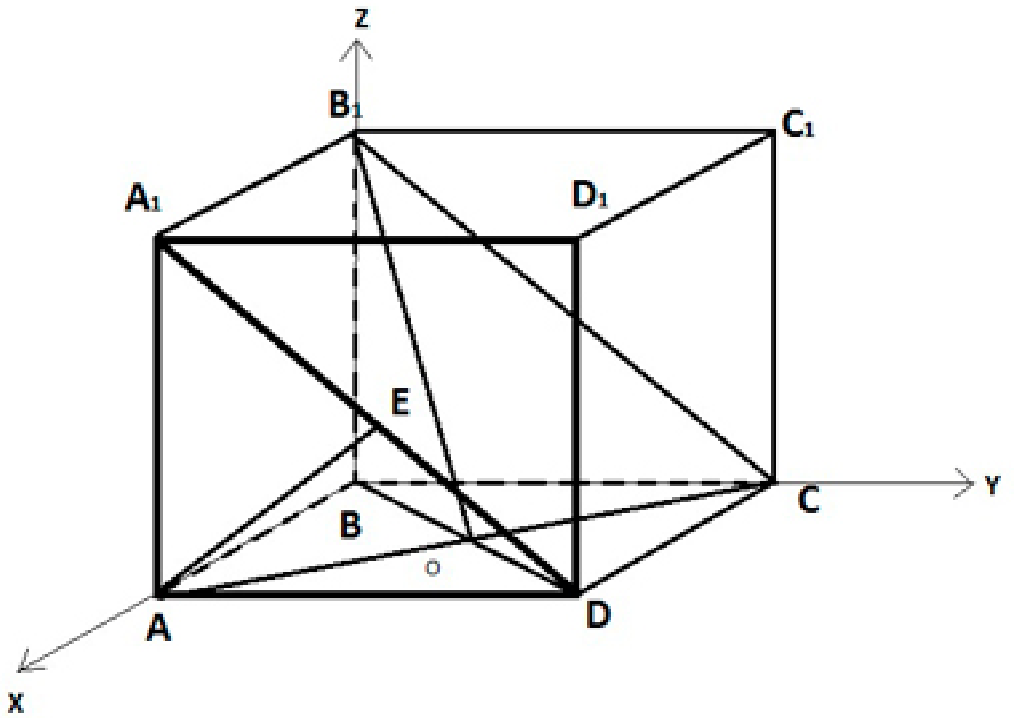
Направляющие векторы прямых A_1D и B_1O:

$\overline{A_1D}$ {0; 1; -1} и $\overline{B_1O}$ {½; ½; -1};

искомый угол φ между ними находим по формуле:

cos ⎞ = $\dfrac{|1/2+1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1,5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

⎣∬ ⎡™◊ ⎞ = 30°.



2 способ. Используем теорему косинусов.

1) Проведем прямую B_1C параллельно прямой A_1D. Угол CB_1O будет искомым.

2) Из прямоугольного треугольника BB_1O по теореме Пифагора:

B_1O = $\sqrt{BB_1^{\,2} + (BD/2)^2} = \sqrt{1+1/2} = \sqrt{1,5}$.

3) По теореме косинусов из треугольника CB_1O вычисляем угол CB_1O:

$\cos \angle CB_1O = \dfrac{B_1C^2 + B_1O^2 - OC^2}{2B_1C \cdot B_1O} = \dfrac{2 + 1{,}5 - 0{,}5}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1{,}5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, искомый угол составляет 30°.

Замечание. При решении задачи 2-м способом можно заметить, что по теореме о трех перпендикулярах $\angle COB_1 = 90°$, поэтому из прямоугольного ΔCB_1O также легко вычислить косинус искомого угла.

Решение пункта б).

1 способ. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

Пусть точка E – середина A_1D, тогда координаты E (1; 1/2; ½), B (0; 0; 0).

$BE = \sqrt{1 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{1{,}5}$.

2 способ. По теореме Пифагора

Из прямоугольного ΔBAE с прямым $\angle BAE$ находим $BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{1/2 + 1} = \sqrt{1{,}5}$.

Задача 2.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Найти угол между прямыми AB и A_1C.

Решение.

1 способ. Координатно-векторный метод

Координаты вершин призмы в прямоугольной системе при расположении призмы, как на рисунке: A (0; 0; 0), B ($\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a; $\dfrac{a}{2}$; 0), A_1(0; 0; a), C (0; a; 0).

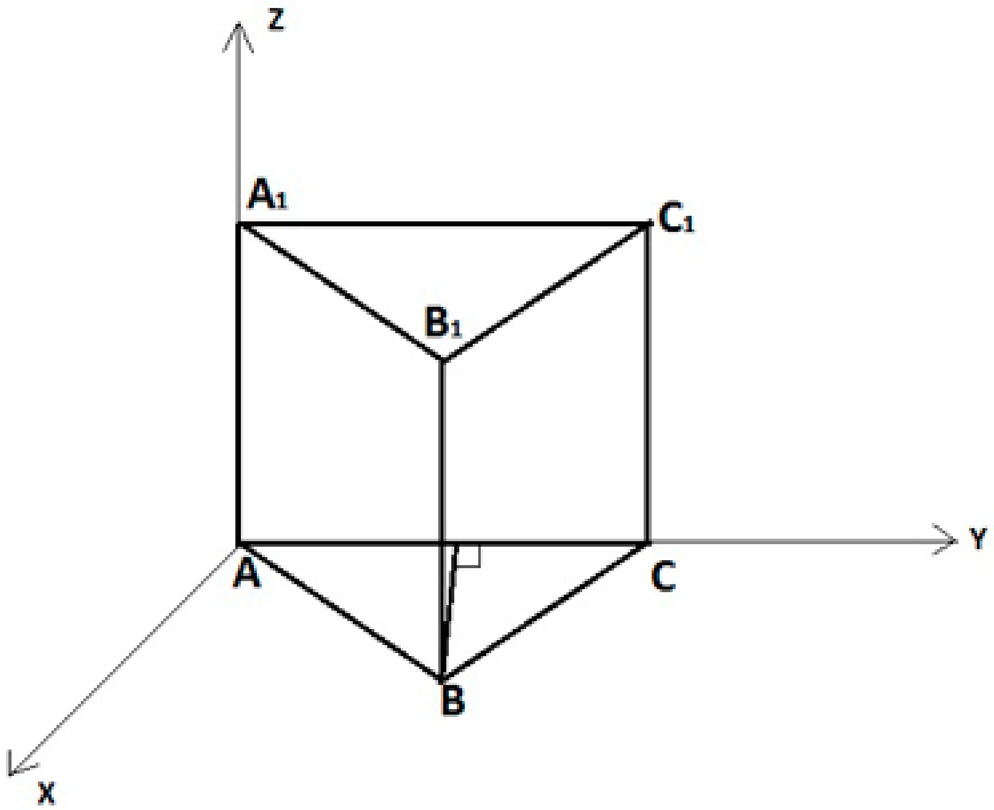
Направляющие векторы прямых A_1C и AB:

$\overline{A_1C}$ {0; a; -a} и $\overline{AB}$ {$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a; $\dfrac{a}{2}$; 0} ;

$$\cos \varphi = \frac{\left|0 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + a \cdot \dfrac{a}{2} - a \cdot 0\right|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$\angle \varphi = \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

2 способ. Используем теорему косинусов



Рассматриваем $\Delta\ A_1B_1C$, в котором $A_1B_1 \parallel AB$. Имеем

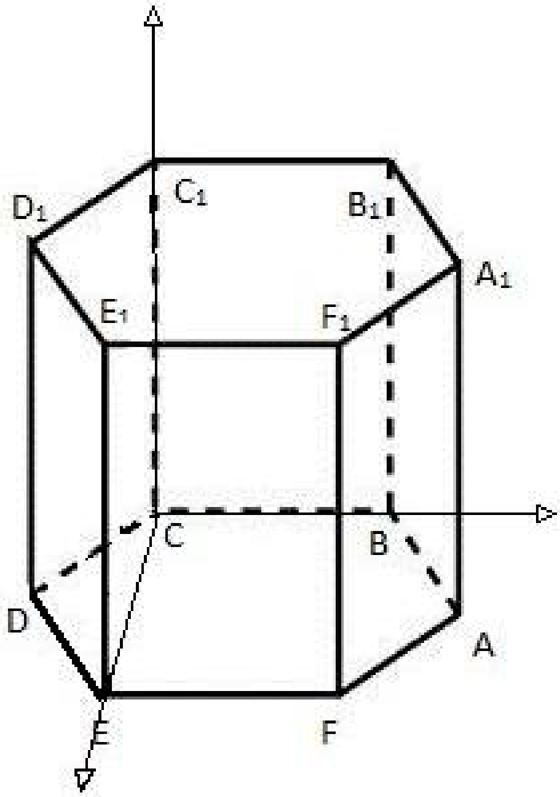
$$\cos \varphi = \frac{A_1B_1^{\ 2} + B_1C^2 - A_1C^2}{2A_1B_1 \cdot B_1C} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

Решение

1 способ. Координатно-векторный метод



1) Поместим призму в прямоугольную систему координат, расположив координатные оси, как показано на рисунке. CC_1, CB и CE попарно перпендикулярны, поэтому можно направить вдоль них координатные оси. Получаем координаты:

C_1 (0; 0; 1), E ($\sqrt{3}$; 0; 0), B_1 (0;1;1).

2) Найдем координаты направляющих векторов для прямых C_1B_1 и C_1E:

$\overline{C_1B_1}$ (0;1;0), $\overline{C_1E}$ ($\sqrt{3}$;0;-1).

3) Найдем косинус угла между C_1B_1 и C_1E, используя скалярное произведение векторов $\overline{C_1B_1}$ и $\overline{C_1E}$:

$\cos \beta = \frac{|0+0+0|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3+1}}$ = 0 => β = 90° => C_1E – искомое расстояние.

4) $C_1E = \sqrt{3+1}$ = 2.

Вывод: знание различных подходов к решению стереометрических задач позволяет выбрать предпочтительный для любого учащегося способ, т.е. тот, которым ученик владеет уверенно, помогает избежать ошибок, приводит к успешному решению задачи и получению хорошего балла на экзамене. Координатный метод имеет преимущество перед другими способами тем, что требует меньше стереометрических соображений и видения, а основывается на применении формул, у которых много планиметрических и алгебраических аналогий, более привычных для учащихся.

Форма проведения урока – сочетание объяснения учителя с фронтальной коллективной работой учащихся.

На экране с помощью видеопроектора демонстрируются рассматриваемые многогранники, что позволяет сравнивать различные способы решения.

Домашнее задание: решить задачу 3 другим способом, например, с помощью теоремы о трех перпендикулярах.

Литература

1. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 класса.– М.: ИЛЕКСА, – 2010. – 208 с.

2. Геометрия, 10-11: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2007. – 256 с.