РЕАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Условия задач

13. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$$

14. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

15. Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3.$$

16. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH, а Q – точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

17. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3,\\ y=x+a;\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19. На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Решения задач

13. а) Вспомним о том, что

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\sin\frac{\pi}{2}=\sin x,$$

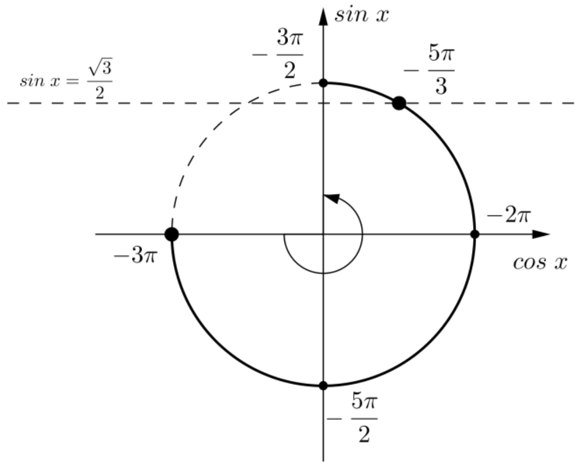
$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Теперь попытаемся получить разложение на множители. Исходное уравнение равносильно следующему:

$$2\sin x\cos x+2\sin x=\sqrt{3}(\cos x+1),\qquad \left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x=-1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\\ x=\pi+2\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Поскольку интервал поиска корней меньше, чем 2π, удобно воспользоваться тригонометрическим кругом.



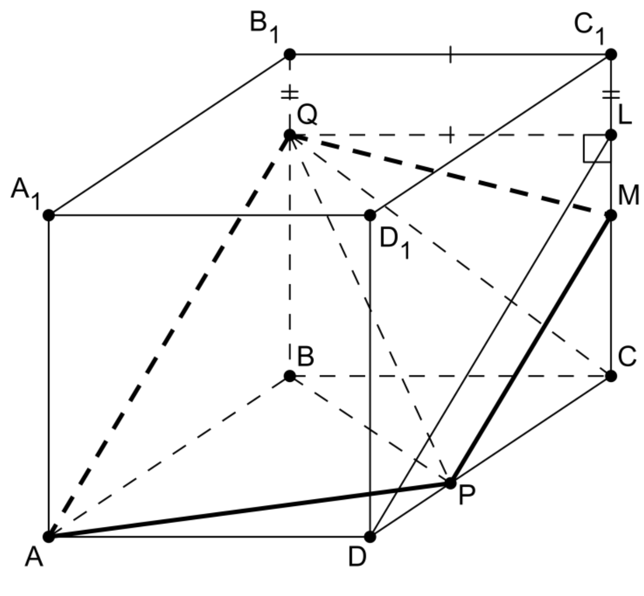
Ответ: а) $\left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

б) $-3\pi,-\frac{5\pi}{3}$.

14. а) Отметим точку L такую, что $C_1L=3$. Тогда $AQ\parallel DL$. Теперь, если точка M действительно точка пересечения плоскости APQ и ребра CC_1, то должно выполняться соотношение

$$\frac{CD}{CL}=\frac{CP}{CM},\qquad CM=\frac{CL\cdot CP}{CD}=6.$$

Выходит, что M – середина CC_1.



б) Будем искать расстояние от точки C до плоскости PQM, совпадающей с плоскостью APQ. Воспользуемся методом объемов: сначала найдем объем $QPMC$, затем площадь PQM. При этом расстояние от C до плоскости PQM найдется как высота пирамиды $CPQM$.

$$V_{QPMC} = \frac{1}{3} \cdot QL \cdot S_{PMC} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 96.$$

Теперь будем искать площадь треугольника PQM. Он не является прямоугольным, потому что ни одна из его сторон не перпендикулярна ни одному из ребер куба, поэтому придется считать каждую сторону этого треугольника.

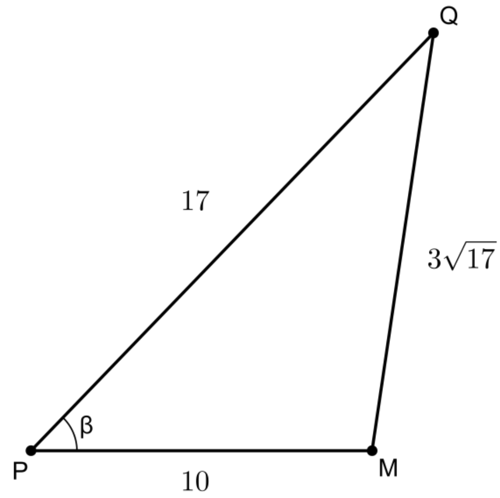
QM найдется из прямоугольного треугольника с катетами 12 и 3:

$$QM = \sqrt{(QL)^2 + (ML)^2} = 3\sqrt{17}.$$

BP найдется из прямоугольного треугольника BPC с катетами 12 и 8:

$$(BP)^2 = (BC)^2 + (CP)^2 = 208.$$

Затем, QP найдется из прямоугольного треугольника BPQ уже с известными катетами:



$$QP = \sqrt{(BQ)^2 + (BP)^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Наконец, PM найдется из прямоугольного треугольника PMC с катетами 8 и 6:

$$PM = \sqrt{(PC)^2 + (CM)^2} = 10.$$

Для нахождения площади треугольника PQM осталось найти синус какого-нибудь из его углов. Удобно выбрать угол при вершине P (обозначим его β), чтобы во время применения теоремы косинусов исчезли радикалы.

$$\cos\beta = \frac{(PM)^2 + (PQ)^2 - (QM)^2}{2(PM)(PQ)} = \frac{59}{5 \cdot 17}, \qquad \sin\beta = \frac{12\sqrt{26}}{5 \cdot 17}.$$

$$S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{26}}{5 \cdot 17} \cdot 17 \cdot 10 = 12\sqrt{26}.$$

Наконец

$$x = \frac{3V_{QPMC}}{S_{PQM}} = \frac{3 \cdot 12 \cdot \sqrt{26}}{12 \cdot 26} = \frac{12\sqrt{26}}{13}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

15. Преобразуем неравенство:

$$\frac{3^{2x}-3\cdot 3^x-19}{3^x-6}+\frac{9\cdot 3^{2x}-81\cdot 3^x+2}{3^x-9}-10\cdot 3^x-3\leq 0.$$

ОДЗ: $x\neq \log_3 6\,,\ x\neq 2$.

Сделаем замену $3^x=t>0$ и будем не спеша производить умножения.

$$(t^2-3t-19)(t-9)=t^3-3t^2-19t-9t^2+27t+9\cdot 19=$$
$$=t^3-12t^2+8t+171.$$
$$(9t^2-18t+2)(t-6)=9t^3-81t^2+2t-54t^2+486t-12=$$
$$=9t^3-135t^2+488t-12.$$
$$(t-9)(t-6)(10t+3)=(t^2-15t+54)(10t+3)=$$
$$=10t^3-150t^2+540t+3t^2-45t+162=10t^3-147t^2+495t+162.$$
$$t^3-12t^2+8t+171+9t^3-135t^2+488t-12=$$
$$=10t^3-147t^2+496t+159.$$

Итак,

$$10t^3-147t^2+496t+159-(10t^3-147t^2+495t+162)=t-3.$$

Неравенство принимает вид:

$$\frac{t-3}{(t-9)(t-6)}\leq 0.$$

С учетом того, что $t>0$, решение неравенства запишется так:

$$\left[\begin{array}{l}0<t\leq 3,\\ 6<t<9.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}0<3^x\leq 3^1,\\ 3^{\log_3 6}<3^x<3^2;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\infty<x\leq 1,\\ \log_3 6<x<2;\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup(\log_3 6\,;2).$$

Можно решить задачу быстрее, если разделить числители дробей на знаменатели. Исходное неравенство примет вид:

$$3^x+3+\frac{-1}{3^x-6}+9\cdot 3^x+\frac{2}{3^x-9}\leq 10\cdot 3^x+3\Leftrightarrow \frac{3^x-3}{(3^x-9)(3^x-6)}\leq 0.$$

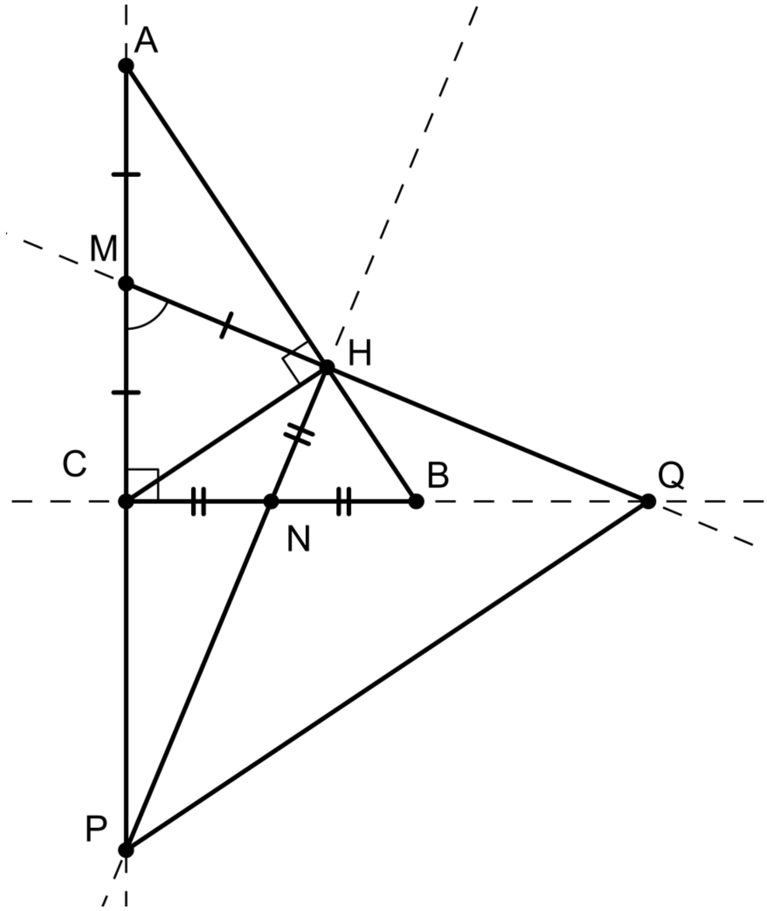
Как до этого можно было додуматься? После преобразования исходного неравенства деление на знаменатель заметно и напрашивается для второй дроби:

$$\frac{9\cdot 3^{2x}-81\cdot 3^x+2}{3^x-9}=9\cdot 3^x+\frac{2}{3^x-9}.$$

Теперь, когда мы видим, что для исчезновения целой части нам не хватает $3^x + 3$, то, в надежде на что-то хорошее, можно поделить числитель первой дроби на знаменатель в столбик. Но это уже совсем другая история...

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 6\,; 2)$.

16. а) Медиана к гипотенузе разбивает треугольник на два равнобедренных.



$\angle CHM = 90° - \angle AHM =$

$= 90° - \angle A.$

$\angle CHN = 90° - \angle BHN =$

$= 90° - \angle B.$

Таким образом,

$\angle MHN = 180° - (\angle A + \angle B) =$

$= 180° - 90° = 90°.$

б) Треугольники PMH и QCM равны по катету и углу. Тогда, для нахождения площади треугольника PQM достаточно найти $PM = QM$ и $QC = PH$ (основания и соответствующие высоты к этим основаниям).

В свою очередь, эти отрезки можно легко найти, зная угол CMH и длину $CM = MH$.

По свойству прямоугольного треугольника:

$$CH = \sqrt{(AH)(BH)} = 2\sqrt{2}, \qquad CM = \frac{\sqrt{(AH)^2 + (CH)^2}}{2} = \sqrt{6} = MH.$$

По теореме косинусов из треугольника CMH:

$$\cos\angle CMH = \frac{2(CM)^2 - (CH)^2}{2(CM)^2} = \frac{12 - 8}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$PM = \frac{MH}{\cos\angle CMH} = 3\sqrt{6}, \qquad PH = \sqrt{(PM)^2 - (MH)^2} = 4\sqrt{3} = CQ.$$

Наконец, искомая площадь:

$$S_{PQM}=\frac{1}{2}(PM)(CQ)=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{3}=18\sqrt{2}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $18\sqrt{2}$.

17. Введем обозначения.

A = 10 млн руб. – начальный вклад; q = 1 + 0,1 – множитель роста вклада; B = 7 млн руб. – требуемая чистая прибыль; x – искомая величина пополнения вклада.

По прошествии четырех лет вклад увеличится и станет равным

$$\big((Aq^2+x)q+x\big)q=Aq^4+(q^2+q)x.$$

Эта сумма состоит как из непосредственных денег вкладчика, так и из начислений банка. К собственным деньгам вкладчика, очевидно, относится сам начальный вклад A. Значит, из полученного ранее выражения мы должны отнять A:

$$Aq^4+(q^2+q)x-A.$$

Также, в условии говорится о том, что вкладчик два последних года пополнял вклад, значит ($2x$) также относится к собственным деньгам вкладчика. Теперь можно с уверенностью записать требуемое неравенство:

$$Aq^4+(q^2+q)x-A-2x>B,\qquad x>\frac{B-(q^4-1)A}{q^2+q-2}.$$

Будем аккуратно подставлять числа:

$$\frac{B-(q^4-1)A}{q^2+q-2}=\frac{7-((1{,}1)^4-1)10}{(1{,}1)^2+1{,}1-2}=\frac{7-(1{,}4641-1)10}{0{,}31}=\frac{2{,}359}{0{,}31}=7\frac{189}{310}.$$

Таким образом, наименьшее целое значение x, удовлетворяющее условию задачи, равно 8.

Ответ: 8.

18. Прежде всего отметим, что x = 3 не является решением системы, потому что при нем система имеет только одно решение для одного значения параметра a, вида (3; a – 3).

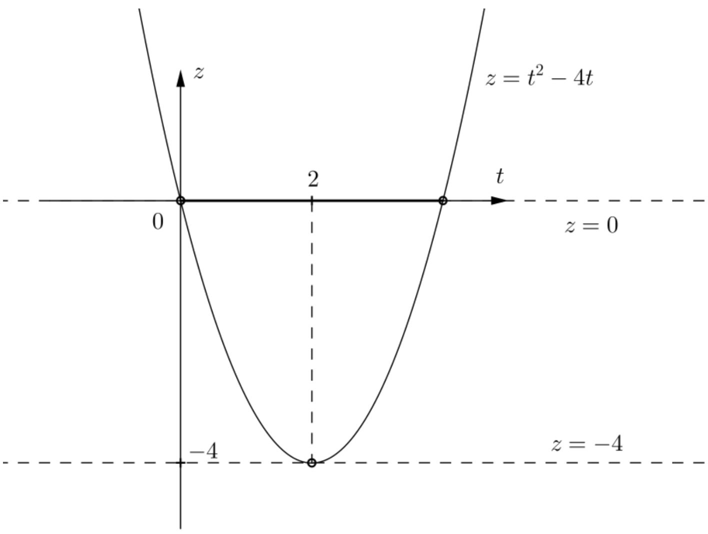
Теперь можно поделить первое уравнение системы на (x – 3), не теряя при этом ничего. При замене $t=x-3\neq 0$ и с учетом ранее оговоренного условия, вопрос задачи можно теперь адресовать следующей совокупности (опять же, без потери чего-либо):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t > 0, \\ y + 3t = t^2; \end{cases} \\ \begin{cases} t < 0, \\ y + 3y = -t^2; \end{cases} \\ y = t + a + 3. \end{array}\right.$$

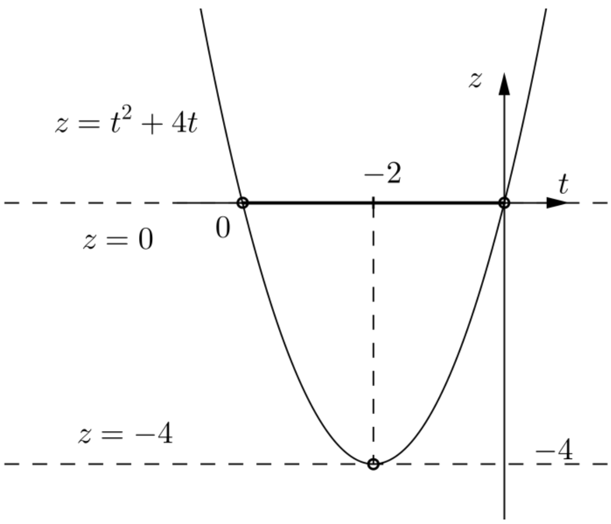
Вторые уравнения каждой из записанных систем должны иметь по два корня. Каждое из этих чисел будет различным, благодаря объединению с ограничением по знаку для *t*: первая система находит различные между собой положительные корни, а вторая система – также различные между собой отрицательные корни. Условие различия требуемых четырех решений гарантировано. Преобразуем:

$$\left[\begin{array}{l}(1)\begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 4t = a + 3; \end{cases} \\ (2)\begin{cases} t < 0, \\ t^2 + 4t = -a - 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система будет иметь два положительных корня тогда, когда линия $z = a + 3$ пересекает параболу $z = t^2 - 4t$ в двух точках с положительными значениями *t*-координаты.



Для системы 1.



Для системы 2.

Теперь нахождение требуемых значений параметра *a* не составляет труда:

$$\left[\begin{array}{l} -4 < a + 3 < 0, \\ -4 < -a - 3 < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7 < a < -3, \\ -3 < a < 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (-7; -3) \cup (-3; -1).$$

Ответ: $(-7; -3) \cup (-3; -1)$.

19. Введем обозначения: m, n, k – количества пятерок, четверок и троек в группе I. Тогда, соответственно: $10 - m$, $10 - n$, $10 - k$ – количества тех же объектов, только в группе II. Для того, чтобы порадовать и себя и проверяющего эксперта, составим таблицу.

Число	Количество чисел	
	Группа I	Группа II
«5»	m	$10 - m$
«4»	n	$10 - n$
«3»	k	$10 - k$

Начнем находить средние арифметические групп:

$$A = \frac{5m + 4n + 3k}{m + n + k} = 3 + \frac{2m + n}{m + n + k},$$

$$B = \frac{120 - (5m + 4n + 3k)}{30 - (m + n + k)} = 3 + \frac{30 - (2m + n)}{30 - (m + n + k)}.$$

а) Среднее арифметическое всех записанных чисел найти несложно:

$$C_0 = \frac{5 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10}{30} = \frac{120}{30} = 4.$$

Требуется найти такие m, n, k, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{A + B}{2} > 4, \qquad A + B > 8,$$

$$\frac{2m + n}{m + n + k} + \frac{30 - (2m + n)}{30 - (m + n + k)} > 2.$$

Недолго думая можно попробовать $n = k = 0$. И действительно:

$$2 + \frac{30 - 2m}{30 - m} > 2, \qquad \frac{30 - 2m}{30 - m} > 0.$$

Последнее записанное неравенство выполняется при всех допустимых значениях $1 \le m \le 10$. Итак, примером разбиения на группы, удовлетворяющие пункту а), может быть такой: 7 пятерок в первой группе и 3 пятерки, 10 четверок и 10 троек во второй группе.

б) Просто подставим $m + n + k = 15$:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{2m + n}{15} + \frac{30 - 2m + n}{15}\right) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 = C_0.$$

Что и требовалось доказать.

в) Собственно, 100 баллов ЕГЭ уже получено. Теперь можно расслабиться. Поскольку $2m + n$ не выражается через $m + n + k$ и наоборот, то без перебора и различных качественных замечаний здесь не обойтись (не получается составить функцию от чего-то одного и находить ее максимум стандартным методом). Здесь все остается на усмотрение проверяющего.

Отчаявшись решить эту задачу своими силами, я пересмотрел многие "решения" в интернете, но ни одно из них не показалось мне не оставляющим вопросов.

Однако, верный и обоснованный ответ мы всё же можем получить.

Рассмотрим ситуацию, когда группы абсолютно идентичны (по 5 штук каждого из видов участвующих чисел в каждой из групп). Данные пунктов а) и б) подталкивают нас к тому, чтобы мы как-то изменяли группы.

Перебросим одну тройку из группы I в группу II. Тогда

$$A_1 + B_1 = \frac{57}{14} + \frac{63}{16} = 8\frac{1}{112} > 8 = 2C_0.$$

Еще тройку перекинем из первой группы во вторую:

$$A_2 + B_2 = \frac{54}{13} + \frac{66}{17} = 8\frac{8}{221}, \qquad \frac{8 \cdot 112}{221} > 1.$$

Снова увеличение. Продолжая так до момента, когда в группе I останется лишь одна пятерка, мы получим максимум.

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)_{max} = \frac{5 + 3\frac{28}{29}}{2} = 4\frac{14}{29}.$$

Ответ: а) первая группа – 7 пятерок, вторая группа – 3 пятерки, 10 четверок, 10 троек;

б) что и требовалось доказать;

в) $4\frac{14}{29}$.

Автор – Джендубаев Эдуард.

4ege.ru