Издательство «Легион»

Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Производная и её применение к исследованию функций.

Докладчик: Иванов Сергей Олегович

План доклада

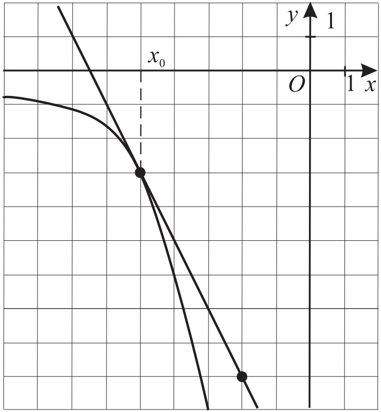
- Анализ решаемости заданий на применение производной ЕГЭ-2014 и ЕГЭ-2015
- График функции и производная: задание 7 ЕГЭ-2016 (профильный уровень)
- Исследование функции: задание 12 ЕГЭ-2016 (профильный уровень)
- Задача с параметром: задание 18 ЕГЭ-2016 (профильный уровень)

Процент решаемости заданий на применение производной на ЕГЭ-2014 и ЕГЭ-2015

	2014	2015
Задание 7 по спец. ЕГЭ-2016	44,8%	42,3%
Задание 12 по спец. ЕГЭ-2016	25,6%	32,9%

Задание 7. Пример 1

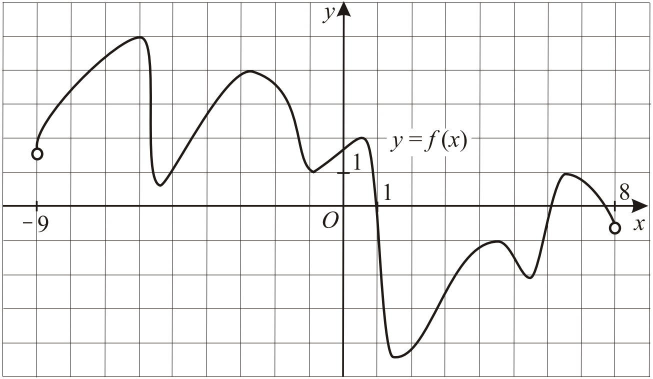
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -2.

Задание 7. Пример 2

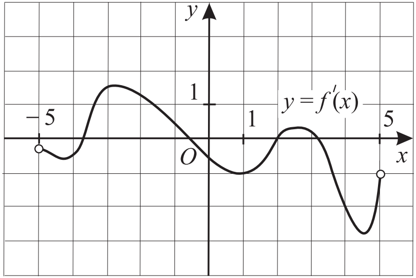
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Определите количество точек с целочисленными абсциссами, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ: 10.

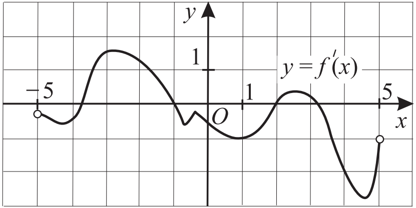
Задание 7. Пример 3

На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.



Ответ: 3.

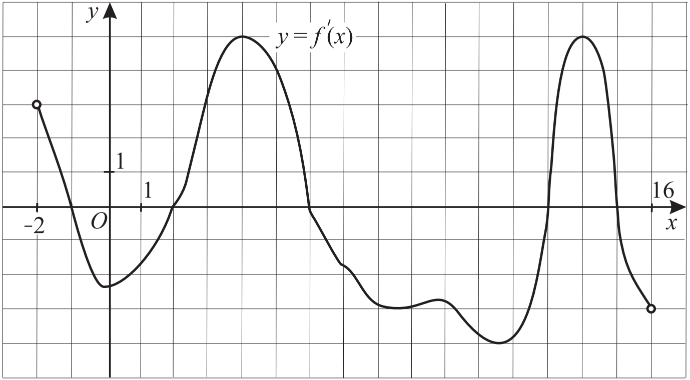
На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.



Ответ: -1.

Задание 7. Пример 5

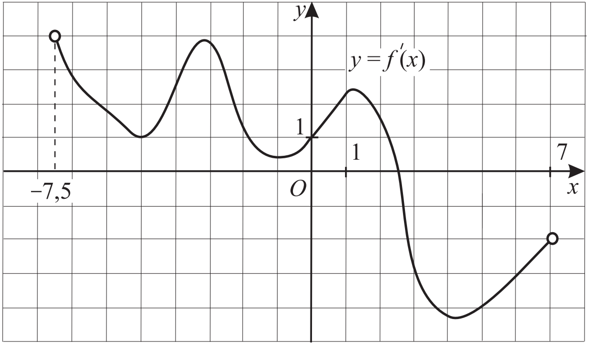
На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 7.

Задание 7. Пример 6

На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.



Ответ: 4.

Задание 12. Пример 1

Найдите наибольшее значение функции

$y = 16x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Решение:

1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$

$$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. $y'(x) = \dfrac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0$. Функция убывает при всех допустимых значениях x. В точке $x = -\dfrac{\pi}{4}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$$

$$= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

Ответ: -40.

Задание 12. Пример 2

Найдите наименьшее значение функции $y = (x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

Решение:

1. $y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\dfrac{20}{27}$, так как $e \approx 2{,}7$;
   $y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0$.
2. $y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' =$
   $= 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}$.
3. $(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8 = 0; \quad x = -8.$
4. $y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$
5. Из чисел $-\dfrac{20}{27}$; -1; 0 наименьшим является -1.

Ответ: -1.

Задание 12. Пример 3

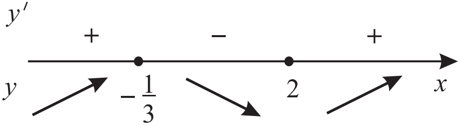
Найдите точку минимума функции
$y = (x-2)^2(2x+3)+5$.

Решение:

Найдём производную заданной функции.

$y' = 2(x-2)(2x+3)+(x-2)^2\cdot 2 = 2(x-2)(2x+3+x-2) =$
$= 2(x-2)(3x+1)$.

$y' = 0$ при $x = 2, x = -\dfrac{1}{3}$.



Следовательно, единственной точкой минимума является $x = 2$, так как при переходе через неё производная функции меняет знак с «$-$» на «$+$».

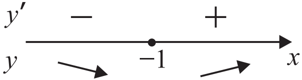
Ответ: 2.

Задание 12. Пример 4

Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

Решение: $y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

$y' = \dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 4)\ln 3}$; $\quad y' = 0$ при $x = -1$. Заметим, что $x^2 + 2x + 4 \neq 0$, $x \in R$, так как $D < 0$. При переходе через $x = -1$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$». Значит, точка $x = -1$ является точкой минимума.



Наименьшее значение $y(-1) = 4$.

Ответ: 4.

Задание с параметром. Пример 1 (начало)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-3x} = a - |6x|$ имеет более двух корней.

Решение:

$a = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$g(x) = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

Задание с параметром. Пример 1 (продолжение)

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

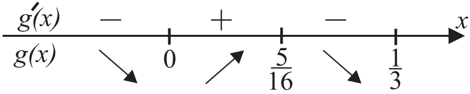
При $x < 0$ $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - 6 < 0.$

При $x \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$ $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6.$

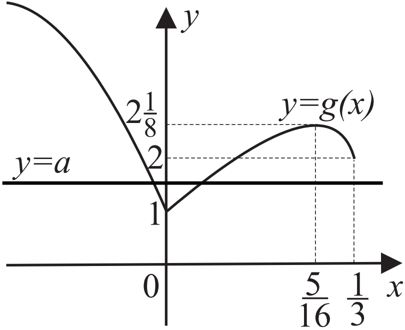
$g'(x) = 0$, если $\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6 = 0;$ $\sqrt{1-3x} = \dfrac{1}{4};$ $x = \dfrac{5}{16}.$

$g\left(\dfrac{5}{16}\right) = \dfrac{1}{4} + 6 \cdot \dfrac{5}{16} = 2\dfrac{1}{8},$ $g(0) = 1;$

$g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2.$



Задание с параметром. Пример 1 (окончание)



Ответ: $\left[2;\ 2\frac{1}{8}\right).$

Задание с параметром. Пример 2 (начало)

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + 6 + |-x^2 - 6x - 5|$ больше 2.

Решение:

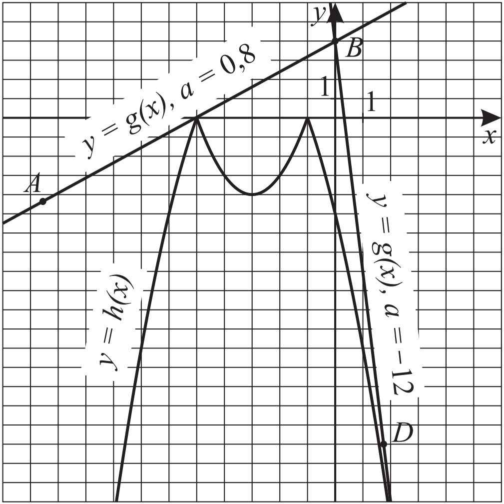
$ax + 4 > -|x^2 + 6x + 5|$.

Обозначим:

$g(x) = ax + 4,$

$h(x) = -|x^2 + 6x + 5|.$

Задание с параметром. Пример 2 (продолжение)



$$g(x) = ax + 4$$

$$h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$$

Задание с параметром. Пример 2 (окончание)

$B\ (0;\ 4)$, точка касания $(x_0;\ y_0)$.

$$\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-4}{y_0-4};\qquad y=\frac{y_0-4}{x_0}\cdot x+4.$$

$$\frac{y_0-4}{x_0}=h'(x_0)=(-x_0^2-6x_0-5)'=-2x_0-6;$$

$y_0-4=-x_0(2x_0+6);$

$(-x_0^2-6x_0-5)-4=-2x_0^2-6x_0;\quad x_0^2=9.$ Так как $x_0>0$, то $x_0=3$. Тогда $a_2\cdot 3+4=-(3^2+6\cdot 3+5);\quad a_2=-12.$

Ответ: $(-12;\ 0{,}8)$.

Издательство «Легион»

Сайт `http://legionr.ru`

Электронная почта: `legionrus@legionrus.com`

Почта: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Тел.: (863) 303-05-50, 248-14-03