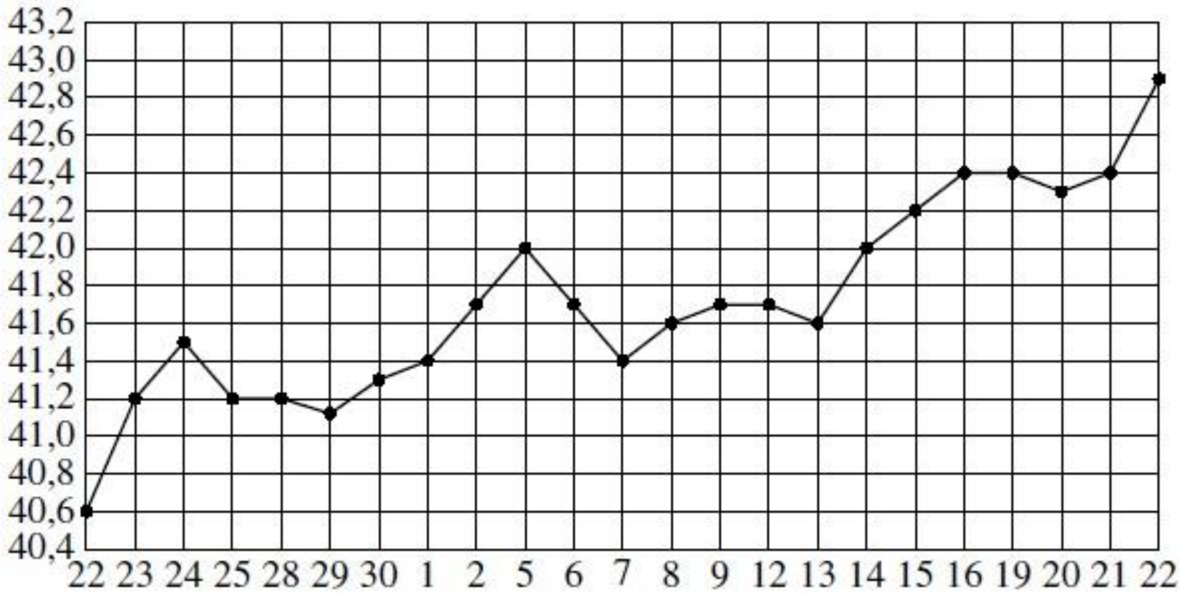
ПРОБНЫЙ ВАРИАНТ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

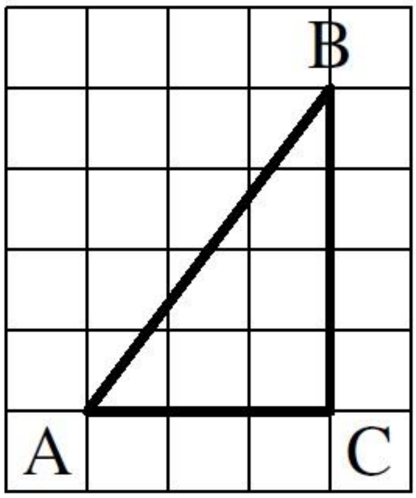
Условия задач

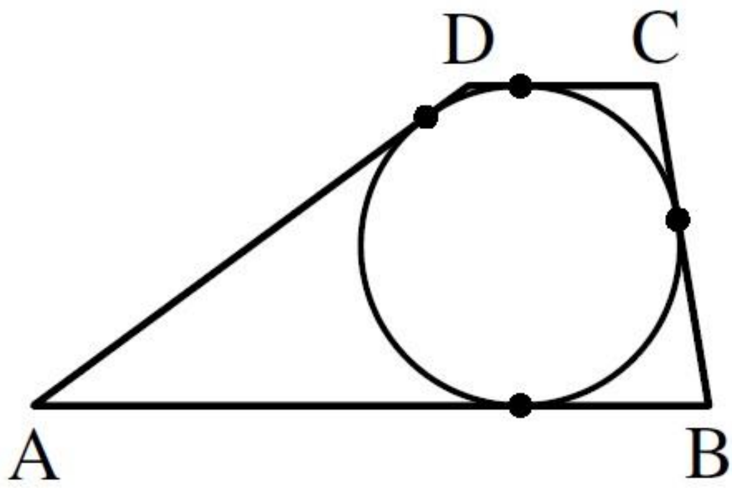
1. Установка двух счетчиков воды (холодной и горячей) стоит 3200 рублей. До установки счетчиков за воду платили 1800 рублей ежемесячно. После установки счетчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1300 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счетчиков, если тарифы на воду не изменятся?



2. На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена на евро в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько рабочих дней за указанный период курс евро был ровно 41,2 рубля.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник *ABC*, считая стороны квадратных клеток равными 1.





4. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

5. Найдите корень уравнения $\log_{5-x} 9 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 9t + 12,$$

где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 15 м/с?

8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 41. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

9. Найдите значение $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

10. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону

$$v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где t – время с момента начала колебаний, $T = 12$ с – период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

11. Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 49 км. Путь из A в B занял у туриста 14 часов, из которых 7 часов ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъеме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2 + 676}.$$

13. а) Решите уравнение

$$2\operatorname{ctg} x \sin^2 x + \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0.$$

б) Найдите его корни на отрезке

$$\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

14. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину K ребра AB, вершину B_1 и точку L, разбивающую ребро AC в отношении $AL : LC = 1 : 3$.

а) Докажите, что плоскость сечения перпендикулярна одной из боковых граней призмы.

б) Найдите площадь сечения, если ребро основания равно $4\sqrt{3}$, а высота призмы равна 1.

15. Решите неравенство

$$\log_5 x + \log_x\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{2 - \log_3 x}{\log_3 x} \cdot \log_5 x.$$

16. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. К окружностям проведены общая внутренняя и общая внешняя касательные. Касательные пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник ΔO_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если $DO_1 = \sqrt{5}$; $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

17. Федя взял в банке кредит под некоторый процент годовых 31 декабря 2010 года. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на a%), затем Федя переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328050 рублей, то выплатит долг за 4 года, если по 2587250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Федя взял деньги в банке?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+3|+|x-a|)^2 - 6(|x+3|+|x-a|) + 5a(6-5a) = 0$$

имеет ровно два решения.

19. Стадо из 60 слонов (слон весит три тонны), 60 слоних (слониха весит 2 тонны) и 50 слонят (масса слоненка 1600 кг) садится в поезд. В каждый вагон может сесть сколько угодно животных, но их суммарная масса не должна превышать 10 тонн.

а) Сумеют ли все они сесть в поезд, если в нем 39 вагонов?

б) Сумеют ли все они сесть в поезд, если в нем 37 вагонов?

в) Каково наименьшее количество вагонов для перевозки этого стада?

Решения задач

1. Пусть n – искомое количество месяцев. Величина $1800n$ – сумма денег, которую заплатил бы человек без установки счетчиков по прошествии n месяцев. Величина $1300n$ – сумма денег, которую заплатил бы человек с установленными счетчиками по прошествии n месяцев. Ежемесячная экономия, очевидно, составляет 1800 – 1300 = 500 рублей в месяц. За n месяцев экономия составит $500n$ рублей. Остается записать неравенство:

$$500n > 3200, \qquad n > 6{,}4.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства n = 7. Неравенство имеет строгий знак, потому что в условии сказано именно о превышении экономии над затратами на установку счетчиков. Если бы, например, звучала формулировка "через какое наименьше количество месяцев затраты на установку счетчиков окупятся", то тогда знак неравенства был бы ≥.

Ответ: 7.

2. Прикладываем линейку горизонтально к отметке 41,2 на оси рублей. Теперь считаем, сколько жирных точек содержит эта линия. Таких точек 3 (23, 24 и 25 сентября).

Ответ: 3.

3. Нетрудно видеть, что это прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. При решении этой задачи хорошо может помочь формула площади треугольника (любого, а не только прямоугольного), содержащая искомый радиус вписанной окружности и полупериметр треугольника.

$$S = pr, \qquad r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{1}{2}\cdot(3+4+5)} = 1.$$

Ответ: 1.

4. Статор – неподвижная (статика) часть электродвигателя, ротор – подвижная (ротация – вращение), мотор – общее название (*motion*, "моушн", движение) конструкции, стартер – двигатель, создающий положительный момент на валу более мощного двигателя, чтобы его легче было завести (легче осуществить старт).

Вероятность того, что «Статор» начнет первым в первом мачте, равна 0,5, равно как и во всех остальных играх («Статор» либо начинает игру, либо это делает его соперник). Естественно, «Статор» не начнет игру первым ровно с той же вероятностью, 0,5.

Вероятности нужных нам событий надо перемножать, потому что требуемое условие связывает вероятности событий всех трех игр.

Итак, в первой игре «Статор» должен начать первым – 0,5. Во второй наоборот, не должен – тоже 0,5, итого уже $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. Наконец в третьей игре, «Статор» должен начать первым – $0,25 \cdot 0,5 = 0,125$. *(Если игра неизбежна, начинать надо первым.)*

Можно пойти другим путем. Давайте посчитаем количество вообще всех случаев, когда «Статор» может начать или не начать игру первым.

Ставим +, если «Статор» начинает первым и ставим – в противном случае.

Варианты	I игра	II игра	III игра
1	–	–	–
2	–	–	+
3	–	+	–
4	–	+	+
5	+	–	–
6	+	–	+
7	+	+	–
8	+	+	+

Как видно, нужный нам 6-й вариант является равновероятным среди 8 вариантов. Вероятность его появления $1/8 = 0,125$.

Ответ: 0,125.

5. Основание логарифма должно быть строго положительным и не равным единице.

$$\begin{cases} 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Теперь преобразуем уравнение, воспользовавшись определением логарифма.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \qquad a > 0, \qquad a \neq 1, \qquad b > 0.$$

$$(5 - x)^2 = 9, \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = 8.$$

Второй корень не удовлетворяет системе, написанной выше (при нем основание логарифма становится отрицательным). Число $x = 8$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

6. Известно, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то сумма длин его противоположных сторон одинакова – $AD + BC = AB + CD$. Этот факт доказывается благодаря свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности (жирные точки – как раз точки касания).

Итак, $AB + CD = AD + BC = 8$. Подставляем результат в формулу средней линии трапеции (её можно вывести, сначала доказав, что средняя линия параллельна основаниям (доказать можно от противного), а дальше там всё как по нотам).

$$x = \frac{AB + CD}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

7. Функция скорости от времени есть производная функции расстояния от времени (а функция ускорения от времени есть производная функции скорости от времени или вторая производная функции расстояния от времени). Короче говоря, надо считать производную.

$$v(t) = \dot{x}(t) = t^2 + 2t - 9.$$

Приравниваем теперь это выражение к 15 и ищем *хороший* корень.

$$t^2 + 2t - 9 = 15, \qquad t^2 + 2t - 24 = 0; \quad t_1 = 4, \qquad t_2 = -6.$$

Второе значение t по понятным причинам придаем забвению.

Ответ: 4.

8. Надо понимать, что радиус шара и радиус оснований цилиндра равны по величине. Более того, если шар вписан в цилиндр, то он касается оснований цилиндра в их центрах, а также касается боковой поверхности цилиндра по окружности, сечение которой делит цилиндр на два одинаковых. Отсюда.

высота цилиндра в такой конфигурации равна двум радиусам основания. Формула площади поверхности шара

$$S_{\text{шар}} = 4\pi R^2.$$

Формула полной поверхности цилиндра

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot h = 6\pi R^2.$$

Получается, что для данной задачи площадь полной поверхности цилиндра в 1,5 раза больше площади поверхности шара, 1,5·41 = 61,5.

Ответ: 61,5.

9. Надо воспользоваться двумя свойствами: превращение произведения выражений под знаком логарифма в сумму логарифмов от каждого из них, а также формула перехода к новому основанию.

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b = 1 + \frac{3}{\log_b a} = 1 + 21 = 22.$$

Ответ: 22.

10. Внимательно посмотрев на единицы измерения, отсутствие или наличие кратных и дольных приставок, начинаем вычислять (килограммы в граммы не переводим, потому что килограмм – единица измерения в СИ, не смотря на наличие кратной приставки).

$$E = \frac{0{,}16}{2} \cdot \left(0{,}5 \cdot \sin\frac{14\pi}{12}\right)^2 = 0{,}02 \cdot \left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)^2 = 0{,}02 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}005.$$

Ответ: 0,005.

11. Пусть x – искомая скорость туриста на спуске, тогда подъем он преодолевал со скоростью (x – 3) км/ч. Нехитрое уравнение запишется так:

$$7(x-3) + 7x = 49, \qquad 14x - 21 = 49, \qquad x = 5.$$

Ответ: 5.

12. Гадать не пытаемся, честно считаем производную.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \;\; y' = -\left(\frac{1 \cdot (x^2 + 676) - x \cdot (2x)}{(x^2 + 676)^2}\right) = \frac{x^2 - 676}{(x^2 + 676)^2}.$$

Корни уравнения $y' = 0$ – $x_1 = 26$, $x_2 = -26$. При переходе через $x = 26$ производная меняет знак с – на +, значит в этой точке она принимает наименьшее значение.

Ответ: 26.

13. Наличие котангенса ограничивает область допустимых значений: убираем из множества рациональных чисел точки, при которых синус от x обращается в ноль. ОДЗ запишется так:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};\ \sin x \neq 0, \qquad x \neq \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Вспомним формулу разности синусов:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 4x \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos 4x = -\cos 4x.$$

Теперь начнем преобразовывать наше уравнение.

$$2\cos x \sin x - \cos 4x + 1 = 0, \qquad \sin 2x - \cos 4x + 1 = 0.$$

$$\sin 2x - (1 - 2\sin^2 2x) + 1 = 0, \qquad 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x = \dfrac{\pi k}{2}, \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2}, \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

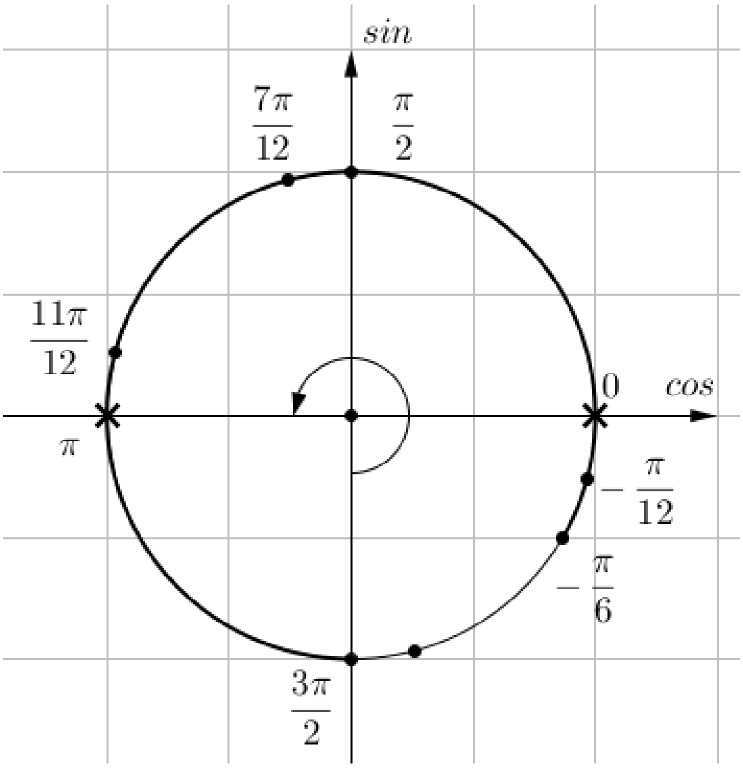
Первое множество совокупности содержит в себе точки, запрещенные ОДЗ. Поэтому решение исходного уравнения запишется так:

$$\left[\begin{array}{r} x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi k}{2}, \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2}, \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Корни на отрезке можно отбирать по-разному. Я рекомендую пользоваться тригонометрическим кругом, когда интервал по длине не превосходит 2π.

Для того, чтобы не ошибиться при нанесении точек на круг, полезно вспомнить, как удобно можно представить множество точек, задаваемое вторым равенством совокупности.

$$\left(x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k, \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

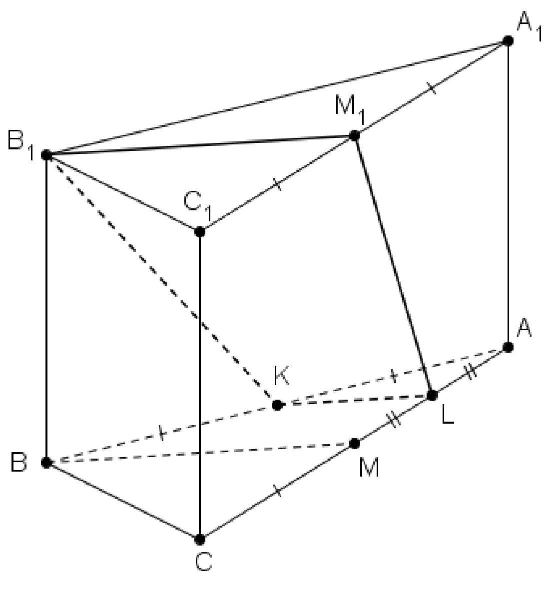


Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

б) $-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}$.

14. Прежде всего, правильная треугольная призма всегда еще и прямая, то есть каждая грань перпендикулярна каждому основанию, в основании – равные равносторонние треугольники.

а) Отметим точку M – середину AC. Для треугольников KAL и BAM выполнено условие подобия: при вершине A общий, а соответствующие стороны относятся одинаково. Значит $KL \parallel BM$.



Отметим точку M_1 – середину A_1C_1 и по совместительству, проекцию точки M на плоскость $A_1B_1C_1$. По построению имеем $B_1M_1 \parallel BM \parallel KL$. Искомое сечение KLB_1M_1 построено.

B_1M_1 является медианой в равностороннем треугольнике, значит отрезок B_1M_1 перпендикулярен линии A_1C_1 пересечения перпендикулярных плоскостей. Значит и плоскость KLB_1M_1 перпендикулярна плоскости грани ACC_1A_1.

б) KLB_1M_1 – прямоугольная трапеция, для вычисления ее площади нужно узнать длины оснований B_1M_1 и KL, а также длину перпендикулярной боковой стороны и высоты трапеции LM_1.

По свойству медианы равностороннего треугольника:

$$B_1M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6.$$

Из прямоугольного треугольника LMM_1:

$$LM_1 = \sqrt{(MM_1)^2 + (ML)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

По теореме косинусов из треугольника AKL с углом 60° при вершине A:

$$KL = \sqrt{(AK)^2 + (AL)^2 - 2 \cdot (AK) \cdot (AL) \cdot \cos\angle LAK} =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 12 \cdot \frac{1}{2}} = 3.$$

Искомая площадь трапеции KLB_1M_1:

$$S = \frac{B_1M_1 + KL}{2} \cdot LM_1 = 9.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) 9.

15. ОДЗ запишется так:

$$x \neq 1, \qquad x > 0.$$

Дальше будем раскрывать и преобразовывать, в надежде на упрощение неравенства.

$$\log_5 x + \log_x x - \log_x 3 < \frac{2\log_5 x}{\log_3 x} - \log_5 x.$$

$$2\log_5 x + 1 - \frac{1}{\log_3 x} - \frac{2\log_5 x}{\log_3 x} < 0.$$

$$\frac{2\log_5 x \log_3 x + \log_3 x - 1 - 2\log_5 x}{\log_3 x} < 0.$$

$$\frac{\log_3 x\,(2\log_5 x + 1) - (2\log_5 x + 1)}{\log_3 x} < 0.$$

$$\frac{(2\log_5 x+1)(\log_3 x-1)}{\log_3 x}<0, \qquad \frac{(\log_5 x^2+\log_5 5)(\log_3 x-\log_3 3)}{\log_3 x-\log_3 1}<0.$$

$$\frac{(\log_5 5x^2-\log_5 1)(\log_3 x-\log_3 3)}{\log_3 x-\log_3 1}<0.$$

В связи с тем, что

$$f(\alpha)=\log_5 \alpha\,, \qquad g(\alpha)=\log_3 \alpha$$

монотонно возрастающие функции при допустимых значениях аргумента, то последнее записанное неравенство равносильно следующему (отбрасываем логарифмы):

$$\frac{(5x^2-1)(x-3)}{x-1}<0, \qquad \frac{\left(x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(x-3)}{x-1}<0.$$

Теперь, когда все коэффициенты перед *x* равны 1 и перед дробью нет никаких минусов, применяя метод интервалов к последнему записанному неравенству и учитывая ОДЗ исходного неравенства, записываем решение:

$$x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup(1;3).$$

При решении задачи, мы (только на ОДЗ) применили формулы:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c\,, \qquad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad a\log_b c=\log_b c^a$$

формулы разности логарифмов, перехода к новому основанию и свойство выражения под знаком логарифма, представленного в виде степени. В частности

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}.$$

Дальше, чтобы получить в конце неравенство, состоящее из разностей логарифмов, был применен искусственный прием:

$$\log_a x=\log_a x-0=\log_a x-\log_a a.$$

Когда от неравенства, содержащего разности монотонных функций одного характера переходят к неравенству, содержащему разности только их аргументов, то говорят, что применили *метод рационализации*. Как розу ты не назови, а надо всё-таки разобраться.

Мы честно получили неравенство

$$\frac{(\log_5 5x^2 - \log_5 1)(\log_3 x - \log_3 3)}{\log_3 x - \log_3 1} < 0.$$

Оно, не менее честно, равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases}(\log_5 5x^2 - \log_5 1)(\log_3 x - \log_3 3) > 0, \\ \log_3 x - \log_3 1 < 0; \end{cases} \\ (2)\begin{cases}(\log_5 5x^2 - \log_5 1)(\log_3 x - \log_3 3) < 0, \\ \log_3 x - \log_3 1 > 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

Дальше – больше:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\log_5 5x^2 - \log_5 1 > 0, \\ \log_3 x - \log_3 3 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases}\log_5 5x^2 - \log_5 1 < 0, \\ \log_3 x - \log_3 3 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \\ \log_3 x - \log_3 1 < 0. \end{cases}$$

Здесь уже записаны простейшие логарифмические неравенства. Отбрасывание логарифмов в них и переход к неравенству того же знака, но уже для аргументов, не вызывает никаких сомнений. Доведя до конца решение систем (1) и (2) и найдя их объединение, мы получим тот же самый ответ.

Так вот, чтобы много не писать, люди придумали метод рационализации: когда неравенство после всего пережитого содержит разности монотонных функций, то их можно отбросить и перейти к неравенству аргументов. Тут нет ничего противозаконного, только если вы не допустите ошибок при решении.

Вернемся чуть-чуть назад. Применим одну из фишек математических мастеров:

$$\log_5 x^2 + \log_5 5 = \log_5 x^2 - (-\log_5 5) = \log_5 x^2 - \log_5 \frac{1}{5},$$

то есть чуток быстрее получили бы то же самое, миновав применение формулы произведения логарифмов.

Еще разок про рационализацию. По определению монотонно возрастающей функции:

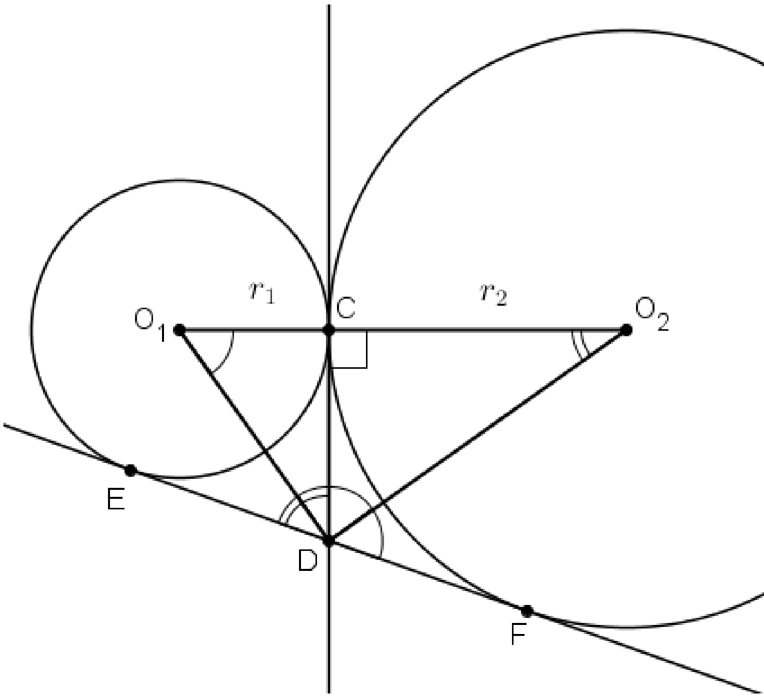
$$x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

Вот и всё. Мы получили что хотели.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup (1; 3)$.

На этом этапе мы уже заработали 18 первичных баллов, что соответствует 78 баллом сертификата ЕГЭ, мы уже имеем право воспользоваться дипломом олимпиады из перечня и поступить без вступительных экзаменов, получая сверху по 15 тысяч в месяц...

16. Эта задача классическая.



а) По свойству точки, из которой проведены две касательные к окружности, отрезки DO_1 и DO_2 являются биссектрисами, каждая из которых разделяет два смежных угла. Значит угол между этими биссектрисами равен 90°:

$$\angle O_1DO_2 = 90°.$$

б) Найдем длину отрезка O_1O_2:

$$O_1O_2 = \sqrt{(DO_1)^2 + (DO_2)^2} = \sqrt{5 + 20} = 5.$$

Если C – точка касания окружностей, то прямоугольные треугольники O_1DC и DO_2C подобны, потому что

$$\angle CO_2D = 90° - \angle CDO_2 = \angle CDO_1.$$

Из подобия можно записать следующие равенства:

$$\frac{r_1}{DO_1} = \frac{CD}{DO_2}, \qquad CD = \frac{r_1 \cdot DO_2}{DO_1}.$$

$$\frac{r_2}{DO_2} = \frac{CD}{DO_1}, \qquad CD = \frac{r_2 \cdot DO_1}{DO_2}.$$

$$\frac{r_1 \cdot DO_2}{DO_1} = \frac{r_2 \cdot DO_1}{DO_2}, \qquad r_1 = \left(\frac{DO_1}{DO_2}\right)^2 r_2.$$

Подставляя численные значения, получим систему уравнений для нахождения радиусов окружностей.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 5, \\ r_1 = \dfrac{1}{4} r_2; \end{cases} \Leftrightarrow r_1 = 1, \qquad r_2 = 4.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) 1; 4.

17. Нам понадобится формула суммы n элементов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 \frac{q^{n-1}}{q-1}.$$

Теперь обозначим величину кредита через A. Увеличим долг на а%:

$$A + A \cdot \frac{\mathrm{a}}{100} = A\left(1 + \frac{\mathrm{a}}{100}\right) = Aq.$$

Пусть b = 587250 рублей, c = 328050 рублей. Важно: первый платеж по кредиту происходит после увеличения долга, последний платеж по кредиту происходит после последнего увеличения долга и обнуляет долг.

Уравнение в случае двухгодичного кредита:

$$(Aq - b)q - b = 0, \qquad Aq^2 - bq - b = 0, \qquad A = b\frac{q+1}{q^2}.$$

Уравнение в случае четырехлетнего кредита:

$$\left(\left((Aq - c)q - c\right)q - c\right)q - c = 0, \qquad Aq^4 - c(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 0,$$

$$A = c\frac{q^4 - 1}{(q-1)q^4}.$$

Получим уравнение:

$$b\frac{q+1}{q^2} = c\frac{q^4 - 1}{(q-1)q^4}, \qquad b(q+1) = c\frac{(q-1)(q+1)(q^2+1)}{(q-1)q^2},$$

$$q = \sqrt{\frac{c}{b-c}} = \sqrt{\frac{328050}{587250 - 328050}} = \sqrt{\frac{6561}{5184}} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8} = 1{,}125.$$

Где-то там в вычислениях после очевидного сокращения дроби на 10, сразу видно еще сокращение на 5. Дальше находим суммы цифр числителя и знаменателя, обе они делятся на 9, значит и числа делятся на 9. Итак:

$$1 + \frac{\text{a}}{100} = 1{,}125, \qquad \text{a} = 12{,}5.$$

Ответ: 12,5.

18. По виду уравнения так и хочется сделать замену и начать решать квадратное уравнение. А зачем это делать? Затем, что в конце мы получим совокупность уравнений, которые вообще говоря приятнее того, что у нас есть сейчас.

$$\frac{D}{4} = 9 - 5a(6-5a) = 9 - 30a + 25a^2 = (5a-3)^2.$$

Дискриминант неотрицателен при любом a, что и неудивительно. Это сигнал к тому, чтобы двигаться дальше. Исходное уравнение теперь равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} |x+3| + |x-a| = 3 - 5a + 3 = -5a + 6, \\ |x+3| + |x-a| = 3 + 5a - 3 = 5a. \end{array}\right.$$

Построим несколько графиков вида $y = |x+3| + |x-a|$ при различных значениях a.

a = 0:

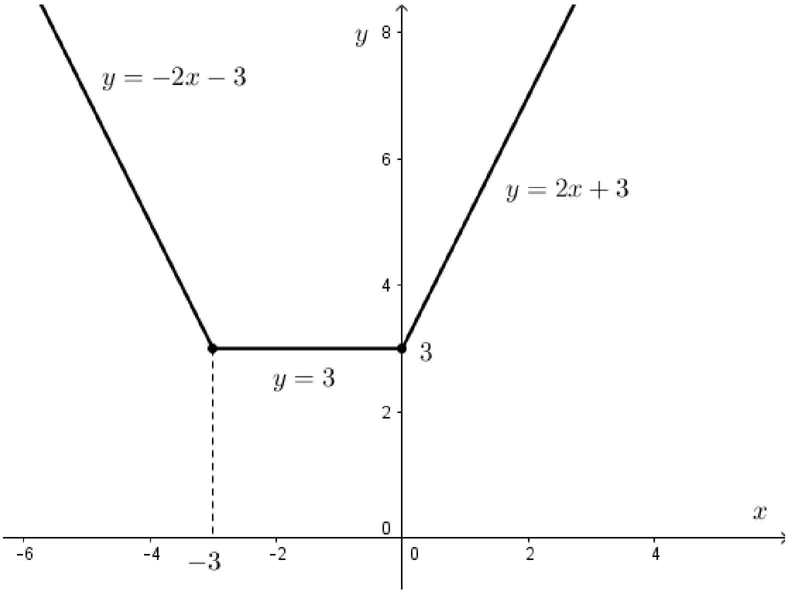
$$y = |x+3| + |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 2x + 3, & x \geq 0, \\ y = 3, & -3 \leq x < 0, \\ y = -2x - 3, & x < -3. \end{array}\right.$$

a = 5:

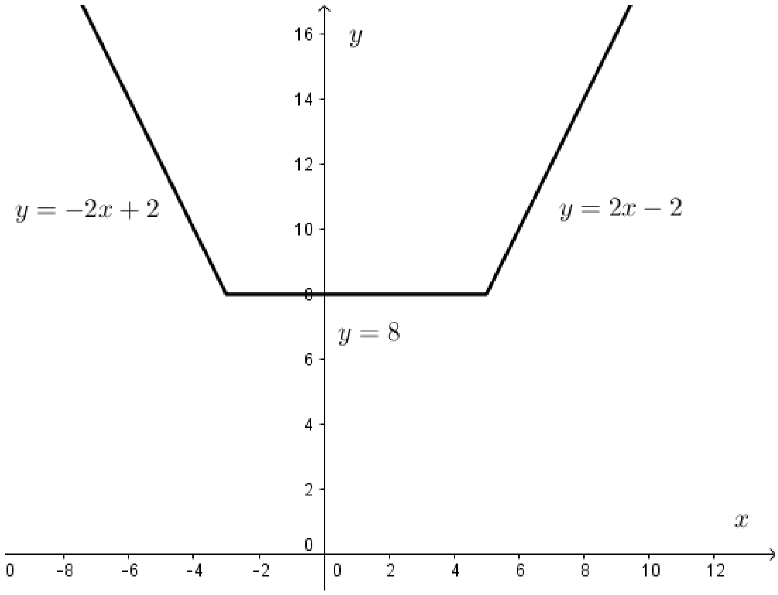
$$y = |x+3| + |x-5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 2x - 2, & x \geq 5, \\ y = 8, & -3 \leq x < 5, \\ y = -2x + 2, & x < -3. \end{array}\right.$$

a = –5:

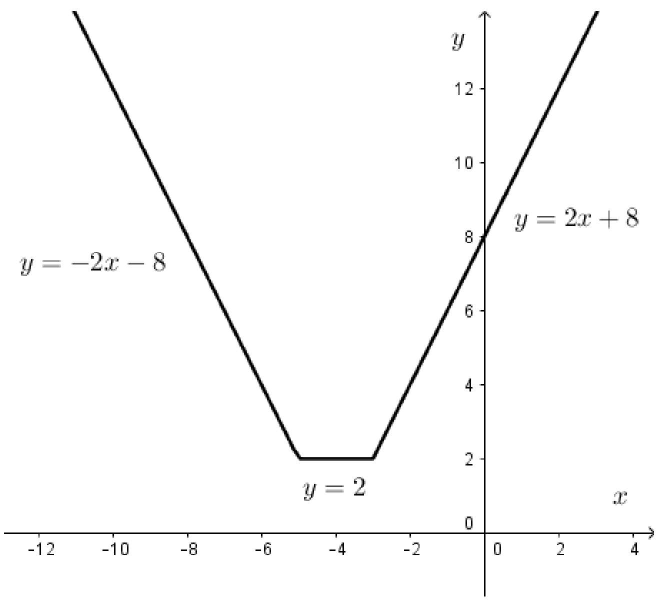
$$y = |x+3| + |x+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 2x + 8, & x \geq -3, \\ y = 2, & -5 \leq x < -3, \\ y = -2x - 8, & x < -5. \end{array}\right.$$



y
x
$y=-2x-3$
$y=2x+3$
$y=3$
3
-3
8
6
4
2
0
-6
-4
-2
0
2
4



y
x
$y=-2x+2$
$y=2x-2$
$y=8$
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

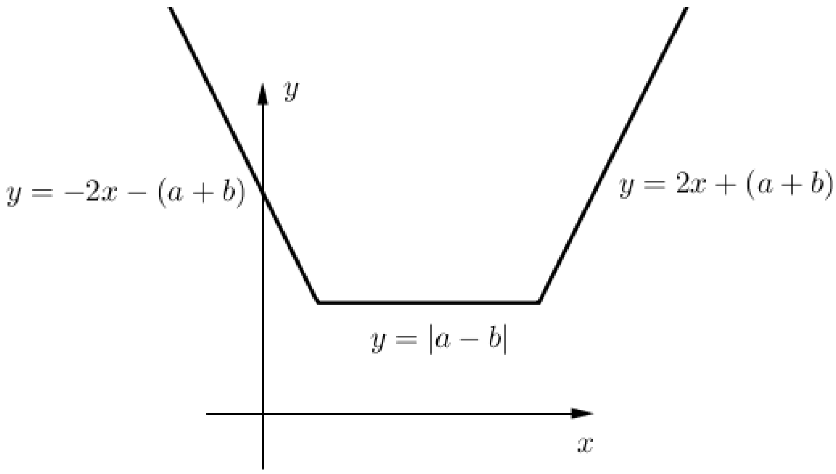


y
x
$y=-2x-8$
$y=2x+8$
$y=2$
12
10
8
6
4
2
0
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

Теперь более или менее понятно. В общем случае для функции вида

$$y = |x + a| + |x + b|$$

ее график будет выглядеть так:



Теперь самое время перечитать условие задачи и вспомнить, о чем нас просили.

Судя по графику, уравнение $|x + a| + |x + b| = k$ будет иметь ровно два решения, когда $k > |a - b|$. Чтобы наша совокупность

$$\left[\begin{array}{l} |x + 3| + |x - a| = -5a + 6, \\ |x + 3| + |x - a| = 5a, \end{array}\right.$$

имела ровно 2 решения, нужно, чтобы выполнялась следующая совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5a + 6 > |3 + a|, \\ 5a < |3 + a|; \end{cases} \\ \begin{cases} 5a > |3 + a|, \\ -5a + 6 < |3 + a|. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (*)$$

Решаем не спеша.

$$-5a + 6 > |3 + a| \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + 6 > 0, \\ 5a - 6 < 3 + a, \\ 3 + a < -5a + 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{6}{5}, \\ a < \dfrac{9}{4}, \\ a < \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, решение четвертого неравенства совокупности (*) запишется так:

$$a > \frac{1}{2}.$$

$$5a < |3+a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+a > 5a, \\ 3+a < -5a; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \frac{3}{4}, \\ a < \frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow a < \frac{3}{4}.$$

Понятно, что решение третьего неравенства совокупности (*) будет:

$$a > \frac{3}{4}.$$

Окончательно, совокупность (*) запишется так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < \frac{1}{2}, \\ a < \frac{3}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} a > \frac{3}{4}, \\ a > \frac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \frac{1}{2}, \\ a > \frac{3}{4}; \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

19. Суммарная масса стада:

$$M = 3 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 1{,}6 \cdot 50 = 380.$$

Уже можем точно ответить на вопрос пункта б): нет, не сумеют, потому что общая масса стада 380 тонн, а с помощью 37 вагонов можно перевезти только 37·10 = 370 тонн.

Мы уже получили 29 первичных баллов, что соответствует 99 баллам ЕГЭ.

Надежда усадить стадо в 39 вагонов есть, потому что 380 < 390, но встает вопрос о наиболее компактной "упаковке" животных: чтобы в каждом вагоне было как можно меньше незадействованной разрешенной массы.

Если животных не комбинировать, то в 1 вагон помещаются 3 слона, незадействованная масса 1 кг. Всего необходимо 60:3 = 20 вагонов.

В 1 вагон эффективно помещаются пять слоних, нужно 60:5 = 12 вагонов.

Что же касается слонят, то в 1 вагон можно усадить максимум 6 слонят. При такой посадке незадействованная масса 10–6·1,6 = 0,4 тонны, но последний вагон со слонятами будет недогружен сильнее: 8 вагонов по 6 слонят и 1 вагон, в котором всего 2 слоненка. Всего 9.

Итого при самой бесхитростной посадке нужен 41 вагон.

Давайте попробуем улучшить результат. Будем сажать в 1 вагон по 2 слона и 2 слонихи, тогда незадействованной массы в вагоне не будет: $10 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$.

Тогда для всех взрослых слонов потребуется 30 вагонов, итого для стада 39 вагонов.

Уже получили 100 баллов ЕГЭ.

Теперь можно переиначить вопрос из пункта в): можно ли перевезти стадо с помощью 38 вагонов?

Для этого в каждом из вагонов не должно быть незадействованной массы. Найдем как можно больше вариантов плотной "упаковки".

2 слона и 2 слонихи в 1 вагон, в итоге 39 вагонов.

5 слонят и 1 слониха в 1 вагон, итого 10 вагонов. Но оставшиеся 60 слонов и 50 слоних не умещаются в 28 вагонов (10 слонов не садятся в 2 вагона).

По 5 слоних в 1 вагон хорошо, но других членов стада потом компактно не усадишь.

Значит наименьшее количество вагонов для стада всё-таки 39. Плохо, конечно, что мы не доказали этого ни с использованием нахождения каких-то критических значений какой-то системы каких-то граничных неравенств, ни с использованием каких-то признаков делимости каких-то целых чисел.

Но мы ответили на вопрос пункта в) и методом перебора доказали оценку (второй и третий раз подряд заработали 100 баллов ЕГЭ).

Ответ: а) сумеют; б) нет; в) 39.

Автор: Джендубаев Эдуард

4ege.ru