ДОСРОЧНЫЙ ЕГЭ 2016

МАТЕМАТИКА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

► 1.

Посмотрим, сколько в одном футе метров. Известно, что 1 метр равен 100 сантиметров, тогда 1 фут = 30,5 см = 30,5 / 100 м = 0,305 м. Теперь остается величину 35000 футов умножить на 0,305: $35000 \cdot 0{,}305 = 10675$ м. Такая высота полета самолета не вызывает сомнений.

Ответ: 10675. ◄

► 2.

Определим предварительно цену деления горизонтальной оси – оси времени. Для этого возьмем две соседние отметки, обозначенные числами (например 0 и 5) и посчитаем количество делений между ними. 4 деления разбивают отрезок от 0 до 5 на пять отрезков, величиной 5 : 5 = 1 час.

Теперь прикладываем линейку параллельно горизонтальной оси к отметке 1,4 В на вертикальной оси – ищем точку пересечения с графиком. Абсцисса этой точки равна 1 ч.

Прикладываем линейку параллельно горизонтальной оси к отметке 1 В на вертикальной оси, также ищем точку пересечения с графиком. Её абсцисса равна 15 ч.

Итак, с момента времени 1 ч напряжение начало падать с 1,4 В. Падение до 1 В кончилось в момент времени 15 ч. Остается найти разность: 15 – 1 = 14.

Ответ: 14. ◄

► 3.

Прикладываем линейку к точке C перпендикулярно стороне AB и считаем количество клеточек от очки C до пересечения с AB вдоль прямой. Их ровно 5.

Ответ: 5. ◄

► 4.

Пусть число k – срок службы сканера (в годах). Вероятность того, что $k > 2$, равна 0,87 по условию. Вероятность того, что $k < 1$ равна 1 – – 0,94 = 0,06.

Вероятности «попадания» числа k в неблагоприятные области числовой оси определены (естественно в положительной половине оси). Поскольку число k существует, то полная вероятность его появления на числовой оси равна 1.

Значит остается только найти разность 1 – 0,87 – 0,06 = 0,07, что будет соответствовать принадлежности числа k требуемому в задаче интервалу от 1 до 2.

Ответ: 0,07. ◄

► 5.

Исходное уравнение равносильно следующему:

$$5x + 47 = 8^3, \qquad 5x + 47 = 512, \qquad x = 93.$$

Ответ: 93. ◄

► 6.

Запишем формулу площади параллелограмма два раза:

$$S = ah_a = bh_b.$$

Искомая высота найдется: 9 · 10 / 15 = 6.

Ответ: 6.◄

► 7.

Функция $f(x)$ убывает там, где функция $f'(x)$ отрицательна. Точки графика $y = f'(x)$ с абсциссами x_5, x_6, x_9 имеют отрицательные ординаты – всего три точки.

Ответ: 3. ◄

► 8.

Исходя из условия, очевидно $h_к = R_к = R_{сф}$. Тогда

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R_к^2 h_к = \frac{1}{3}\pi R_{сф}^3 = 47.$$

В то же время

$$V_{сф} = \frac{4}{3}\pi R_{сф}^3 = 4 \cdot 47 = 188.$$

Ответ: 188. ◄

► 9.

$$= 5^{\frac{3}{5}\cdot 15} \cdot 7^{\frac{2}{3}\cdot 15} \cdot 5^{-9} \cdot 7^{-9} = 5^{9-9} \cdot 7^{10-9} = 7.$$

Ответ: 7. ◄

► 10.

Выражаем l из данной формулы.

$$v = \sqrt{2la}, \qquad l = \frac{v^2}{2a}.$$

Поскольку никакие единицы измерения не подлежат преобразованиям, сразу подставляем указанные числа в полученную формулу.

$$l = \frac{v^2}{2a} = \frac{8100}{9000} = 0{,}9.$$

Ответ: 0,9. ◄

► 11.

Пусть объем резервуара равен 1 л. Производительность (или скорость заполнения резервуара, скорость истечения жидкости из трубы) первой трубы равна x л/мин, второй трубы – y л/мин.

Тогда время заполнения всего резервуара только первой трубой запишется так $t_1 = 1/x$, время заполнения всего резервуара только второй трубой $t_2 = 1/y$, время заполнения всего резервуара обеими трубами, работающими вместе $t_{12} = 1/(x+y)$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 45, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 48. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{45}, \\ y - x = 48xy, \end{cases} \quad y - \frac{1}{45} + y = 48y\left(\frac{1}{45} - y\right).$$

$$48 \cdot 45y^2 + 42y - 1 = 0, \qquad \frac{D}{4} = 441 + 2160 = 2601.$$

$$y = \frac{-21 + 51}{48 \cdot 45} = \frac{30}{48 \cdot 45} = \frac{1}{72}.$$

Требуется найти величину $1/y = 72$.

Ответ: 72. ◄

► 12.

$$y = \cos x - 2x\cos x + 2\sin x + 7.$$

$$y' = -\sin x - 2(\cos x - x\sin x) + 2\cos x = -\sin x + 2x\sin x.$$

Приравниваем производную к нулю и ищем корни.

$$-\sin x + 2x\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ x = 0{,}5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = 0{,}5. & \end{array}\right.$$

Среди множества решений уравнения $y' = 0$ только $x = 0{,}5$ принадлежит указанному интервалу.

Ответ: 0,5. ◄

► 13.

Перепишем уравнение в следующем виде

$$(2^x)^3 - 3 \cdot (2^x)^2 - 2^x + 3 = 0.$$

Заменим $t = 2^x > 0$. Удачную группировку слагаемых заметить нетрудно.

$$t^2(t-3) - (t-3) = 0, \qquad (t-3)(t-1)(t+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=1, \\ t=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=3, \\ 2^x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_2 3, \\ x=0. \end{array}\right.$$

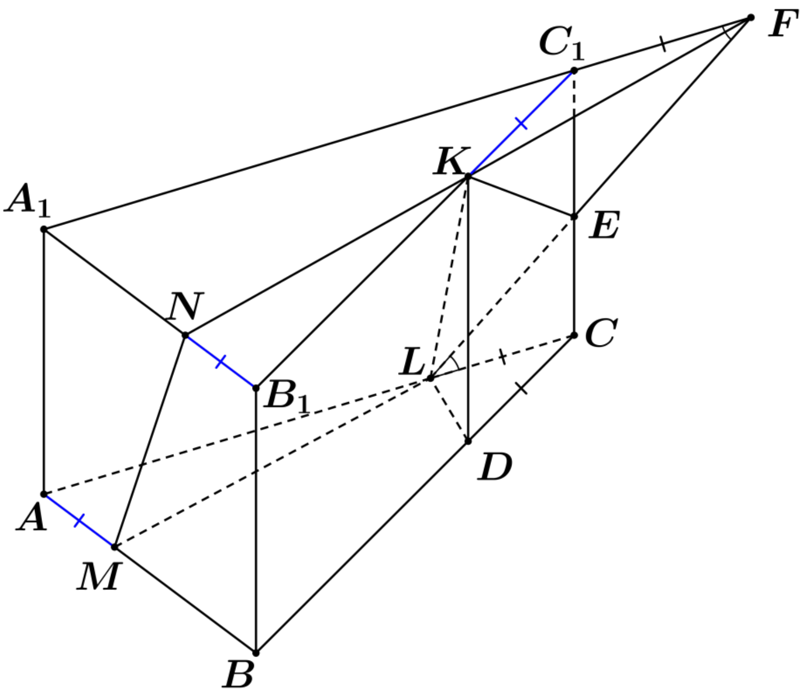
Понятно, что $\log_2 3 < 3$. Остается сравнить это число с 1,5.

$$1{,}5 \vee \log_2 3, \qquad \log_2 2^{3/2} \vee \log_2 3, \qquad 2\sqrt{2} \vee 3, \qquad 8 < 9.$$

Значит $x = \log_2 3$ принадлежит указанному отрезку.

Ответ: а) $\log_2 3$, 0; б) $\log_2 3$. ◄

► 14.



Для получения точки L проведем через точку M прямую, параллельную NK.

Треугольник NB_1K с углом 60° имеет стороны 2 и 4, значит $NK \perp A_1B_1$, $ML \perp AB$.

Значит $ML = NK = 2\sqrt{3}$.

Найти MN не составляет труда: опустим перпендикуляр из N на AB, получим точку E (не показана). $NE = 2\sqrt{2}$, $ME = 2$, $MN = 2\sqrt{3}$.

Чтобы найти KL проведем перпендикуляр из K на BC, получим точку D. $DL = 2$, поскольку $DC = LC = 2$, а угол ACB равен 60°.

Тогда, из прямоугольного треугольника KDL с известными длинами катетов находим $KL = 2\sqrt{3}$.

Значит $MNKL$ – квадрат, его площадь равна 12.

б) Продлим A_1C_1 и NK до пересечения (точка F). Легко показать, что KC_1F равнобедренный. Углы ELC и EFC_1 равны как накрест лежащие при параллельных AC и A_1C_1. Значит одноименные треугольники равны, откуда $CE = EC_1 = \sqrt{2}$.

Значит треугольники KC_1E и LCE равны, откуда по теореме Пифагора

$$LE = KE = \sqrt{6}.$$

К искомому сечению осталось прибавить треугольник KLE. Найдём угол при вершине E. По теореме косинусов:

$$KL^2 = KE^2 + LE^2 - 2 \cdot KE \cdot LE \cdot \cos\gamma, \qquad \cos\gamma = 0.$$

Получается, что треугольник KLE прямоугольный, откуда его площадь равна 3.

Окончательно, искомая площадь сечения 12 + 3 = 15.

Ответ: а) утверждение доказано; б) 15. ◄

► 15.

Выписываем ОДЗ.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0, \\ 5x - 9 > 0, \\ 5x - 9 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{9}{5}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 20 - 11x \geq 0, \\ \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 20 - 11x < 0, \\ \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq \dfrac{20}{11}, \\ (5x - 9 - 1)(x^2 - 4x + 5 - 1) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{20}{11}, \\ (5x - 9 - 1)(x^2 - 4x + 5 - 1) > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{20}{11}, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

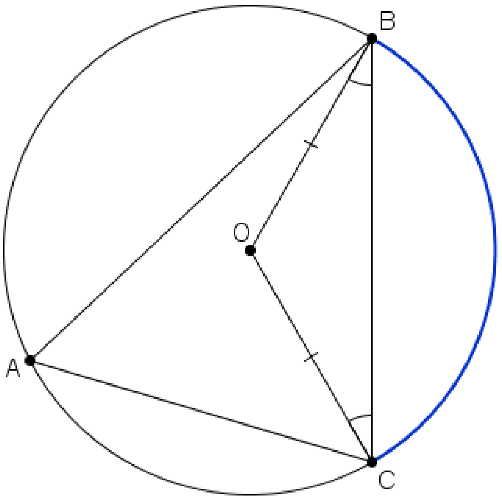
Осталось сравнить

$$\frac{9}{5} \vee \frac{20}{11}, \qquad \frac{99}{55} < \frac{100}{55}.$$

С учетом ОДЗ: $9/5 < x \leq 20/11$, $x > 2$.

Ответ: $9/5 < x \leq 20/11$, $x > 2$. ◄

► 16.

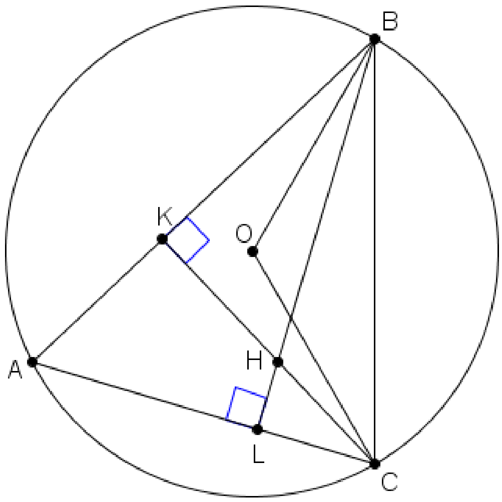


а) Углы OBC и OCB равны, значит $\angle BAC = 2\alpha$. $\angle BOC = 180°–2\alpha$. Центральный угол BOC опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BAC. Известно, что вписанный угол измеряется половиной градусной меры дуги, на которую он опирается. Получим уравнение

$$\alpha = 180°–2\alpha, \alpha = 30°.$$

Отсюда $\angle BOC = 120°$, $\angle BAC = 60°$. Из прямоугольного треугольника ABL $\angle ABL = 30°$, из прямоугольного треугольника HBK $\angle BHK = 60°$.

Углы BHK и BHC – смежные, значит $\angle BHC = 120° = \angle BOC$.

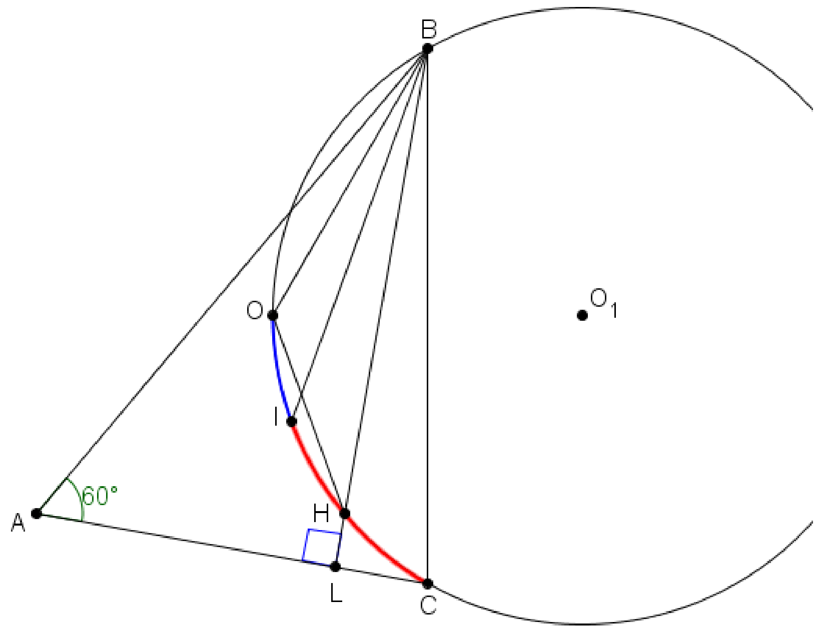


Оба угла равны, причем $\angle BOC$ по определению опирается на дугу окружности, описанной около треугольника BOC, которая отсекается стороной BC. Поскольку $\angle BHC$ тоже опирается на BC, то для точки H нет иной альтернативы, кроме принадлежности окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Известно, что угол с вершиной в центре вписанной окружности, образованный двумя биссектрисами углов треугольника, равен удвоенному углу при вершине треугольника, биссектриса которого не является частью этого угла.

Значит $\angle BIC = 120°$ и точка I также лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

Для наглядности изменим рисунок, чтобы угол OHI не был слишком острым. Точка O_1 – центр окружности, описанной около треугольника BOC.



Раз $\angle ABC = 40°$, то $\angle IBC = 20°$, значит градусная мера дуги CHI равна 40°.

С другой стороны $\angle BOC = 30°$, значит градусная мера дуги OC равна 60°.

Получается, что градусная мера дуги IO равна 20°.

Искомый угол OHI, опирающийся на дугу 20°, равен половине её градусной меры, 10°.

Ответ: а) утверждение доказано; б) 10°. ◄

► 17.

Обозначим через q = 1,1 множитель роста вклада в N миллионов рублей. Будем выписывать значение вклада после увеличения в конце года.

После 1-го года: qN.

После 2-го года: q^2N.

После 3-го года: $q(q^2N + 1)$, потому что сначала была прибавка в 1 миллион, а потом увеличение.

После 4-го года: $q(q(q^2N + 1) + 1)$, по той же причине.

Получим неравенство:

$$q^4N + q^2 + q > 10, \qquad N > \frac{10 - 1{,}1 - 1{,}21}{1{,}4641} = \frac{7{,}69}{1{,}4641}.$$

Осталось поделить в столбик числа 76900 и 14641.

$$\frac{76900}{14641} = 5\frac{3695}{14641}.$$

Выходит, что N должно быть больше 5, ближайшее целое $N = 6$ подходит.

Ответ: 6 миллионов рублей. ◄

► 18.

Заметим разложение числителя на множители:

$$xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0, \qquad xy(y-2) - 4(y-2) = 0,$$

$$(xy-4)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ xy = 4. \end{array}\right.$$

Можем переписать систему в следующем виде:

$$\begin{cases} y < 4, \\ y = ax, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ xy = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первая строка системы разбивает координатную плоскость на две части. Нас устраивают точки, лежащие ниже прямой $y = 4$ и не лежащие на ней, потому что неравенство строгое.

Вторая строка системы задает семейство прямых, обязательно проходящих через начало координат (0; 0).

Третья строка задает прямую $y = 2$, четвертая строка задает гиперболу $y = x / 4$.

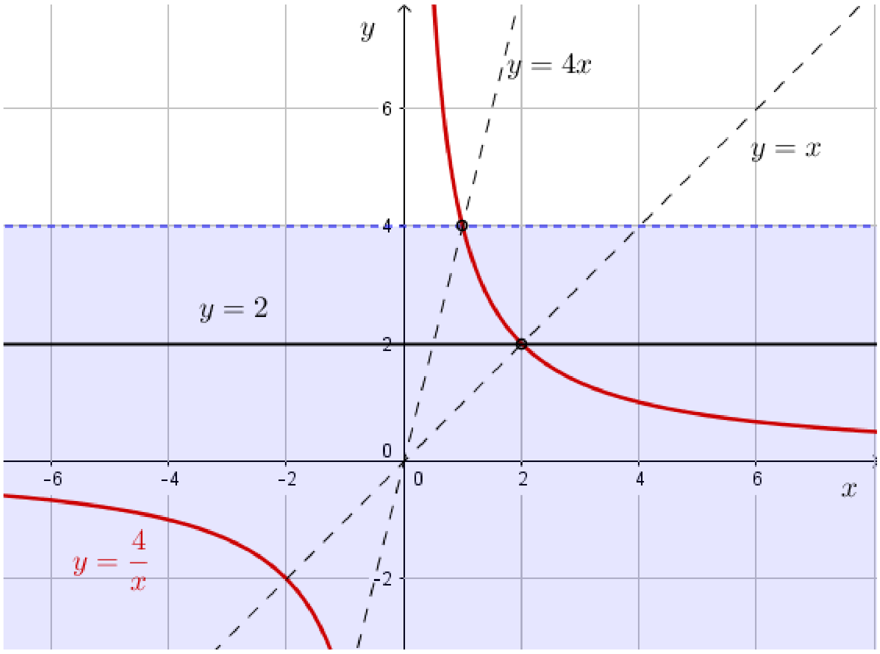
Изобразим на координатной плоскости задаваемые множества чисел.

Прямая $y = ax$ при отрицательных значениях a будут находиться во II и IV квадрантах и пересечений с гиперболой $y = 4 / x$ не будет.

При $a = 0$ прямая $y = 0$ не имеет пересечений с участвующими графиками.

Значения $0 < a < 1$ удовлетворяют условию, при $a = 1$ имеются совпадающие решения (2; 2), что противоречит условию.

Значения $1 < a < 4$ также удовлетворяют условию, при $a = 4$ $y = 4$, что не удовлетворяет неравенству системы.



Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; 4)$.

► 19.

а) Наибольшее из чисел множества, 199, является простым, поэтому указанное множество никак нельзя разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел. (Можно было бы взять и простое число 101.) Указанное множество не является *хорошим.*

б) Сумма показателей степеней $1 + 2 + 3 + ... + 200 = 20100$ является четным числом, поэтому данное множество может быть разбито на два подмножества чисел с одинаковым произведением, значит оно является *хорошим.*

в) Числа 5, 7 и 11 исключаем из рассмотрения сразу, потому что другими числами невозможно получить произведение, равное какому-либо из данных чисел.

Подмножество 1, 3, 4, 12 является *хорошим*: $1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$.

Подмножество 3, 4, 9, 12 является *хорошим*: $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$.

Дальнейший перебор показывает, что больше *хороших* подмножеств выбрать не удается.

Итак, исходное множество содержит 2 *хороших* четырехэлементных подмножества.

Ответ: а) нет; б) да; в) 2.

Э. Д.