ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ 1995-1998 ГГ.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (ПИСЬМЕННО).

Вариант 1995 г. (Предварительный экзамен)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найти номер того члена прогрессии, который равен 12.

2. Решить уравнение $|\log_{6x}(x^2-7x+12)-1| = 1-\log_{6x}(x^2-7x+12)$.

3. Найти все корни уравнения $4\cdot 3^{\cos x}+3^{-\cos x}=4\sqrt{2}$, удовлетворяющие неравенствам $-7\pi/3 < x < -\pi/3$.

4. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство $|1/x+2a| \le x$.

5. Две окружности радиусов *r* и *R* с центрами в точках O_1 и O касаются внутренним образом в точке K. В точке *A* окружности радиуса *r* проведена касательная , пересекающая окружность радиуса *R* в точках *B* и *C*. Известно, что *AC*:*AB* = *p* и отрезок *AC* пересекает отрезок *OK*. Определить: 1) при каких условиях на *r*, *R* и *p* возможна такая геометрическая конфигурация; 2) длину отрезка *BC*.

6. В кубе *ABCDA'B'C'D'* с параллельными гранями *ABCD* и *A'B'C'D'* длина ребра равна 8. Через точки *M*, *N* и *K*, расположенные на ребрах *BC*, *CD* и *CC'* соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника *MCK*, опущенной из вершины *C*, равна $6/\sqrt{13}$, величина угла *MNK* равна $\arccos(3\sqrt{2}/5)$, произведение длин отрезков *MN* и *KN* равно $30\sqrt{2}$ и площадь треугольника *MNC* меньше 7. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника *MNK* и трех граней куба с общей точкой *A'*.

Ответы: **1.** $n=15$. *2.* $x\in(0,1/6)\cup[1,3)\cup(4,12]$.

3. $x\in\{\arccos\log_3((\sqrt{2}+1)/2)-2\pi\,;\,-\arccos\log_3((\sqrt{2}+1)/2)\}$.

4. При $a<-1$ $x\in[a+\sqrt{a^2+1};-a-\sqrt{a^2-1}]\cup[-a+\sqrt{a^2-1};+\infty)$,

при $a\ge -1$ $x\in[a+\sqrt{a^2+1};+\infty)$. **5.** 1) $R/r\ge(p+1)^2/(2p)$,

2) $BC=(p+1)/p\sqrt{4Rrp-r^2(p+1)^2}$. **6.** $R=109(6-\sqrt{14})/132$.

Вариант 1995 г. (Основной экзамен)

1. Найти все целые числа *n* и *m*, для которых $3n^2+2nm=11$ и $n+2m\ge 10$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x + xy + 5y = 10 + 7\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$

3. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом. $AC = b$, $AB = c$.Найти площадь четырехугольника $AKML$.

4. Решить неравенство

$$\log_{2\sin x - 1}(43 - 4\sin x + 4\sin^2 x - x^2 + x) \le 3\log_3 2 / \log_3(2\sqrt{2})$$

5. Транспортное агентство осуществляет грузовые перевозки. Стоимость одного рейса при загрузке машины a тоннами груза складывается из эксплуатационных расходов $p_2 a^2$ тысяч руб., оплаты труда водителя p_3 тыс. руб. и прочих расходов $p_1 a$ тыс. руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются соответственно первым, третьим и шестнадцатым членами некоторой арифметической прогрессии. Их сумма равна 340, а разность прогрессии d является корнем уравнения $d^2 - 37d + 340 = 0$. Агентство должно израсходовать 10000 тысяч руб. Если выполнено 12 одинаковых рейсов, то суммарная масса перевезенного груза больше 40 тонн. Сколько следует выполнить рейсов, чтобы масса перевезенного груза была максимальной ?

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = 2/3$. Найти минимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Ответы: **1.** $n = -11$**,** $m = 16$**. 2.** $(x, y) \in \{(2, \sqrt{3}); (\sqrt{3}, 2)\}$**.**

3. $\dfrac{\sqrt{(4b^2 - c^2)(4c^2 - b^2)}}{30}$**.**

4. $x \in \left(\dfrac{-11\pi}{6}, \dfrac{-3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-7\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{13\pi}{6}, 7\right]$**.**

5. 17. **6.** $\dfrac{57\sqrt{2} - 64}{36}$.

Вариант 1996 г. (Предварительный экзамен)

1. Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4 - (2x+1)^2} + (2x+1)^2 \ge 0$.

2. Решить уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.

3. Решить уравнение $\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, длина стороны BC равна $\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти площадь треугольника ABC.

5. Найти все целочисленные решения уравнения

$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0$.

6. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины ребер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найти периметр треугольника KLM.

Ответы: **1.** $x \in (-\infty, -1] \cup \{-1/2\} \cup [0, +\infty)$. **2.** $x = 1$, $x = -15/11$.

3. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **4.** $S = 1$. **5.** $x = \{(2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3)\}$.

6. $p = 41\left(\frac{2\sqrt{105}}{110} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{22}\right)$.

Вариант 1996 г. (Основной экзамен)

1. Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найти $b^3 + c^3$.

2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.

3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$25^x - (a-1)\,5^x + 2a + 3 = 0$ и указать при каких a оно имеет единственное решение.

4. Решить неравенство

$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \le \dfrac{7\pi}{6}.$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29} \end{cases}$$

6. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Хорда *CD* первой окружности имеет с хордой *EF* второй окружности общую точку *M*. Длина отрезка *AB* в три раза больше длины отрезка *CM*, которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка *MD* и в шесть раз меньше длины отрезка *MF*. Какие значения может принимать длина отрезка *AM*, если известно, что длина отрезка *BM* равна 2, а длина *AB* в девять раз больше длины отрезка *EM*?

Ответы: **1.** 70. **2.** 5. **3.** $a \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow x = \log_5 \dfrac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$;

$a \in \left[-\dfrac{3}{2}, 11\right) \Rightarrow x \in \varnothing$; $a = 11 \Rightarrow x = 1$; $a \in (11, +\infty) \Rightarrow$

$x_{1,2} = \log_5 \dfrac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$. Единственно при $a \in (-\infty, -\dfrac{3}{2}) \cup \{11\}$.

4. $x \in \left[\dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26}, 0\right]$. **5.** $x = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, y = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}$.

6. 1) $AM = 1$; 2) $AM = 4$.

Вариант 1997 г. (Предварительный экзамен)

1. Решить неравенство $\sqrt{\log_{2\cos\frac{2\pi}{5}} (x-1)} < 1.$

2. Решить уравнение $\dfrac{4 - 3\cos 2x - 6\cos^2 x + 11\sin x}{\cos x + 2\sqrt{2}\sin x} = 0.$

3. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \left|y^2 + 4x - 5\right| + 2x = -3 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

4. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, а точка O — на отрезке AD. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, $AC = 2\sqrt{2} \cdot AB$, величина угла DAC в два раза больше величины угла BAD, а величина угла OCA в два раза меньше величины угла OCB. Найти косинус угла ACB.

5. Найти все значения x, для которых неравенство

$\sqrt{2x^2+2x+a} > 4a\cdot x^2-(2a-1)\cdot(2x-2)-3a$ выполняется для всех a из отрезка $[-2,0]$.

6. Объем пирамиды $SABC$ равен V. Через точки M и N, лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L. Пусть D и E — точки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN=NC, AM=2\cdot MS$, $AP=3\cdot PD$ и $BP=2\cdot PE$. Найти объем пирамиды $ACLN$.

Ответы: **1.** $2\cos\frac{2\pi}{5}+1<x\le 2$. **2.** $x=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+2\pi k, k\in Z$.

3. $(x,y)=\left(\frac{-3-2\sqrt{2}}{2},3+\sqrt{2}\right),\left(\frac{1-2\sqrt{6}}{2},1+\sqrt{6}\right)$. **4.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

5. $x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$. **6.** $[0,+\infty)$.

Вариант 1997 г. (Основной экзамен)

1. Пункты A,B и C расположены на реке в указанном порядке вверх по течению. Расстояние между A и B равно 6 км., а между B и C — 18 км. В 11^{00} из пункта C отплыл катер и направился в пункт A. Достигнув пункта A, он сразу же повернул назад и в 13^{48} прибыл в пункт B. Скорость течения реки равна 5 км/час. Найти скорость катера в стоячей воде.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5x^2}} 5 > \log_{1-x^2}\frac{1}{5}$.

3. Решить уравнение $2+\left|\cos x+2\cdot\sin x\right|=2\cdot\cos x-\sin x$.

4. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases}25^x+5^x+3\cdot 3^y=6\\ 3\cdot 9^y+5^x-3^y=2\end{cases}$.

5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что $\sin\angle BOC=\frac{1}{5}$, $\sin\angle AOC=\frac{2}{7}$. Известно, что $BO=3$, $BC=4$, $AC=6$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{-4x^3+11x^2+60x-67}=7\cdot\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{a^2-9a+18}$ имеет единственное решение.

Ответы: **1**. 10 км./час. **2.** $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3. $x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{10}} + 2\pi n,\ n \in Z$,

$x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m,\ m \in Z$. **4.** $x = \log_5(\sqrt{7}-1)$,

$y = \log_3\frac{\sqrt{7}-1}{3}$. **5.** $\frac{3+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{391}}{10} + \frac{\sqrt{10418+12\sqrt{6}\cdot\sqrt{391}}}{10}$.

6. $a \in \left[\frac{9-\sqrt{41}}{2}, 3\right) \cup \left(6, \frac{9+\sqrt{41}}{2}\right]$.

Задание письменного тура Двухтуровой олимпиады факультета ВМиК МГУ по математике 1998 года

1. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2 \frac{4}{x}} \geq \log_2\frac{x}{8} - 1.$

2. Решить неравенство $\left|\sqrt{x-4} - 3\right| > \left|\sqrt{9-x} - 2\right| + 1.$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4+\sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найти DC.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cdot\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

6. Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $\frac{\pi}{3}$. Внутри этого угла расположен треугольник ABC. Ортогональные проекции треугольника ABC на полуплоскости α и β суть треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 соответственно (B_1 и B_2 — проекции точки B, C_1 и C_2 — проекции точки C). Известно, что $AB = 3\sqrt{25-4\sqrt{3}}$, $AC = \sqrt{19-4\sqrt{3}}$, $AB_1 = 9\sqrt{2}$, $AB_2 = 6\sqrt{3}$, $AC_1 > AC_2$, каждый из углов B_1AC_1 и B_2AC_2 равен $\frac{\pi}{12}$. Найти BC.

Ответы: 1. $x \in (0;4) \cup \{8\}$. 2. $x \in \left[4; \frac{13}{2}\right)$. 3. $x = (2k+1)\pi, k \in Z$, $x = \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, n \in Z$. 4. DC=6. **5.** $\boldsymbol{a} = -\frac{3}{2}$. **6.** $BC = \sqrt{148 - 34\sqrt{3}}$.

Вариант 1998 г. (Основной экзамен)

1. Решить неравенство $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

2. Решить неравенство $\log_2(5-x)\cdot\log_{(x+1)}\left(\dfrac{1}{8}\right) \geq -6$.

3. Решить уравнение $|\sin^3 x| + 13\cos^3 x - \cos x = 0$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\dfrac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объем пирамиды.

5. Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + \dfrac{6}{\pi}\cdot\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x\cdot(\pi + 2\arcsin x)} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Ответы: **1.** $\left(-\dfrac{9+\sqrt{57}}{4};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **2.** $(-1;0)\cup[1;5)$. **3.** $\pi \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in Z$. **4.** 216. **5.** $\left(-\infty;-\sqrt{13}\right]\cup\left[\dfrac{11}{13};+\infty\right)$. **6.** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.