

1. В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга
Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

2. Решение

3. Пусть X (рублей) - нужно платить ежегодно.

4. 1 год:

5. В январе сумма долга составит $8052000 \cdot 1,2 = 9662400$.

6. После 1 платежа сумма долга станет равна $9662400 - X$.

7. 2 год:

8. В январе сумма долга составит $(9662400 - X) \cdot 1,2$.

9. После 2 платежа сумма долга станет равна $(9662400 - X) \cdot 1,2 - X$.

10. 3 год:

11. В январе сумма долга составит $((9662400 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2$.

12. После 3 платежа сумма долга станет равна $((9662400 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$.

13. 4 год:

14. В январе сумма долга составит $((9662400 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$.

15. После 4 платежа сумма долга станет равна $((9662400 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X$.

16. Так как кредит был погашен 4 равными платежами, то после 4 платежа долга не осталось, т.е.

17. $((9662400 - X) \cdot 1,2 - X) \cdot 1,2 - X = 0$.

18. Решим это уравнение и найдем X .

19. $(9662400 \cdot 1,2 - 1,2X - X) \cdot 1,2 - X = 0$,

20. $(9662400 \cdot 1,2^2 - 2,64X - X) \cdot 1,2 - X = 0$,

21. $9662400 \cdot 1,2^3 - 4,368X - X = 0$,

22. $5,368X = 9662400 \cdot 1,2^3$,

23. $X = 3\,110\,400$.

Ответ: 3 110 400

2. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение

Пусть в банке было взято X млн. руб.

1 год:

В январе сумма долга будет составлять $1,2 X$.

После 1 платежа сумма долга составит: $1,2 X - 2,16$.

2 год:

В январе сумма долга будет составлять $1,2 \cdot (1,2X - 2,16) = 1,22 \cdot X - 2,592$.
 $1,2 \cdot (1,2X - 2,16) = 1,22 \cdot X - 2,592$.

После 2 платежа сумма долга

составит: $1,22 \cdot X - 1,2 \cdot 2,16 - 2,16 = 1,22 \cdot X - 4,752$
 $1,22 \cdot X - 1,2 \cdot 2,16 - 2,16 = 1,22 \cdot X - 4,752$.

3 год:

В январе сумма долга будет

составлять $1,2 \cdot (1,22 \cdot X - 4,752) = 1,23 \cdot X - 5,7024$
 $1,2 \cdot (1,22 \cdot X - 4,752) = 1,23 \cdot X - 5,7024$.

После 3 платежа сумма долга

составит: $1,23 \cdot X - 5,7024 - 2,16 = 1,23 \cdot X - 7,8624$
 $1,23 \cdot X - 5,7024 - 2,16 = 1,23 \cdot X - 7,8624$.

Так как кредит был погашен 3 равными платежами, то после 3 платежа долга не останется, т.е.

$$1,23 \cdot X - 7,8624 = 0 \quad 1,23 \cdot X - 7,8624 = 0,$$

$$1,23 \cdot X = 7,8624 \quad 1,23 \cdot X = 7,8624,$$

$$X = 4,55 \quad X = 4,55.$$

То есть в банке было взято 4,55 млн. руб.

Ответ: 4,55

3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a , если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55000 руб., а во второй 69000 рублей.

Решение

1 год:

В январе сумма долга составит $(1+a/100) \cdot 100000 = 100000 + 1000a$

После 1 платежа долг будет

равен $100000 + 1000a - 55000 = 45000 + 1000a$

2 год:

В январе сумма долга составит $(1+a/100) \cdot (45000 + 1000a)$

После 2 платежа долг будет равен $(1+a/100) \cdot (45000 + 1000a) - 69000$

Так как кредит был полностью погашен за 2 года, то после выплаты 2 платежа долга не осталось, то есть

$$(1+a/100) \cdot (45000 + 1000a) - 69000 = 0, (1+a/100) \cdot (45000 + 1000a) - 69000 = 0,$$

$$45000 + 1000a + 450a + 10a^2 - 69000 = 0, 45000 + 1000a + 450a + 10a^2 - 69000 = 0,$$

$$a^2 + 145a - 2400 = 0, a^2 + 145a - 2400 = 0,$$

$$a_1 = 15, a_2 = -160. a_1 = 15, a_2 = -160.$$

Искомое $a = 15\%$.

Ответ: 15

4. В июле планируется взять кредит на сумму 4026000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года.

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение

Рассмотрим сначала случай, когда кредит будет погашен 4 равными платежами.

Пусть X (рублей) - сумма ежегодного платежа.

1 год:

В январе сумма долга составит $1,2 * 4026000$.

После 1 платежа долг будет равен $1,2 * 4026000 - X$.

2 год:

В январе сумма долга

составит $1,2 \cdot (1,2 \cdot 4026000 - X) = 1,22 \cdot 4026000 - 1,2X$

После 2 платежа долг будет

равен $1,22 \cdot 4026000 - 1,2X - X = 1,22 \cdot 4026000 - 2,2X$

3 год:

В январе сумма долга

составит $1,2 \cdot (1,22 \cdot 4026000 - 2,2X) = 1,23 \cdot 4026000 - 2,64X$

После 3 платежа долг будет

равен $1,23 \cdot 4026000 - 2,64X - X = 1,23 \cdot 4026000 - 3,64X$

4 год:

В январе сумма долга

составит $1,2 \cdot (1,23 \cdot 4026000 - 3,64X) = 1,24 \cdot 4026000 - 4,368X$

После 4 платежа долг будет

равен $1,24 \cdot 4026000 - 4,368X - X = 1,24 \cdot 4026000 - 5,368X$

Так как кредит был выплачен 4 равными платежами, то после 4 платежа сумма долга равна 0, то есть:

$$1,24 \cdot 4026000 - 5,368X = 0, 1,24 \cdot 4026000 - 5,368X = 0,$$

$$5,368X = 1,24 \cdot 4026000, 5,368X = 1,24 \cdot 4026000,$$

$$X = 1555200, X = 1555200.$$

А за все 4 года выплаченная сумма составит $4 \cdot 1555200 = 6220800$.

Теперь рассмотрим случай, когда кредит был погашен 2 равными платежами.

Пусть Y (руб.) - размер ежегодного платежа.

1 год:

В январе сумма долга составит $1,2 * 4026000$.

После 1 платежа долг будет равен $1,2 * 4026000 - Y$.

2 год:

В январе сумма долга

составит $1,2 \cdot (1,2 \cdot 4026000 - Y) = 1,22 \cdot 4026000 - 1,2Y$

После 2 платежа долг будет

равен $1,22 \cdot 4026000 - 1,2Y - Y = 1,22 \cdot 4026000 - 2,2Y$

Так как кредит был выплачен 2 равными платежами, то после 2 платежа сумма долга равна 0, то есть:

$$1,22 \cdot 4026000 - 2,2Y = 0, 1,22 \cdot 4026000 - 2,2Y = 0,$$

$$2,2Y = 1,22 \cdot 4026000, 2,2Y = 1,22 \cdot 4026000,$$

$$Y = 2635200. Y = 2635200.$$

А за 2 года выплаченная сумма составит $2 \cdot 2635200 = 5270400$. $2 \cdot 2635200 = 5270400$.

Тогда разница между выплатами за 4 года и за 2 года будет равна:

$$6\ 220\ 800 - 5\ 270\ 400 = 950\ 400.$$

Ответ: 950 400

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей?

Решение

Так как мы ищем минимальный срок кредита, то первый платеж должен быть максимальным, т.е. составлять 1,8 млн. рублей.

1 год:

В январе сумма долга станет равной $1,2 * 6 = 7,2$ млн. руб.

После 1 платежа сумма долга будет равна $7,2 - 1,8 = 5,4$ млн. руб.

$6 - 5,4 = 0,6$ - разница между долгом в июле одного года и в июле следующего года.

Так как в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, то каждый год долг в июле должен быть на 0,6 млн руб. меньше, чем в июле предыдущего года.

В таком случае пусть осталось выплатить n платежей. Тогда

$$5,4 - 0,6n = 0,$$

$$n = 9.$$

Учитывая, что 1 платеж уже был сделан, то минимальный срок кредита составит 10 лет.

Заметим, что все ежегодные платежи не будут превышать 1,8 млн. руб.

Действительно, на 2 год в январе месяце долг составит $5,4 * 1,2 = 6,48$. После выплаты он должен отличаться от предыдущей суммы долга в июле на 0,6 млн. руб., значит, сумма долга в июле составит $5,4 - 0,6 = 4,8$ млн. руб, а выплата за 2 год равна $6,48 - 4,8 = 1,68$ млн. руб, что меньше, чем 1,8 млн. руб.

На $(n+1)$ -ый год в июле месяце долг составит $6 - 0,6n$.

Долг на январь месяц будет составлять $(6 - 0,6(n-1)) * 1,2$

Сумма выплаты за n год равна $(6 - 0,6(n-1)) * 1,2 - (6 - 0,6n) = 1,92 - 0,12n$.

$$1,92 - 0,12n < 1,8$$

$$0,12n > 0,12$$

$$n > 1.$$

Получаем, что при $n > 1$ ежегодные платежи не будут превышать 1,8 млн. руб.

Окончательно получаем, что кредит будет выплачен за 10 лет.

Ответ: 10

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение

1 год:

В январе сумма долга составит $10 \cdot 1,1 = 11$ млн. руб.

Пусть 1 платеж составил X млн. руб. Тогда после 1 платежа долг составит $(11-X)$ млн. руб.

Так как в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, то разница между долгом каждый год будет равна

$$10 - (11-X) = (X - 1) \text{ млн. руб.}$$

Осталось выплатить долг еще за 4 года. Через 4 года долг в июле месяце будет равен

$$10 - 5 \cdot (X-1).$$

Так как кредит был погашен за 5 лет, то последний долг равен 0, т.е. получаем уравнение:

$$10 - 5 \cdot (X-1) = 0,$$

$$X-1 = 2,$$

$$X = 3.$$

То есть 1-ый платеж составил 3 млн. руб.

После этого долг в июле составил $11-3 = 8$ млн. руб.

Во 2 год в январе долг составит уже $1,1 \cdot 8 = 8,8$ млн. руб. И так как разница между долгом каждый год в июле равна $3 - 1 = 2$ млн. руб., то на июль 2-го года долг составит $8 - 2 = 6$ млн. руб. Значит, 2 платеж был равен $8,8 - 6 = 2,8$ млн. руб.

В 3 год в январе долг равен $1,1 \cdot 6 = 6,6$ млн. руб. На июль 3-го года долг будет равен $6 - 2 = 4$ млн. руб., значит, 3 платеж равен $6,6 - 4 = 2,6$ млн. руб.

В 4 год в январе долг равен $4 \cdot 1,1 = 4,4$ млн. руб. На июль 4 года долг составит $4 - 2 = 2$ млн. руб. И 4-ый платеж был равен $4,4 - 2 = 2,4$ млн. руб.

На январь 5-го года долг составит $2 \cdot 1,1 = 2,2$ млн. руб. И так как кредит был полностью погашен за 5 лет, то это будет последний платеж и он будет равен сумме долга, т.е. 2,2 млн. руб.

Итого общая сумма платежей за 5 лет составила: $3+2,8+2,6+2,4+2,2 = 13$ млн. руб.

Ответ: 13.

Ответ: 13

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Решение

1 год:

В январе долг стал равен $20 \cdot 1,3 = 26$ млн. руб.

Пусть X (млн. руб.) - составил 1 платеж.

Тогда в июле после 1 платежа долг стал равен $(26 - X)$ млн. руб.

Так как в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, то эта величина равна $20 - (26 - X) = (X - 6)$ млн. руб.

Пусть кредит был взят на n лет.

Тогда в n -ый год в январе долг будет равен

$(20 - (n - 1) \cdot (X - 6)) \cdot 1,3$ млн. руб.

В июле n -го года долг равен $20 - n(X - 6)$.

А выплату в n году можно посчитать по формуле:

$(20 - (n - 1) \cdot (X - 6)) \cdot 1,3 - (20 - n(X - 6)) \cdot 1,3$

В 1 год платеж был равен X млн. руб.

Во 2 год -

$(20 - X + 6) \cdot 1,3 - 20 + 2X - 12 = 33,8 - 1,3X - 32 + 2X = 1,8 + 0,7X$

В 3 год -

$(20 - 2X + 12) \cdot 1,3 - 20 + 3 \cdot (X - 6) = 41,6 - 2,6X - 20 + 3X - 18 = 3,6 + 0,4X$

Имеем арифметическую прогрессию, разность которой равна $1,8 - 0,3X$, а первый член прогрессии равен X .

Так как общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей, то получаем по формуле для суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = 2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (n - 1) \cdot n = 47, S_n = 2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (n - 1) \cdot n = 47,$$

$$(2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (n - 1)) \cdot n = 94. (2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (n - 1)) \cdot n = 94.$$

Так как n -ый платеж является последним, то получаем уравнение:

$$20 - n(X - 6) = 0, 20 - n(X - 6) = 0,$$

Откуда получаем, что

$$n = 20X - 6. n = 20X - 6.$$

Подставляем в предыдущее уравнение (формула суммы n первых членов арифметической прогрессии):

$$(2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (20X - 6 - 1)) \cdot 20X - 6 = 94. (2X + (1,8 - 0,3X) \cdot (20X - 6 - 1)) \cdot 20X - 6 = 94.$$

$$20 \cdot (2X(X-6) + (1,8-0,3X) \cdot 20 - (1,8-0,3X) \cdot (X-6)) = 94 \cdot (X-6)^2, 20 \cdot (2X(X-6) + (1,8-0,3X) \cdot 20 - (1,8-0,3X) \cdot (X-6)) = 94 \cdot (X-6)^2,$$

$$10 \cdot (2X^2 - 12X + 36 - 6X - 1,8X + 10,8 + 0,3X^2 - 1,8X) = 47 \cdot (X^2 - 12X + 36), 10 \cdot (2X^2 - 12X + 36 - 6X - 1,8X + 10,8 + 0,3X^2 - 1,8X) = 47 \cdot (X^2 - 12X + 36),$$

$$10 \cdot (2,3X^2 - 21,6X + 46,8) = 47 \cdot (X^2 - 12X + 36), 10 \cdot (2,3X^2 - 21,6X + 46,8) = 47 \cdot (X^2 - 12X + 36),$$

$$23X^2 - 216X + 468 = 47X^2 - 564X + 1692, 23X^2 - 216X + 468 = 47X^2 - 564X + 1692,$$

$$24X^2 - 348X + 1224 = 0, 24X^2 - 348X + 1224 = 0,$$

$$2X^2 - 29X + 102 = 0, 2X^2 - 29X + 102 = 0,$$

$$X_1 = 8,5, X_2 = 6. X_1 = 8,5, X_2 = 6.$$

Пусть $X = 8,5$. Тогда $n = 20/2,5 = 8$.

Если $X = 6$, то n посчитать невозможно, так как в знаменателе 0.

Получаем, что кредит был взят на 8 лет.

Ответ: 8

8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти x , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший - не менее 0,5 млн рублей.

Решение

1 год:

В январе сумма долга составит $(1+x/100) \cdot 6(1+x/100) \cdot 6$.

Пусть первый платеж равен Y , тогда в июле останется сумма долга, равная

$$(1+x/100) \cdot 6 - Y \cdot (1+x/100) \cdot 6 - Y.$$

При этом в июле каждого года долг будет уменьшаться на одну и ту же величину, равную

$$6 - ((1+x/100) \cdot 6 - Y) = Y - 6x/100. 6 - ((1+x/100) \cdot 6 - Y) = Y - 6x/100.$$

Так как кредит будет полностью выплачен за 15 лет, то получаем уравнение:

$$6 - 15 \cdot (Y - 6x/100) = 0, 6 - 15 \cdot (Y - 6x/100) = 0,$$

$$5Y - 0,3X = 2, 5Y - 0,3X = 2,$$

$$Y = 0,06X + 0,4. Y = 0,06X + 0,4.$$

Тогда в июле каждого года долг будет уменьшаться на величину, равную

$$Y - 6x/100 = 0,06X + 0,4 - 0,06X = 0,4. Y - 6x/100 = 0,06X + 0,4 - 0,06X = 0,4.$$

И в июле сумма долга будет равна $6 - 0,4 = 5,6$ млн. руб.

2 год:

В январе сумма долга составит

$$(1+x/100) \cdot ((1+x/100) \cdot 6 - Y) = 5,6 \cdot (1+x/100). (1+x/100) \cdot ((1+x/100) \cdot 6 - Y) = 5,6 \cdot (1+x/100).$$

В июле долг уменьшится на 0,4 млн. руб. по сравнению с июлем предыдущего года и станет равным $5,6 - 0,4 = 5,2$.

Тогда платеж за 2 год составит

$$5,6 \cdot (1+x/100) - 5,2 = 0,056x + 0,4. 5,6 \cdot (1+x/100) - 5,2 = 0,056x + 0,4.$$

Каждый год платеж уменьшается на одну и ту же сумму, а именно на

$$0,06X + 0,4 - (0,056x + 0,4) = 0,004x. 0,06X + 0,4 - (0,056x + 0,4) = 0,004x.$$

Поэтому последний 15 платеж будет равен

$$0,06X + 0,4 - 14 \cdot 0,004x = 0,004x + 0,4. 0,06X + 0,4 - 14 \cdot 0,004x = 0,004x + 0,4.$$

Нам известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший - не менее 0,5 млн рублей, поэтому получаем условия:

$$0,06X + 0,4 \leq 1,9, 0,004x + 0,4 \geq 0,5, 0,06X + 0,4 \leq 1,9, 0,004x + 0,4 \geq 0,5,$$

$$x \leq 25, x \geq 25. x \leq 25, x \geq 25.$$

Откуда получаем, что искомая величина $x = 25$.

Ответ: 25

9. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей?

Решение

1 год:

В январе долг стал равен $16 \cdot 1,25 = 20$ млн. руб.

Пусть X (млн. руб.) - составил 1 платеж.

Тогда в июле после 1 платежа долг стал равен $(20 - X)$ млн. руб.

Так как в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, то эта величина равна $16 - (20 - X) = (X - 4)$ млн. руб.

Пусть кредит был взят на n лет.

Тогда в n -ый год в январе долг будет равен

$(16 - (n - 1) \cdot (X - 4)) \cdot 1,25$ млн. руб.

В июле n -го года долг равен $16 - n(X - 4)$.

А выплату в n году можно посчитать по формуле:

$(16 - (n - 1) \cdot (X - 4)) \cdot 1,25 - (16 - n(X - 4)) \cdot 1,25 - (16 - n(X - 4))$.

В 1 год платеж был равен X млн. руб.

Во 2 год -

$(16 - X + 4) \cdot 1,25 - 16 + 2X - 8 = 1 + 0,75X$.

В 3 год -

$(16 - 2X + 8) \cdot 1,25 - 16 + 3 \cdot (X - 4) = 2 + 0,5X$.

Имеем арифметическую прогрессию, разность которой равна

$$1 + 0,75X - X = 1 - 0,25X,$$

а первый член прогрессии равен X .

Так как общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей, то получаем по формуле для суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = 2X + (1 - 0,25X) \cdot (n - 1) \cdot n = 40, S_n = 2X + (1 - 0,25X) \cdot (n - 1) \cdot n = 40,$$

$$(2X + (1 - 0,25X) \cdot (n - 1)) \cdot n = 80. (2X + (1 - 0,25X) \cdot (n - 1)) \cdot n = 80.$$

Так как n -ый платеж является последним, то получаем уравнение:

$$16 - n(X - 4) = 0, 16 - n(X - 4) = 0,$$

Откуда получаем, что

$$n = 16X - 4. n = 16X - 4.$$

Подставляем в предыдущее уравнение (формула суммы n первых членов арифметической прогрессии):

$$(2X + (1 - 0,25X) \cdot (16X - 4 - 1)) \cdot 16X - 4 = 80. (2X + (1 - 0,25X) \cdot (16X - 4 - 1)) \cdot 16X - 4 = 80.$$

$$16 \cdot (2X(X-4) + (1-0,25X) \cdot 16 - (1-0,25X) \cdot (X-4)) = 80 \cdot (X-4)^2, 16 \cdot (2X(X-4) + (1-0,25X) \cdot 16 - (1-0,25X) \cdot (X-4)) = 80 \cdot (X-4)^2,$$

$$2X^2 - 8X + 16 - 4X - X + 4 + 0,25X^2 - X = 5 \cdot (X^2 - 8X + 16), 2X^2 - 8X + 16 - 4X - X + 4 + 0,25X^2 - X = 5 \cdot (X^2 - 8X + 16),$$

$$2,25X^2 - 14X + 20 = 5 \cdot (X^2 - 8X + 16), 2,25X^2 - 14X + 20 = 5 \cdot (X^2 - 8X + 16),$$

$$9X^2 - 56X + 80 = 20X^2 - 160X + 320, 9X^2 - 56X + 80 = 20X^2 - 160X + 320,$$

$$11X^2 - 104X + 240 = 0, 11X^2 - 104X + 240 = 0,$$

$$X_1 = 4, X_2 = 60/11. X_1 = 4, X_2 = 60/11.$$

Пусть $X = 60/11$. Тогда $n = 16 : 16 * 11 = 11$.

Если $X = 4$, то n посчитать невозможно, так как в знаменателе 0.

Получаем, что кредит был взят на 11 лет.

Ответ: 11

10. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

На какое минимально количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Решение

Если нужно найти минимальное количество лет, на которые нужно взять кредит, то выплаты должны быть максимальными, т.е. в условиях нашей задачи составлять 350 000 рублей в год.

1 год:

В январе долг станет равным $1\,300\,000 \cdot 1,1 = 1\,430\,000$ рублей.

После 1 платежа в июле сумма долга составит $1\,430\,000 - 350\,000 = 1\,080\,000$ рублей.

2 год:

В январе долг станет равным $1\,080\,000 \cdot 1,1 = 1\,188\,000$ рублей.

После 2 платежа в июле сумма долга составит $1\,188\,000 - 350\,000 = 838\,000$ рублей.

3 год:

Январь: $838\,000 \cdot 1,1 = 921\,800$.

После 3 платежа в июле: $921\,800 - 350\,000 = 571\,800$.

4 год:

Январь: $571\,800 \cdot 1,1 = 628\,980$.

После 4 платежа: $628\,980 - 350\,000 = 278\,980$.

5 год:

Январь: $278\,980 \cdot 1,1 = 306\,878$.

5 платеж будет последним и составит 306 878 рублей.

Получили, что кредит можно взять минимум на 5 лет.

Ответ: 5.

Ответ: 5

11. Зависимость объема Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q=15000-P$, $1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q+5000000$ рублей.

Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство.

Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение

Доход можно вычислить по формуле:

$$PQ=P(15000-P).$$

Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q+5000000$ рублей.

Обозначим прибыль через R . Тогда R вычисляется по формуле:

$$R=PQ-(3000Q+5000000)=P(15000-P)-(3000(15000-P)+5000000), R=PQ-(3000Q+5000000)=P(15000-P)-(3000(15000-P)+5000000),$$

$$R=15000P-P^2-45000000+3000P-5000000, R=15000P-P^2-45000000+3000P-5000000,$$

$$R=-P^2+18000P-50000000. R=-P^2+18000P-50000000.$$

После снижения цены на 20% цена стала равна $0,8P$. Соответственно прибыль будет вычисляться по формуле:

$$R=-(0,8P)^2+18000 \cdot 0,8P-50000000. R=-(0,8P)^2+18000 \cdot 0,8P-50000000.$$

$$R=-0,64P^2+14400P-50000000. R=-0,64P^2+14400P-50000000.$$

Так как прибыль не изменилась, то получаем уравнение:

$$-P^2+18000P-50000000=-0,64P^2+14400P-50000000, -P^2+18000P-50000000=-0,64P^2+14400P-50000000,$$

$$0,36P^2-3600P=0, 0,36P^2-3600P=0,$$

$$P_1=0, P_2=10000. P_1=0, P_2=10000.$$

Нам подходит значение $P = 10\ 000$ рублей. Соответственно новая цена равна 8000 рублей.

Теперь исследуем функцию $R=-P^2+18000P-50000000$ на максимум и найдем P , при котором будет достигаться наибольшая прибыль.

Для этого найдем производную функции $R=-P^2+18000P-50000000$:

$$R'=-2P+18000, R'=-2P+18000,$$

$$R'=0, P_1=0, P_2=9000. R'=0, P_1=0, P_2=9000.$$

$P = 9000$ - точка максимума данной функции, а значит при цене $P = 9000$ будет достигаться наибольшая прибыль.

Найдем, на сколько процентов нужно увеличить цену $P = 8000$, чтобы получить новую цену 9000 рублей. Имеем пропорцию:

$$8000 - 100\%,$$

$$9000 - x\%.$$

$$8000x = 900000,$$

$$x = 112,5\%.$$

$$112,5 - 100 = 12,5\%.$$

То есть для достижения максимальной прибыли нужно увеличить новую цену на $12,5\%$.

Ответ: 12,5%

12. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Решение

Пусть X (руб.) - взято в кредит в банке. Y (руб.) - первый платеж.

1 месяц (февраль):

1-го февраля долг стал равен $(1+r/100) \cdot X$.

15 февраля сумма долга (после 1 платежа) будет составлять

$$(1+r/100) \cdot X - Y.$$

Так как 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца, то эта сумма равна

$$X - ((1+r/100) \cdot X - Y) = Y - rX/100.$$

Кредит был взят на 39 месяцев, а значит после 39 платежей долг будет полностью выплачен.

$$X - 39 \cdot (Y - rX/100) = 0, X - 39 \cdot (Y - rX/100) = 0,$$

$$Y = X + 39rX/100, Y = X + 39rX/100.$$

Теперь найдем общую сумму погашения кредита.

Так как долг 15-го числа каждого месяца уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с 15 числом предыдущего месяца, то и платеж каждый месяц уменьшается на одну и ту же величину.

1 марта сумма долга станет равна

$$(1+r/100) \cdot ((1+r/100) \cdot X - Y) = (1+r/100) \cdot (X + rX/100 - X/39 - rX/100) = (1+r/100) \cdot ((1+r/100) \cdot X - Y) = (1+r/100) \cdot (X + rX/100 - X/39 - rX/100) =$$

$$= (1+r/100) \cdot 38X/39 = (1+r/100) \cdot 38X/39.$$

15 марта сумма долга будет составлять :

$$(1+r/100) \cdot X - Y - (Y - rX/100) = X - 2Y + 2rX/100 = (1+r/100) \cdot X - Y - (Y - rX/100) = X - 2Y + 2rX/100 =$$

$$= X - 2X/39 - 2rX/100 + 2rX/100 = 37X/39 = X - 2X/39 - 2rX/100 + 2rX/100 = 37X/39.$$

Значит, второй платеж равен

$$(1+r/100) \cdot 38X/39 - 37X/39 = X/39 + 38rX/3900, (1+r/100) \cdot 38X/39 - 37X/39 = X/39 + 38rX/3900.$$

Разница между платежами составляет:

$$Y - (X/39 + 38rX/3900) = X/39 + rX/100 - X/39 - 38rX/3900 = Y - (X/39 + 38rX/3900) = X/39 + rX/100 - X/39 - 38rX/3900 =$$

$$= rX/100 \cdot (1 - 38/39) = rX/3900, = rX/100 \cdot (1 - 38/39) = rX/3900.$$

Суммы платежей представляют собой убывающую арифметическую прогрессию, где первый член равен Y или $X/39 + rX/100$, а разность прогрессии равна $rX/3900$.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит, то есть общая сумма платежей равна $1,2X$.

Найдем сумму всех 39 платежей по формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_{39}=2(X/39+rX/100)-rX/3900 \cdot 382 \cdot 39=1,2X, S_{39}=2(X/39+rX/100)-rX/3900 \cdot 382 \cdot 39=1,2X,$$

$$39 \cdot (2X/39+2rX/100-38rX/3900)=2,4X. 39 \cdot (2X/39+2rX/100-38rX/3900)=2,4X.$$

Сократим все уравнение на X:

$$39 \cdot (2/39+2r/100-38r/3900)=2,4, 39 \cdot (2/39+2r/100-38r/3900)=2,4,$$

$$2+78r/100-38r/100=2,4, 2+78r/100-38r/100=2,4,$$

$$40r/100=0,4, 40r/100=0,4,$$

$$r=1. r=1.$$

То есть искомое значение $r = 1\%$.

Ответ: 1

13. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение

За 3 года прибыль составит:

$$3 \cdot (px - (0,5x^2 + 2x + 6)) \cdot 3 \cdot (px - (0,5x^2 + 2x + 6)).$$

Нужно найти наименьшее значение p , при котором выполняется неравенство:

$$3 \cdot (px - (0,5x^2 + 2x + 6)) \geq 78, 3 \cdot (px - (0,5x^2 + 2x + 6)) \geq 78,$$

$$px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26, px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26,$$

$$px \geq 0,5x^2 + 2x + 32, px \geq 0,5x^2 + 2x + 32,$$

$$p \geq 0,5x + 2 + 32/x, p \geq 0,5x + 2 + 32/x.$$

Так как нужно найти наименьшее значение p , то нужно исследовать функцию $0,5x + 2 + 32/x$ на минимум. Для этого найдем ее производную:

$$(0,5x + 2 + 32/x)' = 0,5 - 32/x^2, (0,5x + 2 + 32/x)' = 0,5 - 32/x^2,$$

$$0,5 - 32/x^2 = 0, 0,5 - 32/x^2 = 0,$$

$$x^2 = 64, x_1 = 8, x_2 = -8. x^2 = 64, x_1 = 8, x_2 = -8.$$

$x = 8$ - точка минимума, поэтому минимальное значение p равно:

$$p = 0,5 \cdot 8 + 2 + 32/8 = 4 + 2 + 4 = 10. p = 0,5 \cdot 8 + 2 + 32/8 = 4 + 2 + 4 = 10.$$

Искомое наименьшее значение $p = 10$.

24.

Ответ: 10