А. Смоляков,
г. Нефтекумск

Выпускная экзаменационная работа в 1997/98 учебном году

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Вариант N 4-98

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7} = x - 7.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+7=(x-7)^2 \\ x \geq 7 \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$3x + 7 = x^2 - 14x + 49$, $x^2 - 17x + 42 = 0$,

$D = 289 - 168 = 121 > 0$,

$x_{1,2} = \frac{17 \pm 11}{2}$, откуда x1 = 14, x2 = 3.

Условию x і 7 удовлетворяет первый корень, второй корень не удовлетворяет условию x і 7 и является посторонним для исходного уравнения.

Ответ: 14.

Замечание 1. Покажем еще один способ решения данного уравнения. Пусть $\sqrt{3x+7} =$ t, где t і 0, тогда

$x = \frac{t^2-7}{3}$ и данное уравнение примет вид

$t = \frac{t^2-7}{3} - 7$, $t^2 - 3t - 28 = 0$, $D = 9 + 112 = 121 > 0$,

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{2}$, $t_1 = 7$, $t_2 < 0$.

Следовательно, остается решить уравнение 7, откуда 3x + 7 = 49, откуда x = 14.

$$\sqrt{3x+7} =$$

Замечание 2. Оформление решения данного уравнения можно представить и в таком виде:

$\sqrt{3x+7} =$ x - 7 ы $\begin{cases} 3x+7=(x-7)^2 \\ x \geq 7 \end{cases}$ ы $\begin{cases} 3x+7=x^2-14x+49 \\ x \geq 7 \end{cases}$

ы $\begin{cases} x^2-17x+42=0 \\ x \geq 7 \end{cases}$ ы $\begin{cases} x=3 \text{ или } x=14 \\ x \geq 7 \end{cases}$ откуда x = 14.

Замечание 3. Укажем и самый стандартный прием решения рассматриваемого уравнения. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $3x + 7 = (x - 7)^2$, откуда $x^2 - 14x + 49 = 3x + 7$, $x^2 - 17x + 42 = 0$. По теореме Виета ($x_1 + x_2 = 17$, $x_1x_2 = 42$) находим, что $x_1 = 14$, $x_2 = 3$.

Проверка.

x = 14, $\sqrt{49}$ = 7 - равенство верное, 14 - корень данного уравнения.

x = 3, $\sqrt{16}$ = - 4 - равенство ложное, 3 - не корень данного уравнения.

Ответ: 14.

2. Решить уравнение $14\sin^2 x + \cos 4x - 10 = 0$.

Решение. Так как

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$,

то данное уравнение равносильно уравнению

$7(1 - \cos 2x) + 2\cos^2 2x - 1 - 10 = 0$,

$2\cos^2 2x - 7 \cos 2x - 4 = 0$.

Положим cos 2x = y, где | y | J 1, тогда $2y^2 - 7y - 4 = 0$.
$D = 49 + 32 = 81 > 0$, $y_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4}$, $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Условию | y | J 1 удовлетворяет только второй корень, поэтому необходимо решить уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

Замечание. Наметим и другой вариант решения уравнения. Так как $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, то данное уравнение примет вид

$14\sin^2 x - 8\sin^2 x \cos^2 x - 9 = 0$

или

$14\sin^2 x - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x - 9 = 0$,

$8\sin^4 x + 6\sin^2 x - 9 = 0$.

Далее остается ввести новое неизвестное: $\sin^2 x = y$, где y0 (0; 1).

3. Вычислить . $\int_1^2 (2x-3)^7 dx$

Решение. Функция $f(x) = (2x - 3)^7$ непрерывна и интегрируема на отрезке [1; 2] как многочлен. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\int_1^2 (2x-3)^7 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^8}{8}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{16}(1-1) = 0 \cdot$$

Ответ: 0.

4. Решить неравенство $\log_{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x-9) \geq \log_{\frac{\pi}{3}}(x+1)$.

Решение. Так как ***D***($\log_a$) = R_+, где a > 0, a № 1, то

$x^2 - 2x - 9 > 0$, $x + 1 > 0$. Так как $\frac{\pi}{3} > 1$, то функция

$y = \log_{\frac{\pi}{3}} t$ возрастающая и $x^2 - 2x - 9$ і $x + 1$. Следовательно, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 9 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 9 \geq x + 1 \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ (x-5)(x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \geq 5 \end{cases}$$

откуда x і 5.

Замечание 1. Решая систему $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \end{cases}$ можно дать ее подробное решение. Решим второе неравенство методом интервалов. $f(x) = x^2 - 3x - 10$, ***D***(f) = R, так как f - многочлен. Найдем нули функции: $x^2 - 3x - 10 = 0$,
D = 9 + 40 = 49 > 0.

Находим общее решение системы:

Ответ: [5; +ґ).

Замечание 2. При выполнении этого задания иногда решавшие его находили так называемую ОДЗ, что в данном примере приводит к усложнению решения: ведь необходимо тогда решить и неравенство $x^2 - 2x - 9 > 0$.

Замечание 3. Данное неравенство можно решить методом интервалов. Пусть

$f(x) = \log_{p/3}(x^2 - 2x - 9) - \log_{p/3}(x + 1)$.

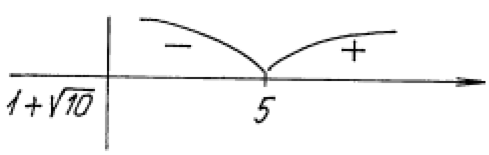
Необходимо найти все x, при которых f(x) і 0. Находим D(f):

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x^2-2x-9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ (x-(1-\sqrt{10}))(x-(1+\sqrt{10}))>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x>1+\sqrt{10}, \quad \textit{откуда} \;\; x>1+\sqrt{10}. \end{cases}$$

Итак, D(f) = $\left(1+\sqrt{10};+\infty\right)$. Находим нули f: $x^2 - 3x - 10 = 0$, откуда x = - 2 - не нуль функции, так как

- 2П $\left(1+\sqrt{10};+\infty\right)$, x = 5 - нуль функции.



$f(6) = \log_{p/3}15 - \log_{p/3}7 > 0$,

$f(4,5) = \log_{p/3}2,25 - \log_{p/3}5,5 < 0$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x) = tg x - x на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

Решение. Заданная функция определена и непрерывна на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ и дифференцируема на интервале $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$. Найдем производную функции f(x):

2 2 2

f '(x) = 1/cos   x - 1 = 1 + tg   x - 1 = tg   x.

Так как f '(x) i 0 при всех x из промежутка $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$, f(x) = 0 лишь при x = p и f(x) непрерывна на $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$, то функция монотонно возрастает на $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ и свое наименьшее значение принимает на левом конце отрезка, а наибольшее - на правом. Далее имеем:

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tg\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{4+3\pi}{4}$ - наименьшее значение функции,

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = tg\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{4-5\pi}{4}$ - наибольшее значение функции.

Ответ: на $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ min f(x) = $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{4+3\pi}{4}$, max f(x) = $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{4-5\pi}{4}$.

Замечание. Задачу можно решить, применив алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Мы нашли, что f '(x) = tg^2 x. Найдем критические точки: tg^2 x = 0, x =pn, n0Z. Выберем из них те, которые принадлежат отрезку $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Для этого решим неравенство

3p/4< pn <5p/4 , n0Z.
Имеем 3/4< n <5/4 , откуда n = 1 и x = p. Вычисляем значение функции на концах отрезка и в полученной критической точке:

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{4+3\pi}{4}$, ***f(***p)=-p , $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{4-5\pi}{4}$.

Дальнейшие рассуждения очевидны:

4 > p Ю 4 + 3p > 4p Ю $-\frac{4+3\pi}{4}$ < – p,

p < 4 Ю 5p < 4 + 4p Ю 5p – 4 < 4p Ю $\frac{4-5\pi}{4}$ > – p.

6. При каком значении a графики функций

y = ln (3x – 4) и y = 3x – 4 + a

имеют единственную общую точку?

Решение. Введем новую переменную, положив 3x – 4 = t, где t > 0. Тогда необходимо выяснить, при каком значении a графики функций y_1 = ln t и y_2 = t + a имеют единственную общую точку. Обозначив абсциссу общей точки через x0, получим ln t_0 = t_0 + a. Так как графики имеют единственную общую точку, то прямая y_1 = t + a является касательной к графику функции y_2 = ln t в точке с абсциссой t_0, а поэтому y_1' = y_2' и при t=t_0 ln' t = 1, откуда 1/t_0= 1, t_0 = 1, a = ln t_0 – t0 = – 1. Покажем, что прямая y = t – 1 не имеет других общих точек с графиком функции y = ln t, отличных от точки (1; 0). С этой целью докажем неравенство t – 1 > ln t (при t > 0, t № 1). Введем функцию ***f***(t) = t – 1 – ln t; ***f*** '(t) = 1 –1/t . ***f*** '(t) > 0 при t > 1 и функция ***f***(t) на промежутке [1; +Ґ) возрастает, а поэтому ***f***(t) > ***f***(1). ***f*** '(t) < 0 при 0 < t < 1 и функция на промежутке (0; 1] убывает, а поэтому f(t) > f(1). Итак, при t > 0 f(t) = t – 1 – ln t > f(1) = 0, т. е. t – 1 > ln t. Следовательно, при a

= – 1 и графики данных функций имеют только одну общую точку.

Ответ: a = – 1.

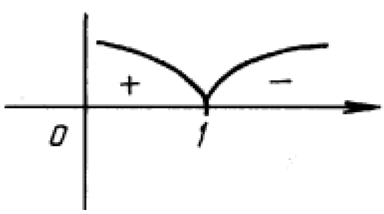
Замечание 1. Анализ решенной задачи позволяет ее обобщить. Вместо функции 3x - 4 можно взять любую другую линейную функцию вида ***y = kx + b***, где k № 0. Будут меняться только координаты общей точки, при этом ее ордината всегда равна 0.

Замечание 2. При решении задачи рассмотренным способом мы показали, что при найденном значении a действительно существует только одна общая точка. Это важно. Мы подробно остановимся на решении задачи ***N*** 6, так как практически во всех работах, которые мы увидели в медальной комиссии, рассматривался вариант приведенного нами решения с некоторыми усложнениями. При этом утверждалось, что функции ***y = 3x - 4 + a*** и ***y = ln (3x - 4)*** - возрастающие, каждая в своей области определения, а поэтому их графики могут иметь две общие точки, одну или ни одной. Во втором случае ***y = 3x - 4 + a*** - касательная. На наш взгляд, решение верное, но потому, что ***y = ln (3x - 4)*** - функция выпуклая, возрастающая и не имеющая точек перегиба.

Замечание 3. Задача решается просто, если вновь ввести новое неизвестное ***t = 3x - 4***, где t > 0, и сформулировать задачу так: «При каких значениях a уравнение ***ln t = t + a*** имеет единственный корень»? Перепишем уравнение: ***ln t - t = a*** и построим график функции ***f(t) = ln t - t***, проведя исследования.

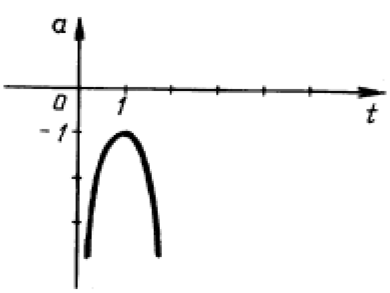
1. $D(f) = R_+$.

2. ***f*** '(t) =1/t - t. Критическая точка t = 1.



3. На промежутке (0; 1] функция возрастает, а на промежутке [1; +ґ) функция убывает.

4. При x_{max} = 1 y_{max} = - 1.



Ясно, что при a = - 1 уравнение ln t - t = - 1 имеет единственный корень t = 1.

Теперь делаем вывод, что графики функций

y = ln (3x - 4) и ***y = 3x - 4 + a***

имеют единственную общую точку при a = - 1. Ее координаты .(5/3;0)