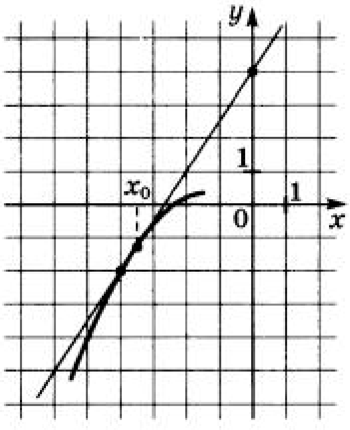
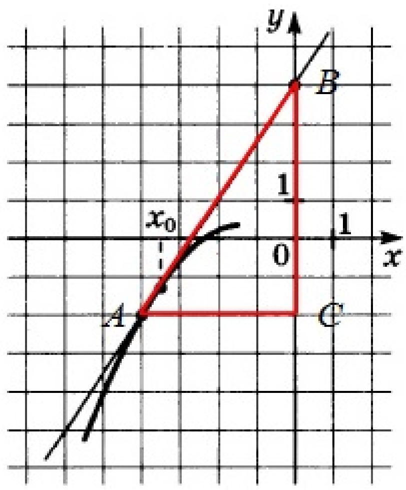
Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной в этой точке. По условию задачи нам дана касательная в точке x_0. Выполним построение, нарисовав прямоугольный треугольник, в котором касательная будет играть роль гипотенузы (см. рисунок ниже).

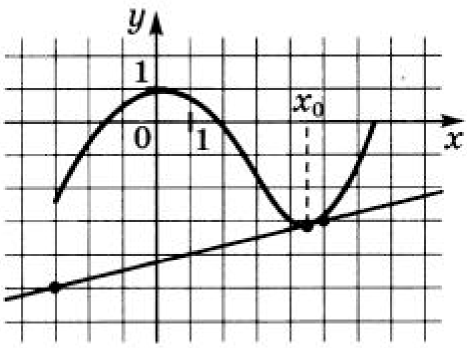


Тангенс угла наклона гипотенузы (касательной) равно отношению противолежащего катета к прилежащему, т.е. имеем:

$$\mathrm{tg} BAC = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$.

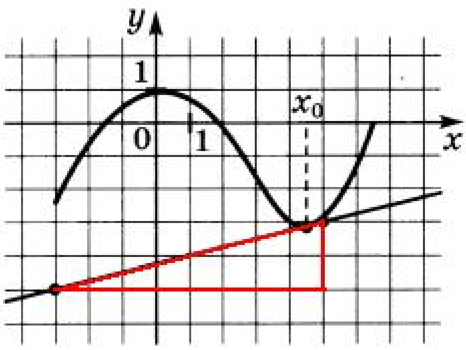
Ответ: 1,5.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Как известно, значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной в этой точке к оси OX. На рисунке показана касательная, найдем ее тангенс угла наклона. Для этого выполним построение как показано на рисунке ниже.

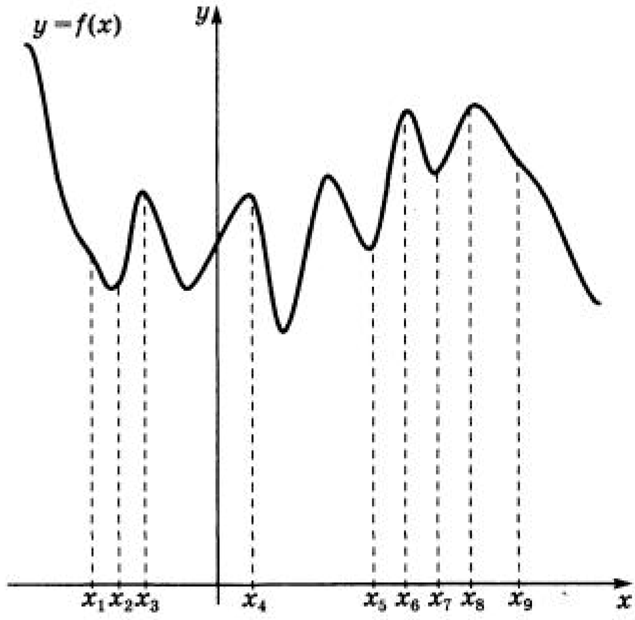


С помощью полученного прямоугольного треугольника найдем тангенс угла как отношение длины противолежащего катета к длине прилежащего. По рисунку видим, что длина противолежащего катета равна 2, а прилежащего – 8, таким образом, тангенс угла, а значит и производна в точке x_0 равна

$$f'(x_0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$.

Ответ: 0,25.

Задание 7. На рисунке изображён график функции y = f(x) и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции f(x) отрицательна?

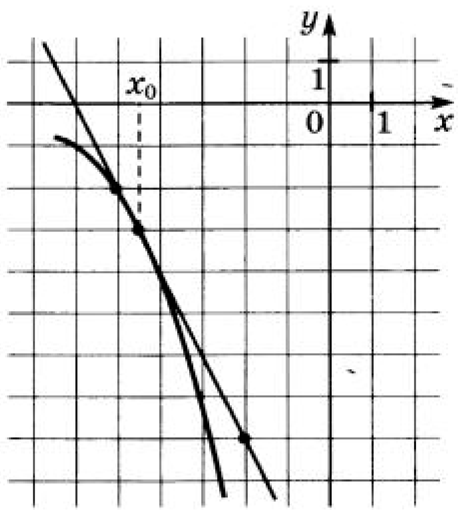


Решение.

Производная равна тангенсу угла наклона касательной к оси OX в точке, где берется производная. Можно говорить, что если функция $f(x)$ в точке x возрастает, то ее производная в этой точке положительна, а если убывает, то производная отрицательна. Используя это правило, определим по графику в каких точках производная функции $f(x)$ будет отрицательной. Анализ показывает, что отрицательное значение производной будет получаться в точках: x_1, x_4, x_9, т.е. в 3 точках.

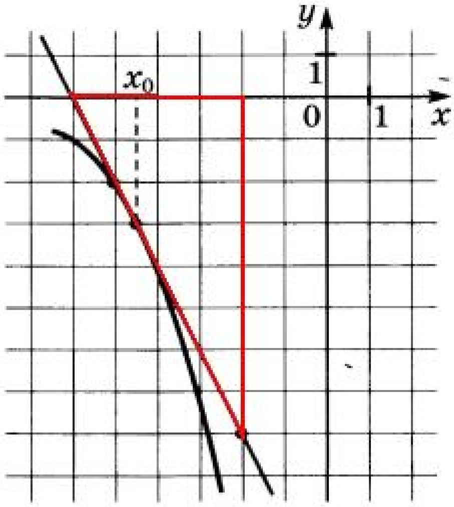
Ответ: 3.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной в этой точке к оси OX. Чтобы найти тангенс угла наклона, выполним построение, показанное на рисунке ниже.



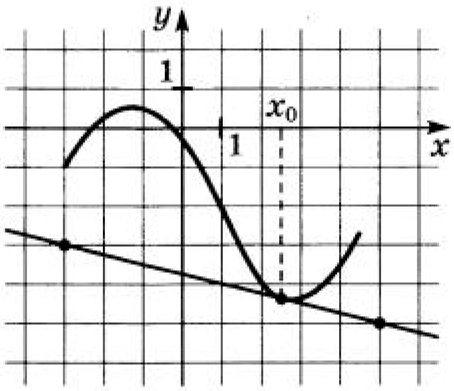
Из полученного прямоугольного треугольника находим, что тангенс угла наклона касательной, равный, отношению противолежащего катета к прилежащему, вычисляется как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-8}{4} = -2,$$

т.е. производная в точке x_0 равна -2.

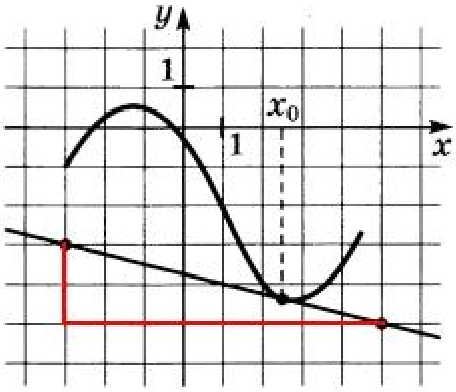
Ответ: -2.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к оси OX в этой точке. Для нахождения тангенса угла наклона касательной, выполним построение, показанное на рисунке ниже.

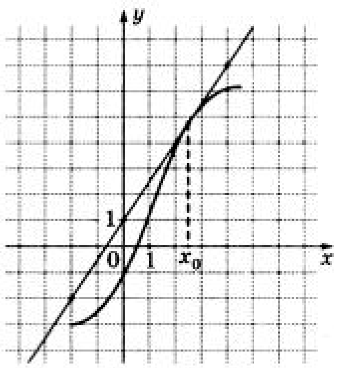


Как известно тангенс угла наклона равен отношению противолежащего катета к прилежащему. По рисунку видим, что длина противолежащего катета равна -2 единицы (минус, т.к. отрезок уходит вниз в отрицательную область), а длина прилежащего катета равна 8. Таким образом, тангенс и значение производной, равно

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

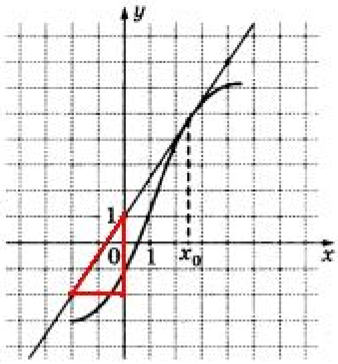
Ответ: -0,25.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Для нахождения значения производной в точке x_0 функции $f(x)$ выполним построение, показанное на рисунке ниже.



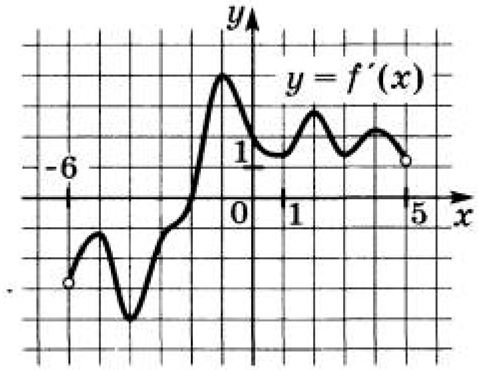
Из полученного прямоугольного треугольника найдем тангенс угла наклона к оси OX касательной в точке x_0, получим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2} = 1{,}5$$.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к оси OX.

Ответ: 1,5.

Задание 7. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (-6; 5). В какой точке отрезка [-2; 2] функция f(x) принимает наибольшее значение.



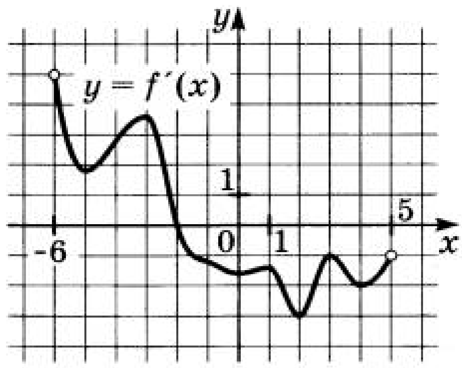
Решение.

Значение производной $f'(x)$ показывает нам: убывает функция $f(x)$ или возрастает. Если значение производной меньше нуля (ниже оси OX), то функция $f(x)$ убывает, если она выше оси OX (положительна), то функция $f(x)$ возрастает. Можно заметить, что если график производной пересекает ось OX из отрицательной области ($f'(x) < 0$) в положительную ($f'(x) > 0$), то точка $f'(x) = 0$ соответствует локальному минимуму функции $f(x)$. Именно это изображено на рисунке в точке $x = -2$.

Итак, мы имеем начальную точку $x = -2$, в которой функция $f(x)$ имеет локальный минимум. Анализируя график производной до точки $x = 2$ видим, что он везде больше 0, значит, функция $f(x)$ на интервале [-2;2] постоянно возрастает и, следовательно, точка максимума на этом интервале будет в точке $x = 2$.

Ответ: 2.

Задание 7. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (-6; 5). В какой точке отрезка [0; 4] функция f(x) принимает наименьшее значение.

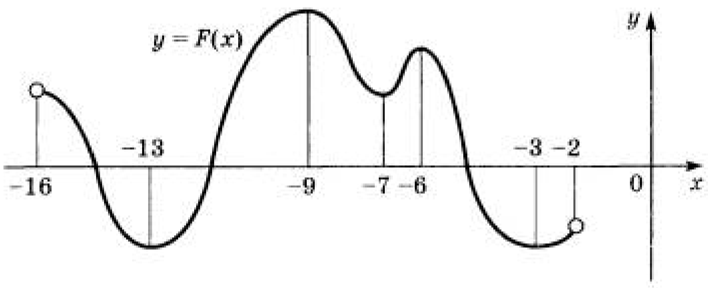


Решение.

Если производная $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает в этой точке. Если $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x. Учитывая это правило, проанализируем график производной на интервале от 0 до 4. Видим, что график производной на этом интервале всюду меньше 0, значит функция $f(x)$ на нем убывает и, следовательно, точка минимума в этом интервале будет находиться в точке $x=4$.

Ответ: 4.

Задание 7. На рисунке изображён график первообразной y=F(x) некоторой функции y=f(x), определённой на интервале (-16; -2). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения f(x)=0 на отрезке [-14; -8].



Решение.

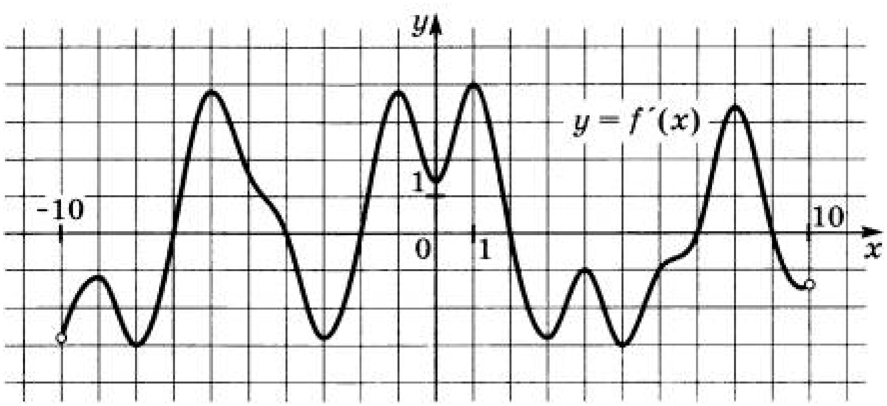
По определению первообразная это функция, производная от которой дает исходную функцию $f(x)$, т.е.

$$F'(x)=f(x).$$

Нам требуется определить число решений $f(x)=0$, или, что тоже самое $F'(x)=0$. Значение производной функции равно нулю в точках ее минимума и максимума, следовательно, на графике в диапазоне от -14 до -8 нужно найти все точки минимума и максимума функции $F(x)$. Анализ рисунка показывает, что это точки $x=-13,-9$, т.е. 2 точки.

Ответ: 2.

Задание 7. На рисунке изображён график y = f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (-10; 10). Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [-9; 8].

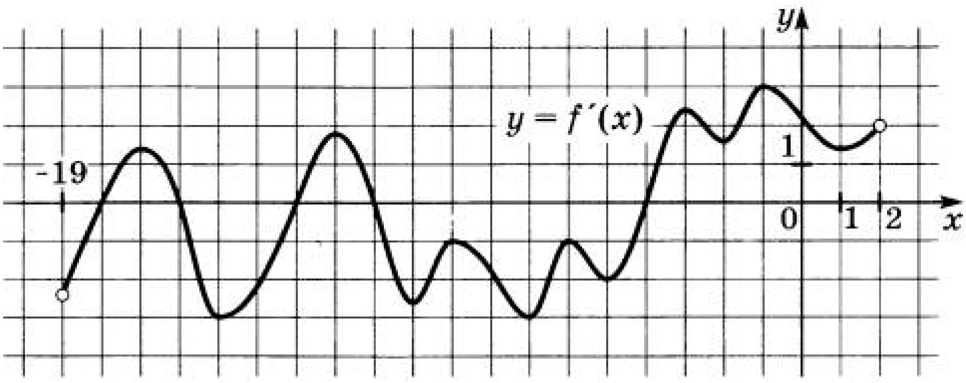


Решение.

Из свойств производной функции известно, что если значение производной меньше нуля, то функция убывает, а если производная больше нуля, то функция возрастает. В случаях, когда производная равна нулю $f'(x)=0$, то это точки минимума или максимума функции $f(x)$. Чтобы определить точки максимума, нужно проанализировать график производной до и после точки $f'(x)=0$. Если график функции $f'(x)$ пересекает ось OX из положительной области в отрицательную, то точка пересечения (т.е. точка x, при которой $f'(x)=0$) будет точкой максимума функции $f(x)$. Проанализируем график производной в диапазоне [-9;8], и найдем точки максимума. Это точки $x=-4;2$, т.е. 2 точки.

Ответ: 2.

Задание 7. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (-19; 2). Найдите количество точек минимума функции f(x), принадлежащих отрезку [-17; 1].



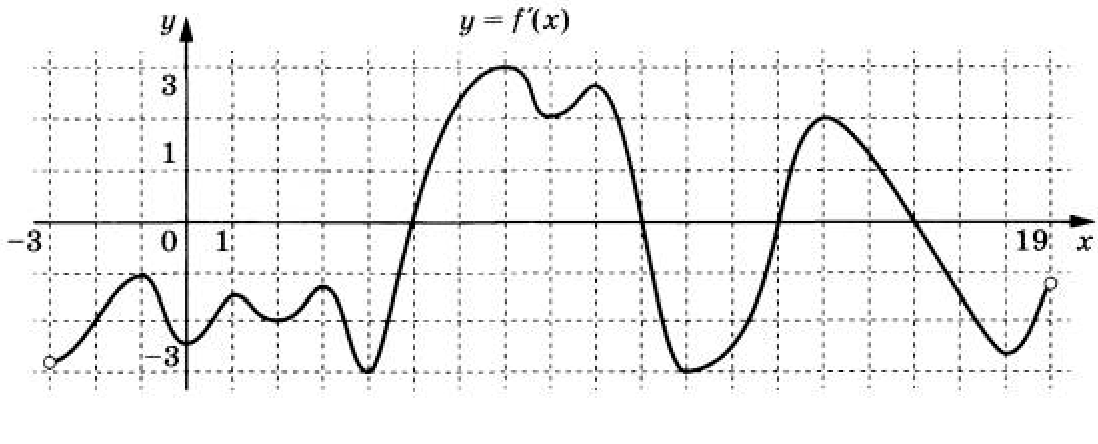
Решение.

Точки минимума и максимума функции $f(x)$ соответствуют точкам производной $f'(x)=0$, т.е. точкам, в которых производная пересекает ось OX. Чтобы выделить точки минимума нужно проанализировать как вела себя производная до и после точки $f'(x)=0$. Если она переходит из отрицательной области в положительную, то это будет точка минимума.

Анализ графика производной на рисунке в пределах от -17 до 1 показывает, что точки минимума функции $f(x)$ соответствуют значениям $x=-9;0$, т.е. двум точкам.

Ответ: 2.

Задание 7. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (-3; 19). Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [-1; 17].



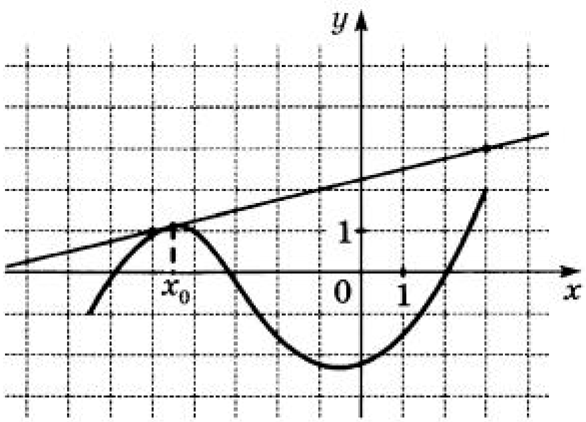
Решение.

Точки экстремума (минимума и максимума) функции $f(x)$ соответствуют значениям производной $f'(x) = 0$ и среди них точками максимума функции $f(x)$ будут те, в которых график производной пересекает ось OX из положительной области в отрицательную.

Проанализируем рисунок, получим, что точки максимума функции $f(x)$ в диапазоне от -1 до 17 соответствуют точкам $x = 10; 16$, т.е. 2 точки.

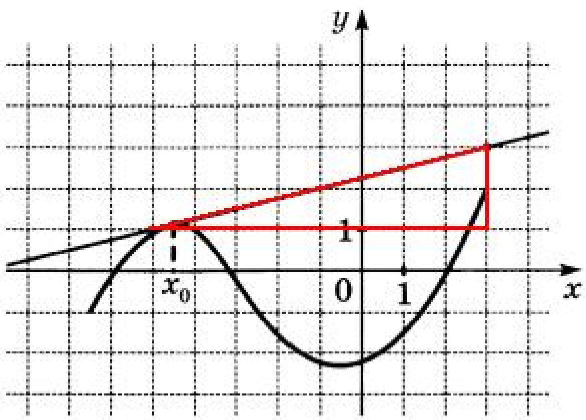
Ответ: 2.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке x_0 будет равно тангенсу угла наклона касательной в этой точке к оси OX. Для определения значения тангенса сделаем построение, показанное на рисунке ниже.



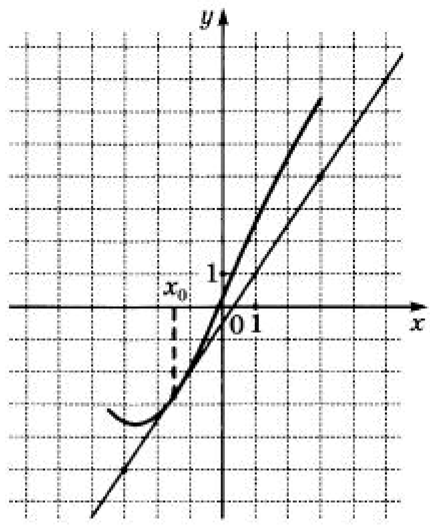
Тангенс угла наклона равен

$$tg\alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

следовательно, производная в точке x_0 равна 0,25.

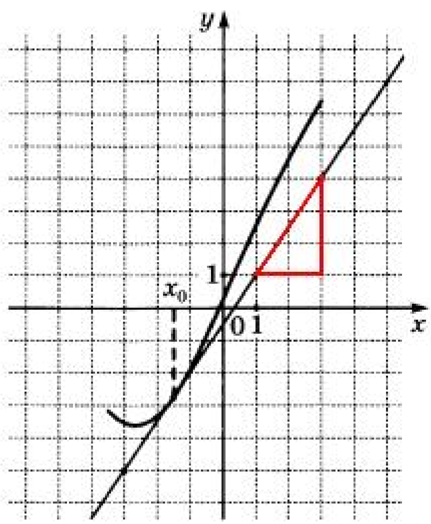
Ответ: 0,25.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Производная в точке x_0 равна значению тангенса наклона касательной к графику $f(x)$ в точке x_0. Для определения тангенса угла наклона касательной, а значит и производной, выполним построение, показанное на рисунке ниже.

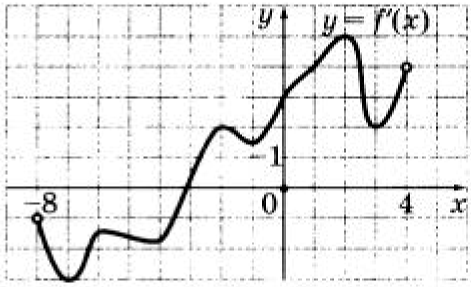


Из построения следует, что тангенс равен

$$tg\alpha = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Задание 7. На рисунке изображён график производной функции f(x), определённой на интервале (-8; 4). Найдите точку экстремума функции f(x) на отрезке [-7; 0].

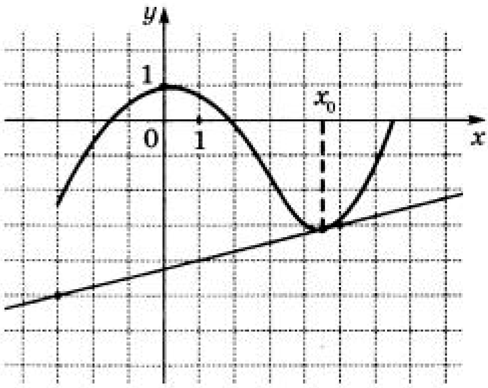


Решение.

В точках экстремума функции значение производной равно нулю. Подсчитаем на рисунке число точек, пересекающих ось OX в диапазоне от -7 до 0. Анализ рисунка показывает, что такая точка одна при $x = -3$.

Ответ: -3.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.

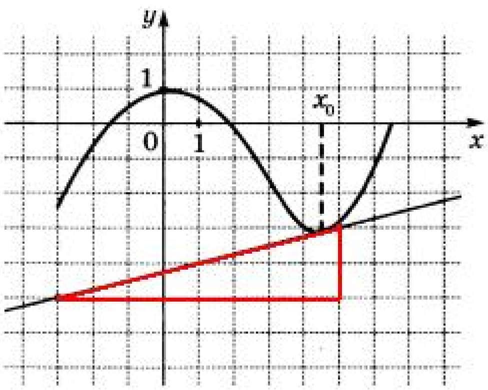


Решение.

Производная – это тангенс угла наклона касательной в точке x_0 к оси OX. По графику определяем, что тангенс угла наклона (получаем из треугольника см. рисунок ниже), равен

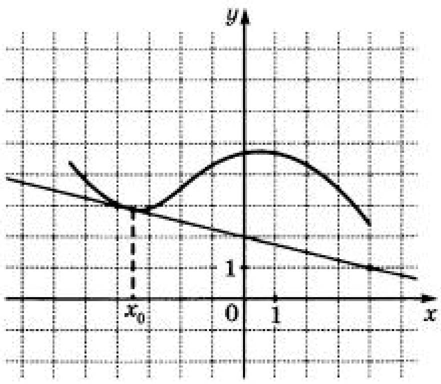
$$tg\alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

.



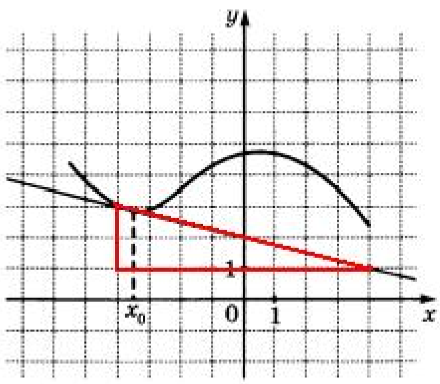
Ответ: 0,25.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Выполним построение, достроим прямоугольный треугольник, в котором касательная будет играть роль гипотенузы (см. ниже)



Как известно, производная – это тангенс угла наклона касательной к оси OX. Из треугольника получаем:

$$tg\alpha = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

Ответ: -0,25.

Задание 7. Функция y = f(x) определена на интервале (-5; 6). На рисунке изображён график функции y=f(x). Найдите среди точек $x_1, x_2, \ldots, x_7$ те точки, в которых производная функции f(x) равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

Решение.

Производная – это тангенс угла наклона касательной к оси OX, проведенной в точке взятия производной. Значение производной будет равно нулю в точках максимума и минимума функции (в точках экстремума функции). Найдем такие точки среди точек $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Анализ рисунка показывает, что это точки x_2, x_5, x_7, т.е. 3 точки.

Ответ: 3.

Задание 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -t^3 + 9t^2 - 7t + 6,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 3 с.

Решение.

Как известно, скорость равна производной от пути по времени, т.е.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -3t^2 + 18t - 7.$$

Тогда в момент времени $t = 3$ скорость была равна

$$v(t = 3) = -3 \cdot 9 + 18 \cdot 3 - 7 = 20 \text{ м/с.}$$

Ответ: 20.

Задание 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 3t^3 - 4t^2 - 6t - 14,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 2 с.

Решение.

Скорость движения – это производная пути по времени. Используем прямолинейный закон движения и продифференцируем его по t, получим:

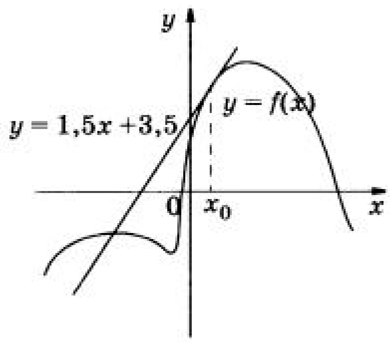
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -t^3 + 9t^2 - 8t - 6$$

и рассчитаем скорость при $t = 2$:

$$v(t = 2) = -8 + 36 - 16 - 6 = 6 \text{ м/с.}$$

Ответ: 6.

Задание 7. На рисунке изображён график функции y = f(x) и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Касательная задана уравнением $y = 1,5x + 3,5$. Найдите значение производной функции $y = 2f(x) - 1$ в точке x_0.



Решение.

Сначала найдем значение производной функции $f(x)$ в точке x_0. Как известно, значение производной равно тангенсу угла наклона касательной к оси OX. Нам дано уравнение касательной $y = 1,5x + 3,5$. Рассчитаем для двух точек $x = 1; 3$ значения y, получим:

$$y_1 = 1,5 + 3,5 = 5$$
$$y_3 = 4,5 + 3,5 = 8$$

Таким образом, получаем, что при изменении значения по оси ординат на 2 единицы 3-1=2, график касательной меняется по оси OY на 8-5=3. Следовательно, тангенс наклона касательной к оси OX равен:

$$tg\alpha = \frac{3}{2} = 1,5 = f'(x_0).$$

В задаче нам требуется найти производную для функции $y = 2f(x) - 1$. Эта функция возрастает по оси OY в два раза быстрее, чем функция $f(x)$, а значит, и производная будет в два раза больше, т.е.

$$\left(2f(x_0) - 1\right)' = 2tg\alpha = 2 \cdot 1,5 = 3.$$

При этом константное смещение на -1 по оси OY не влияет на значение производной.

Ответ: 3.

Задание 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 6t - 27$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 4 м/с?

Решение.

Скорость материальной точки в момент времени t можно найти путем дифференцирования пути $x(t)$ по t, получим:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2}{5}t + 6.$$

По условию задачи нужно найти момент времени t, при котором скорость равнялась 4 м/с:

$$4 = -\frac{2}{5}t + 6,$$

откуда

$$-\frac{2}{5}t = 4 - 6 = -2$$

$$t = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$$

Ответ: 5.

Задание 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - 5t - 20,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 43 м/с?

Решение.

Определим закон изменения скорости материальной точки, продифференцировав $x(t)$ по t, получим:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{3}{4}t^2 - 5.$$

Необходимо определить момент времени t, в который скорость стала равна 43 м/с:

$$\frac{3}{4}t^2 - 5 = 43$$

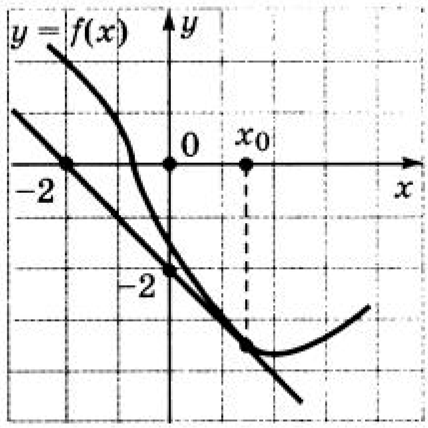
$$\frac{3}{4}t^2 = 43 + 5 = 48$$

$$t^2 = 48 \cdot \frac{4}{3} = 64$$

$$t = 8$$

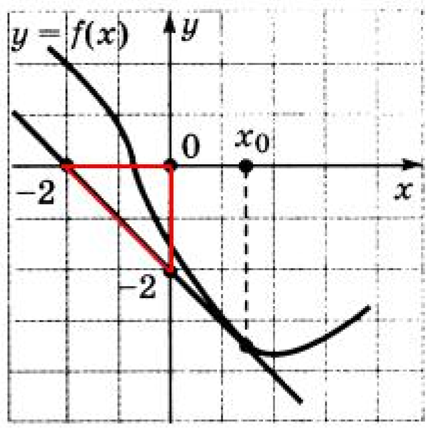
Ответ: 8.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Как известно, производная в точке равна тангенсу угла наклона касательной к оси OX, проведенной в этой точке. Чтобы вычислить тангенс угла наклона касательной, выполним построение, как показано на рисунке ниже.

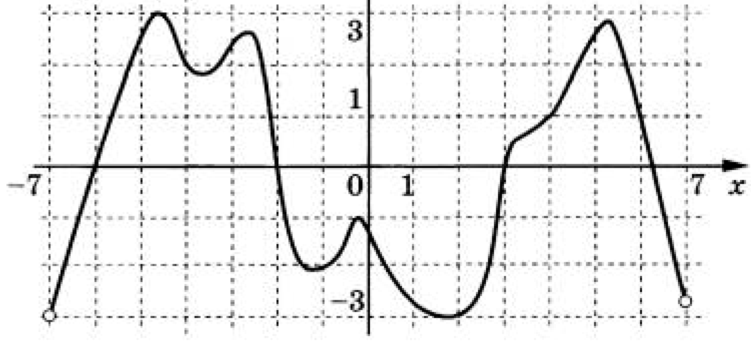


Из прямоугольного треугольника получаем

$$tg\alpha = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ответ: -1.

Задание 7. На рисунке изображён график функции y=f(x), определённой на интервале (-7; 7). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение.

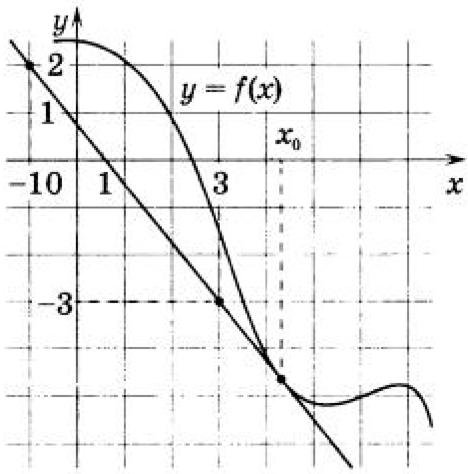
Производная – это тангенс угла наклона касательной к оси OX. Следовательно, производная функции будет отрицательна, если функция $f(x)$ убывает в точке, где берется производная. Анализ рисунка показывает, что на интервале (-7; 7) функция убывает в целых точках:

$$x = -4; -2; 0; 1; 6,$$

т.е. в 5 точках.

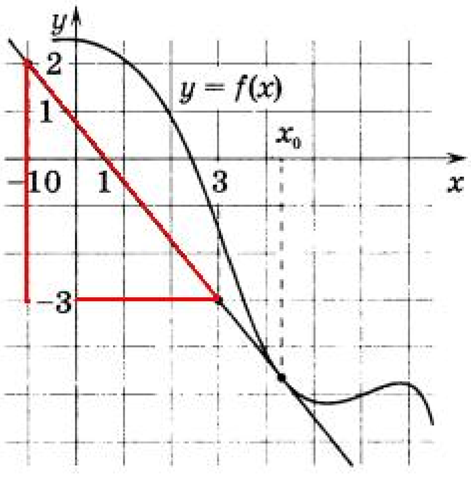
Ответ: 5.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к оси OX в точке x_0. Для вычисления тангенса, выполним построение, показанное на рисунке ниже.

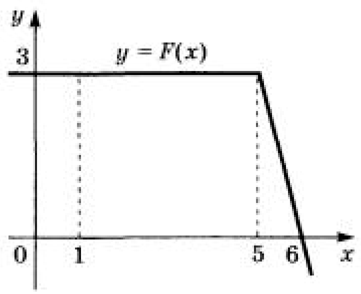


Из прямоугольного треугольника находим, что тангенс (и что то же самое производная) равен

$$tg\alpha = \frac{-5}{4} = -1,25.$$

Ответ: -1,25.

Задание 7. На рисунке изображён график некоторой функции y = f(x). Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int_1^6 f(x)dx$.



Решение.

Интеграл $\int_1^6 f(x)dx$ равен площади фигуры, ограниченной по оси OY функцией $f(x)$, а по оси OX диапазоном от 1 до 6. В соответствии с рисунком эта площадь соответствует площади трапеции или сумме двух площадей: прямоугольника и треугольника.

Площадь прямоугольника равна

$$S_1 = (5-1)\cdot 3 = 12,$$

а площадь треугольника

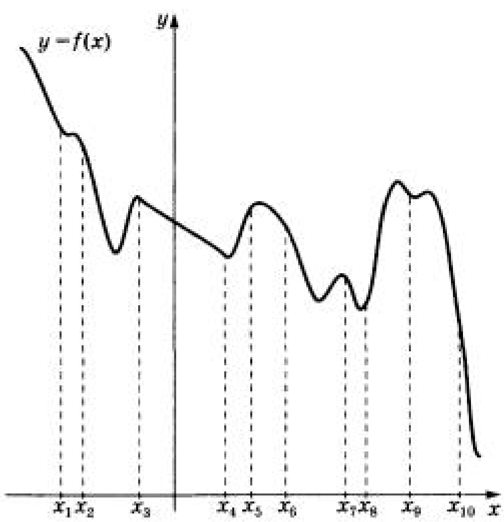
$$S_2 = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot(6-5)\cdot 3 = 1{,}5.$$

Суммарная площадь всей фигуры, т.е. значение интеграла есть

$$S_1 + S_2 = 12 + 1{,}5 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

Задание 7. На рисунке изображён график функции и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?



Решение.

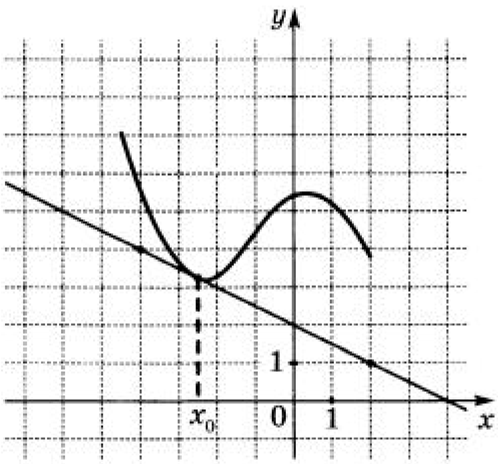
По свойствам производной известно, что производная отрицательна, если в точке x (где берется производная) функция $f(x)$ убывает. Проанализируем график функции $f(x)$ и выберем точки, в которых функция убывает, получим:

$$x = x_1; x_2; x_3; x_4; x_6; x_7; x_9; x_{10},$$

т.е. 8 точек.

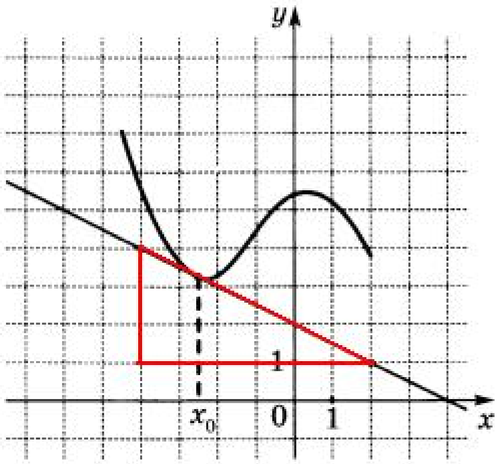
Ответ: 8.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение.

Производная в точке x_0 будет равна тангенсу наклона касательной, проведенной в этой точке, к оси OX. Выполним построение

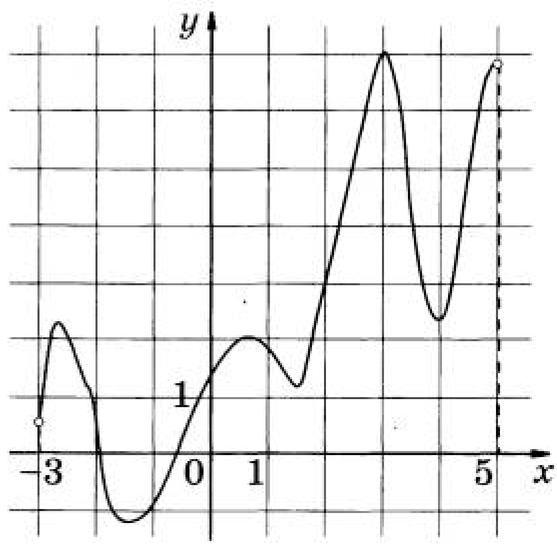


И найдем тангенс угла наклона касательной как отношение противолежащего катета на прилежащий, получим:

$$tg\alpha = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Ответ: -0,5.

Задание 7. Функция y = f(x) определена на интервале (-3; 5). На рисунке изображён график её производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции y = f(x), которые параллельны прямой y = 3x - 5 или совпадают с ней.



Решение.

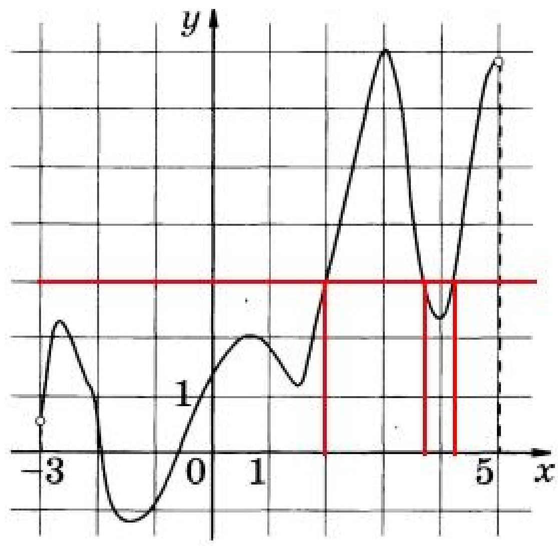
Производная равна тангенсу наклона касательной к оси OX в точке, где берется производная. Нам нужно найти тоски, в которых касательная равна или параллельна прямой $y = 3x - 5$. Чтобы это условие соблюдалось, необходимо и достаточно, выбрать точки, в которых производная будет равна тангенсу угла наклона прямой $y = 3x - 5$ к оси OX. Найдем значение тангенса. Возьмем две точки по OX: $x = 1; 2$ и вычислим y, получим:

$$y_1 = 3 - 5 = -2$$
$$y_2 = 6 - 5 = 1$$

следовательно, тангенс равен

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} = 3.$$

Теперь найдем, сколько точек на графике имеют значение равное 3 по оси OY, т.е. сколько точек пересекает линию $x = 3$.



Получаем 3 точки.

Ответ: 3.