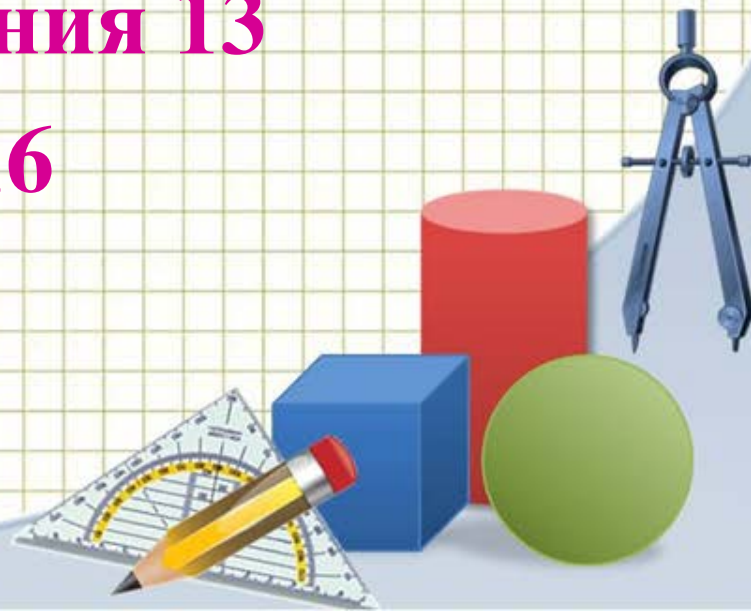


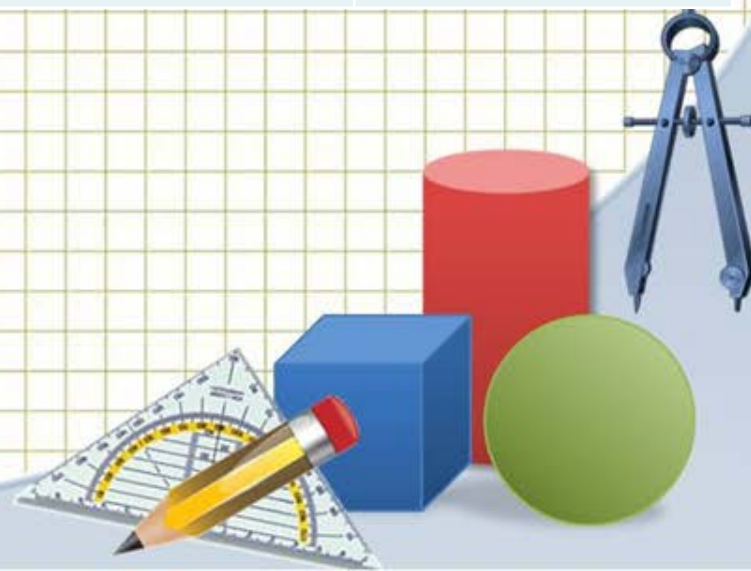
Педагогические, теоретические и практические аспекты проблемы ЕГЭ

Решение задания 13
ЕГЭ - 2016



Спецификация задания 13

Проверяемые требования (умения)	Уровень сложности	Максимальный балл	Примерное время для выполнения задания (базовый уровень)	Примерное время для выполнения задания (профильный уровень)
Уметь решать уравнения и неравенства	Повышенный	2	30	15

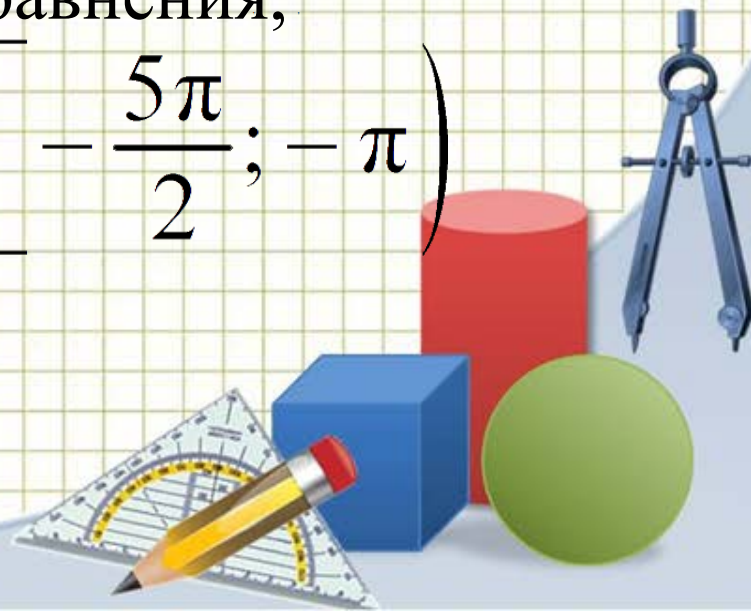


Задание 13 демонстрационного варианта ЕГЭ - 2016

- а) Решите уравнение

$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

- б) Найдите все корни этого уравнения,
принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$



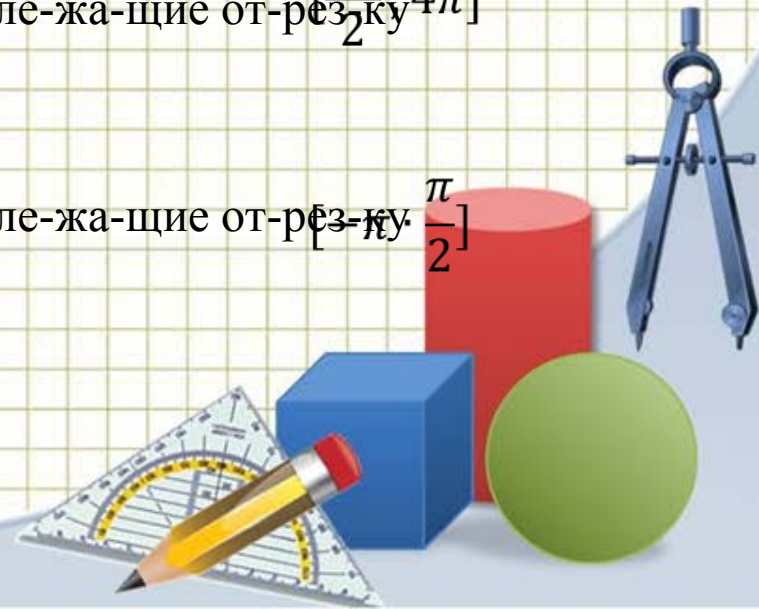
Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие показательные выражения.
- Уравнения, содержащие логарифмические выражения.
- Уравнения, содержащие иррациональные выражения.
- Уравнения, содержащие дробные выражения.
- Уравнения, содержащие модули.
- Уравнения, содержащие корни.
- Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.
- Комбинированные уравнения.
- Серия тригонометрических уравнений.



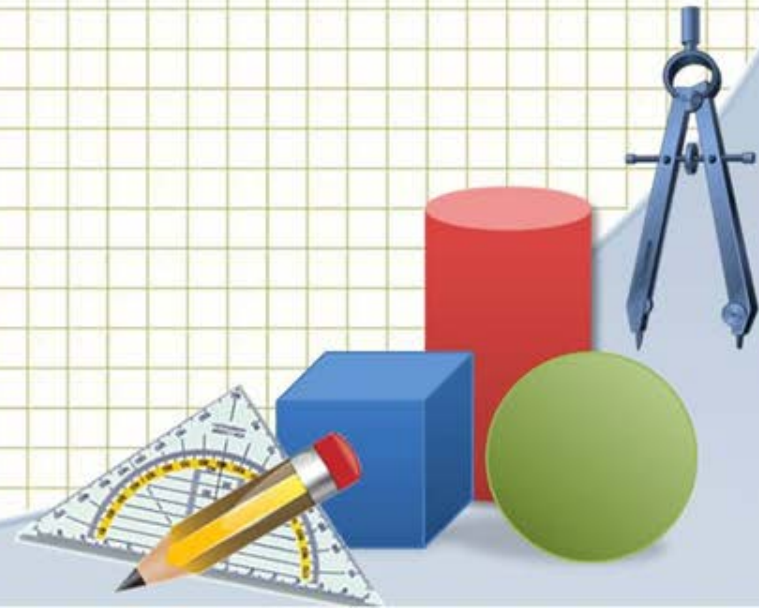
Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие показательные выражения.
-
- Ре-ши-те урав-не-ние $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$
- Най-ди-те все корни этого урав-не-ния, при-над-ле-жа-щие от-ре-з-ку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$
- Ре-ши-те урав-не-ние $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$
- Най-ди-те все корни этого урав-не-ния, при-над-ле-жа-щие от-ре-з-ку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$
- Ре-ши-те урав-не-ние $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$
- Най-ди-те все корни этого урав-не-ния, при-над-ле-жа-щие от-ре-з-ку $[\frac{\pi}{2}; \pi]$



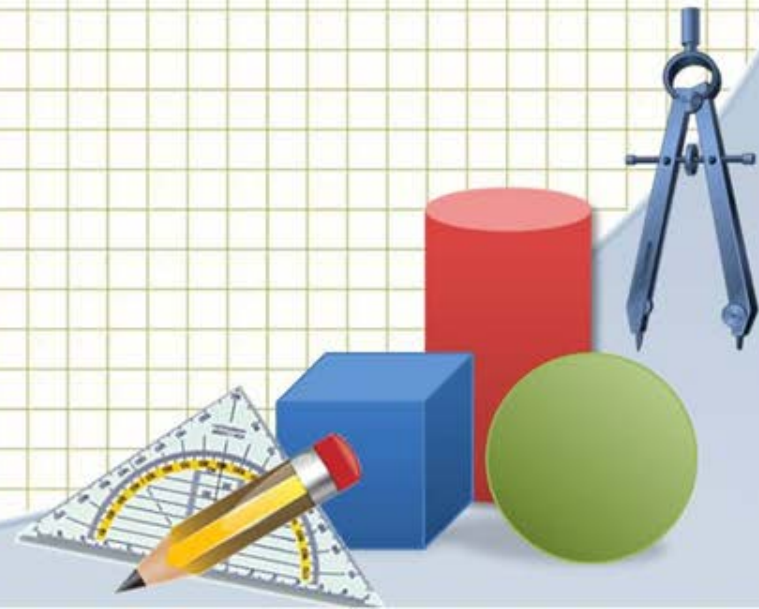
Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие логарифмические выражения.
- Ре-ши-те урав-не-ние $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$
- Най-ди-те все корни этого урав-не-ния, при-над-ле-жа-щие от-рез-ку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$
- Ре-ши-те урав-не-ние $(2\cos^2 x - 5\cos x + 2) \cdot \log_{11}(-\sin x) = 0$



Типовые задания С1

- Комбинированные уравнения.
- Ре-ши-те урав-не-ние $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4) \cdot \sqrt{-7 \cos x} = 0$
- Ре-ши-те урав-не-ние $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$

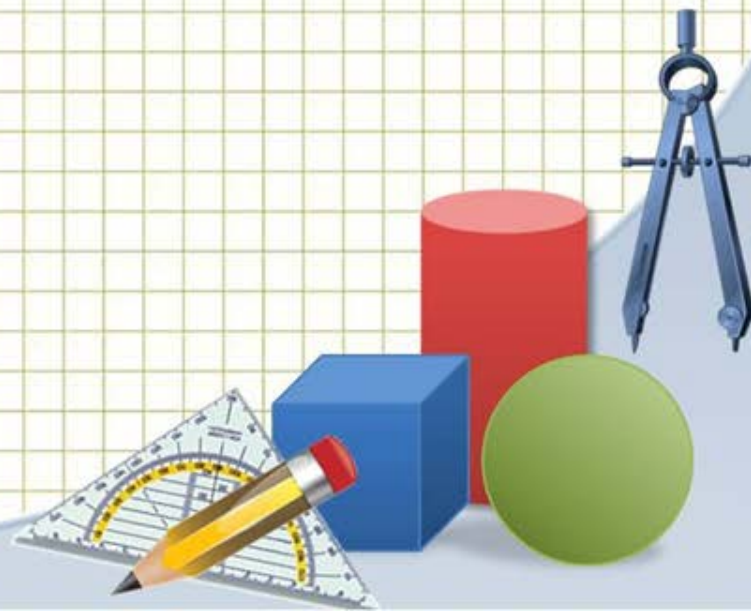


Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие дробные выражения.

- Ре-ши-те урав-не-ние
$$\frac{26\cos^2 x - 23\cos x + 5}{13\sin x - 12} = 0$$

- Ре-ши-те урав-не-ние
$$\frac{2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$$

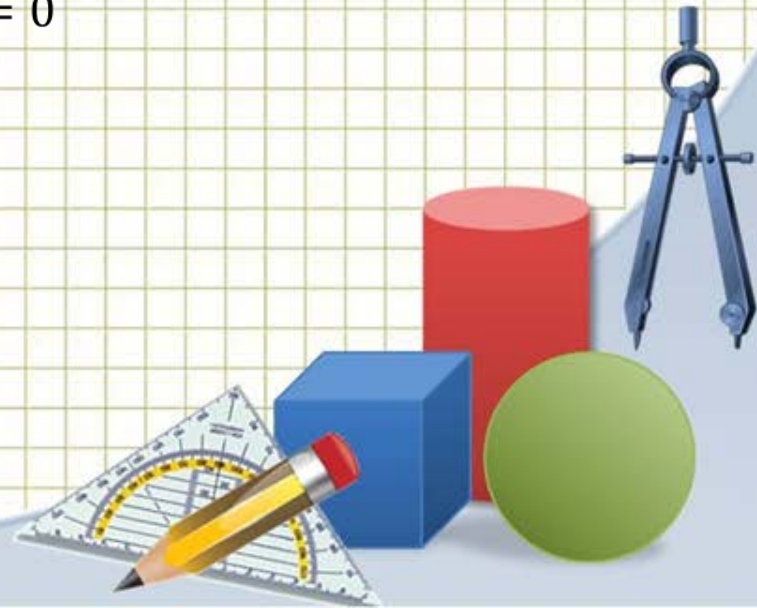


Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие корни.

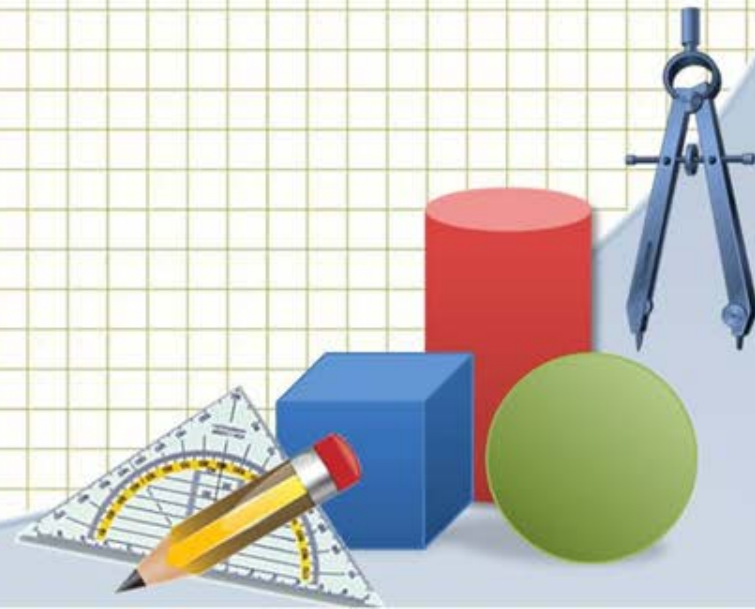
- Ре-ши-те урав-не-ние $\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin(x - \frac{\pi}{4})}} = 0$

- Ре-ши-те урав-не-ние $\frac{2\sin^2 x - \sin 2x - 2\cos 2x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$



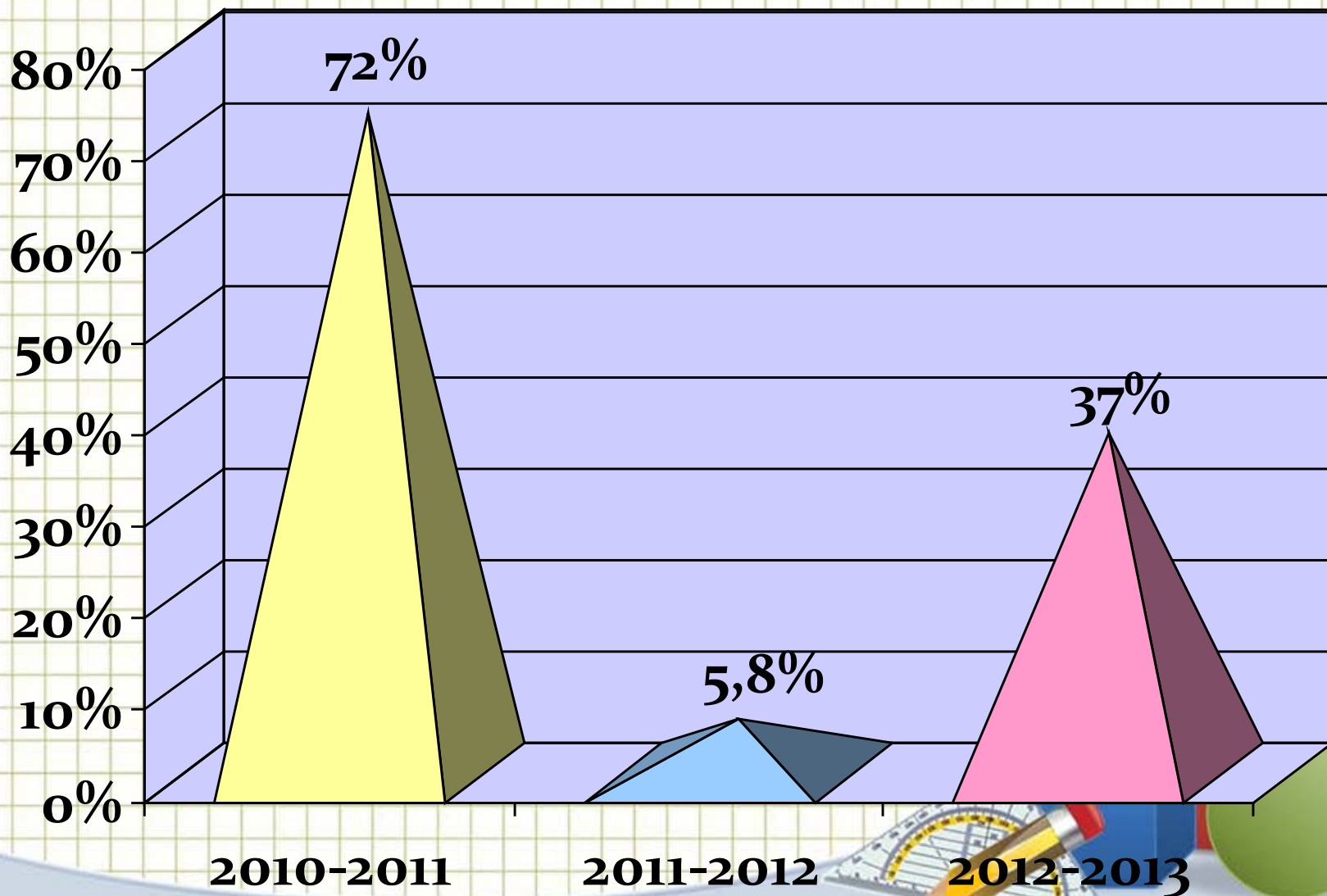
Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие модули.
- Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$
- Решите уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$



Выполнение задания 13(С1)

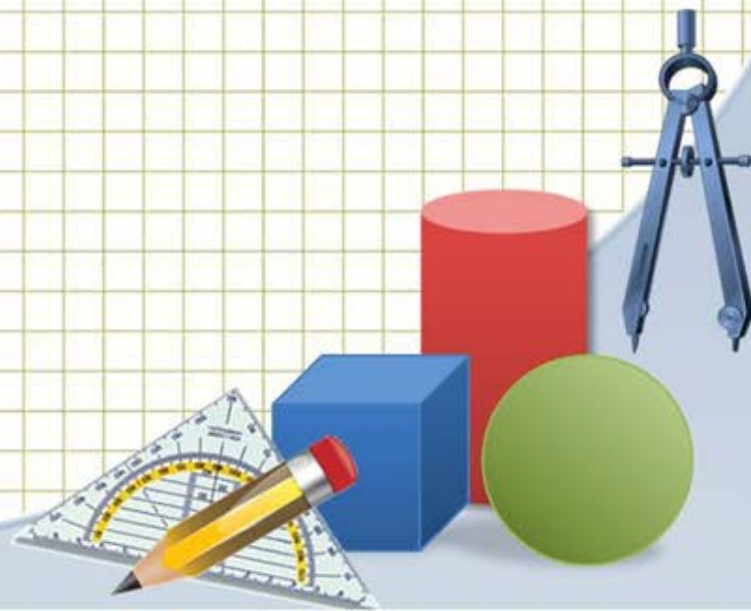
выпускниками МБОУ «СОШ № 10» за 3 года



Типичные ошибки в решении задания 13

ЕГЭ по математике

(потеря корней, появление «посторонних» корней)



Первое задание:

а) Решите уравнение:

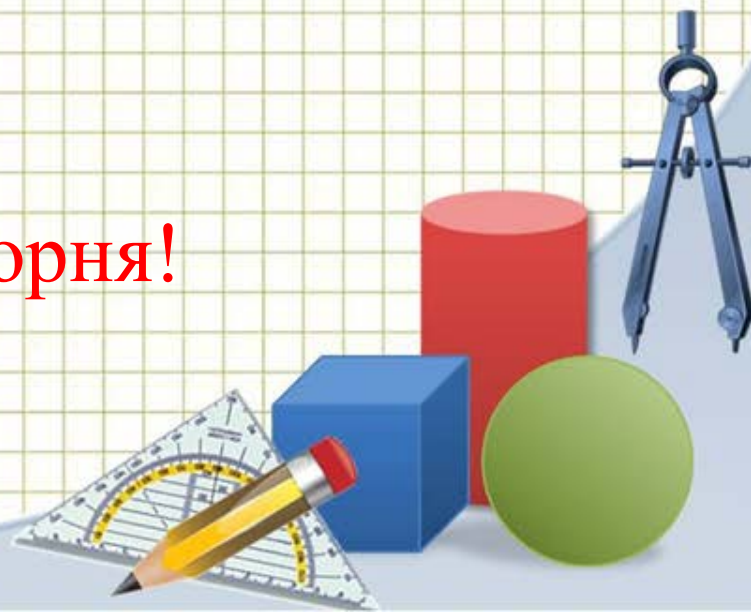
$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \operatorname{ctgx}$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

При решении уравнения попытаемся представить тангенс суммы двух углов по формуле $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

Получилось: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$

И – внимание! – потеря корня!



Смотрите внимательно: после этого преобразования мы получили отдельно стоящий $\operatorname{tg}x$. Но $\operatorname{tg}x$ не определен при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. А в исходном уравнении x вполне мог быть равен $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

То есть, выполняя это невинное преобразование, мы сузили ОДЗ. Поэтому, **выполняя преобразование нужно следить за тем, что происходит с областью допустимых значений.**



Итак, мы идем другим путем.

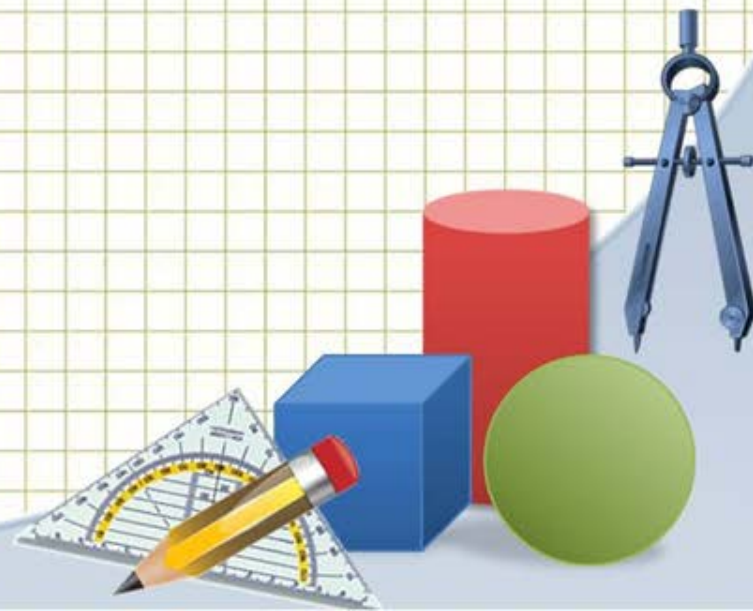
Запишем $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ через \sin и \cos :

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$

Используем формулы синуса и косинуса
СУММЫ:

$$\frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$



$$\frac{2 \cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{2(\sqrt{2} + 1) \cos x}{\sin x} = 0$$

Вынесем за скобку общий множитель:

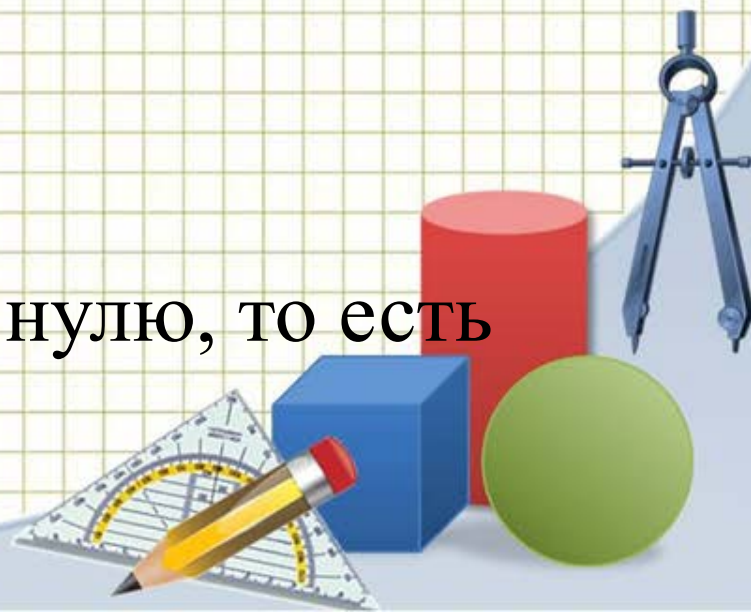
$$2 \cos x \left(\frac{1}{\cos x - \sin x} - \frac{\sqrt{2} + 1}{\sin x} \right) = 0$$

Приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$2 \cos x \left(\frac{\sin x - (\sqrt{2} + 1)(\cos x - \sin x)}{\sin x (\cos x - \sin x)} \right) = 0$$

Знаменатель дроби не равен нулю, то есть

$$\cos x - \sin x \neq 0 \quad \text{и} \quad \sin x \neq 0$$



Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю:

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - (\sqrt{2} + 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

1. $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ВОТ ОН, ПОТЕРЯННЫЙ КОРЕНЬ!

2. $\sin x - (\sqrt{2} + 1)(\cos x - \sin x) = 0$

Раскроем скобки, приведем подобные члены:

$$\sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x - \cos x + \sin x = 0$$

$$(\sqrt{2} + 2) \sin x - (\sqrt{2} + 1) \cos x = 0$$



$$\left(\sqrt{2}+2\right) \sin x=\left(\sqrt{2}+1\right) \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+2}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

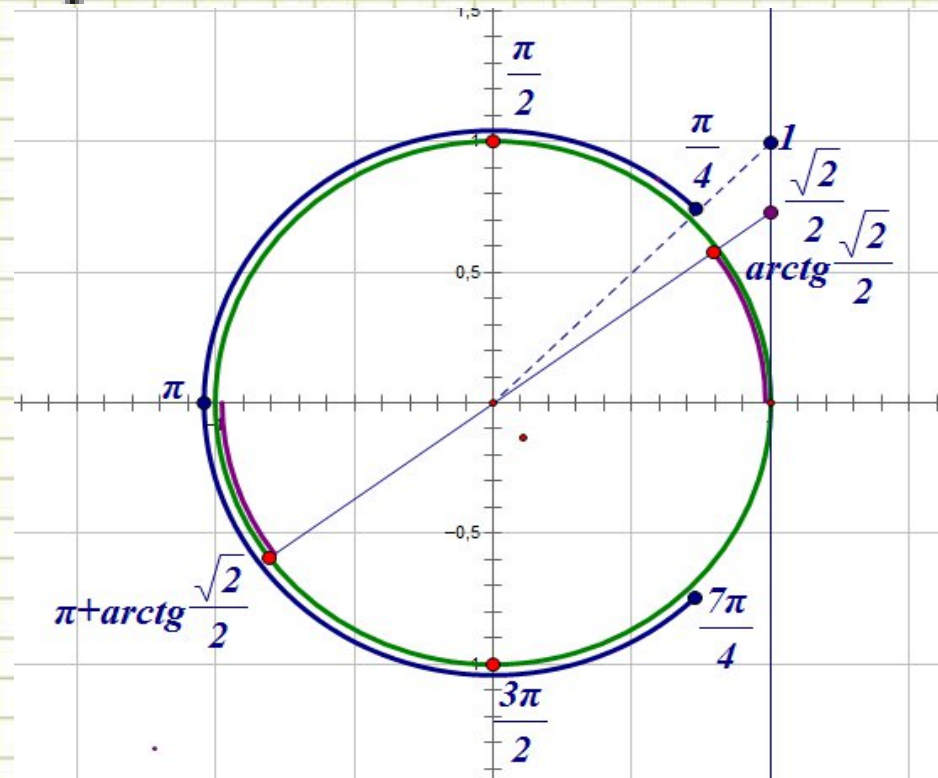
Итак, мы получили два решения:



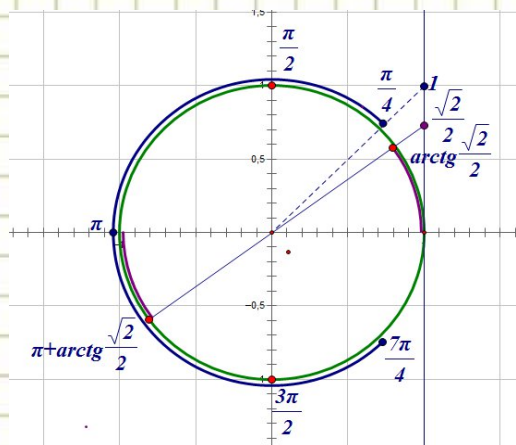
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдем корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right]$:



На рисунке красными точками обозначены решения уравнения;
 синей дугой обозначен промежуток, которому принадлежат корни;



угловая величина сиреновой дуги равна дуги равна $\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Двигаясь из точки $\frac{\pi}{4}$, мы встречаем на пути $\frac{3\pi}{2}$, $\pi + \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Это и есть корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

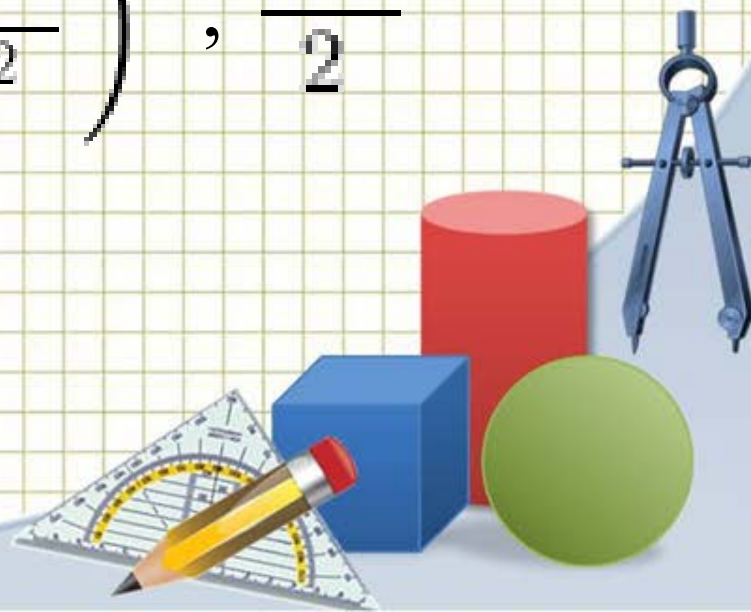


Мы видим, что
корень $\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не принадлежит
заданному промежутку.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) $\frac{\pi}{2}$, $\pi + \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\frac{3\pi}{2}$



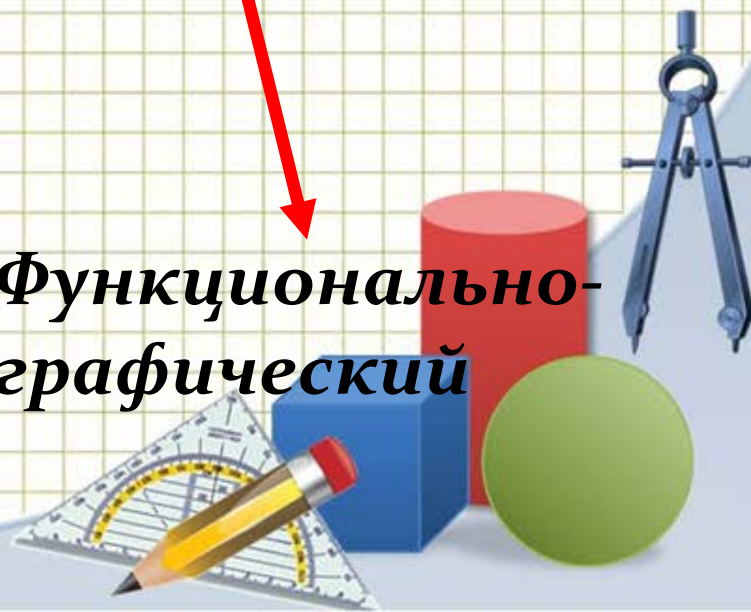
Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический

Геометрический

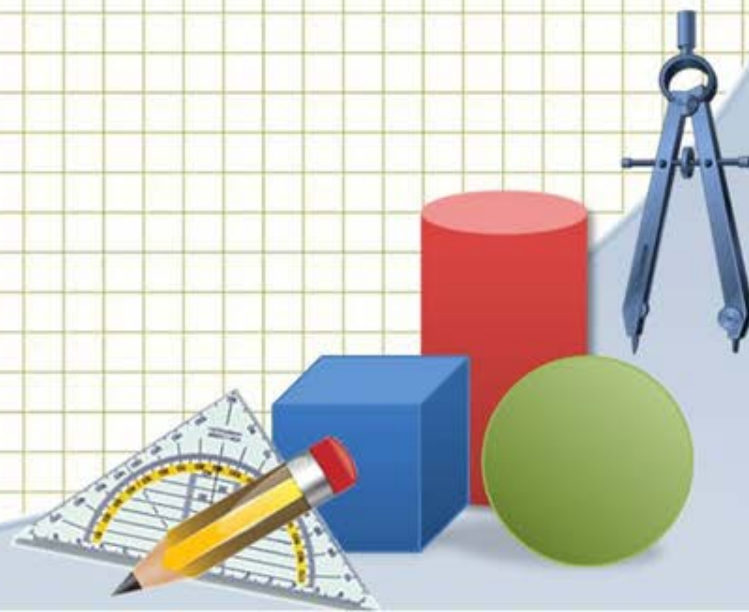
Алгебраический

*Функционально-
графический*



Арифметический способ

**перебор значений
целочисленного параметра
и вычисление корней.**



Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$1) \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Если $n=0$, то

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=1$, то

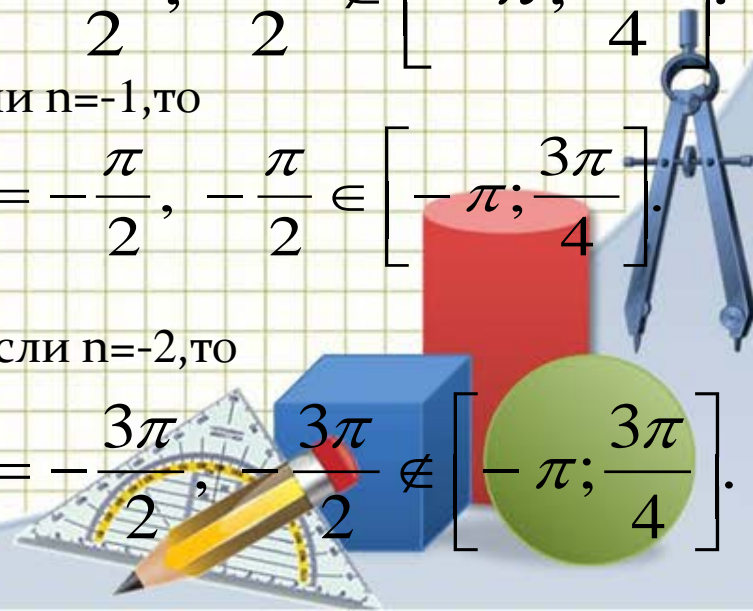
$$x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=-1$, то

$$x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=-2$, то

$$x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$



$$2) \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $n=-1$, то

$$x = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

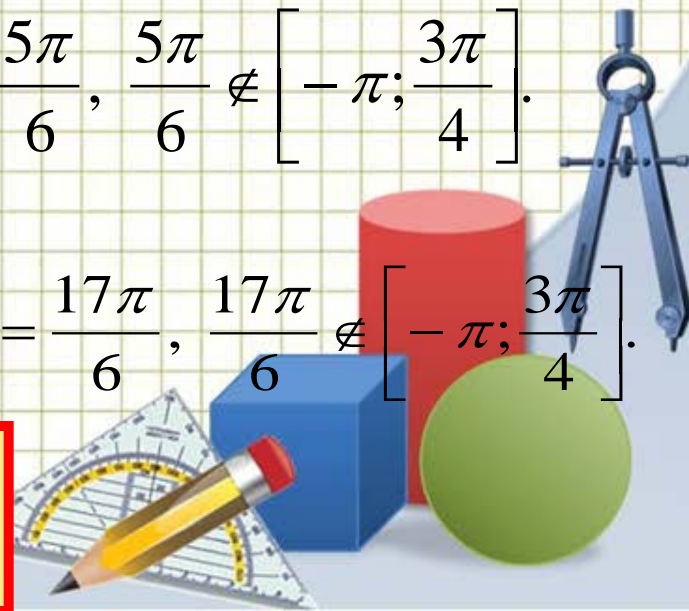
Если $n=0$, то

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=1$, то

$$x = \frac{13\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{17\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$.



Алгебраический способ

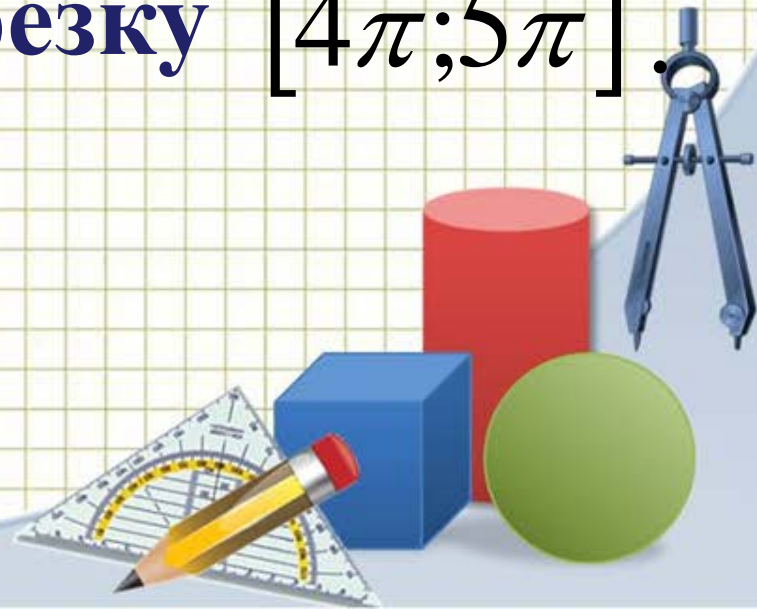
- а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;**
- б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.**



Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0.$$

Укажите корни,
принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$.



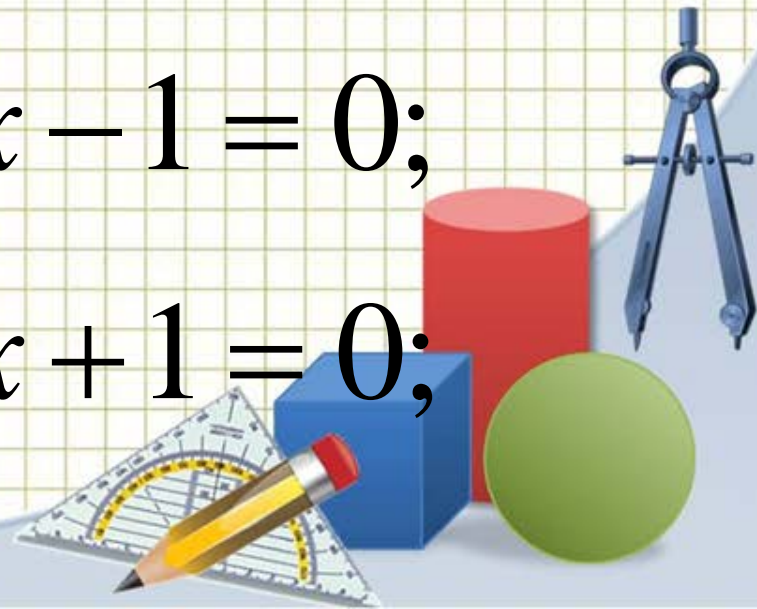
$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$



$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0:$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$\cos x = 1;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{13\pi}{3}.$$

$$x = 4\pi.$$

$$3) x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 5\pi, n \in \mathbb{Z};$$
$$4\pi \leq 2\pi n \leq 5\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$4 \leq 2n \leq 5, n \in \mathbb{Z};$$

$$2 \leq n \leq \frac{5}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

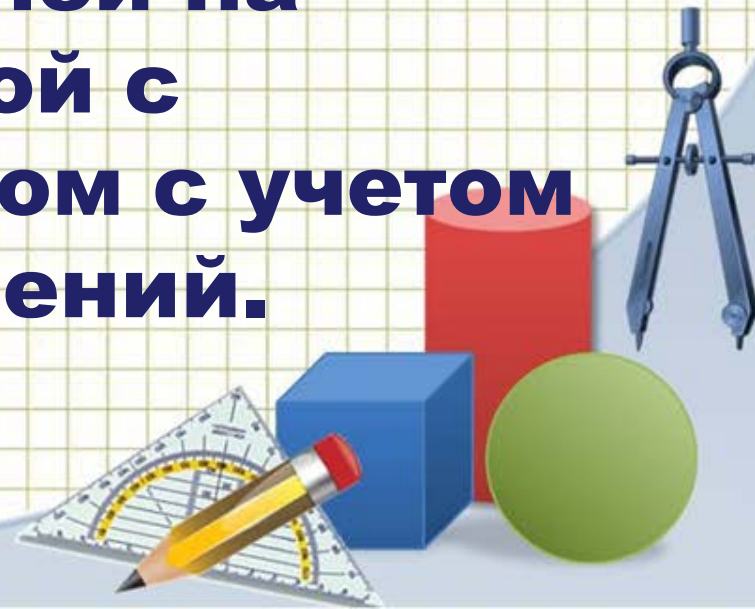
$$4 - \frac{1}{3} \leq 2n \leq 5 + \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ : } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$

Геометрический способ:

- а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;**
- б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.**



$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

Выполним отбор корней в
предыдущем уравнении по-
другому!

$x =$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$

5π

y

1

0

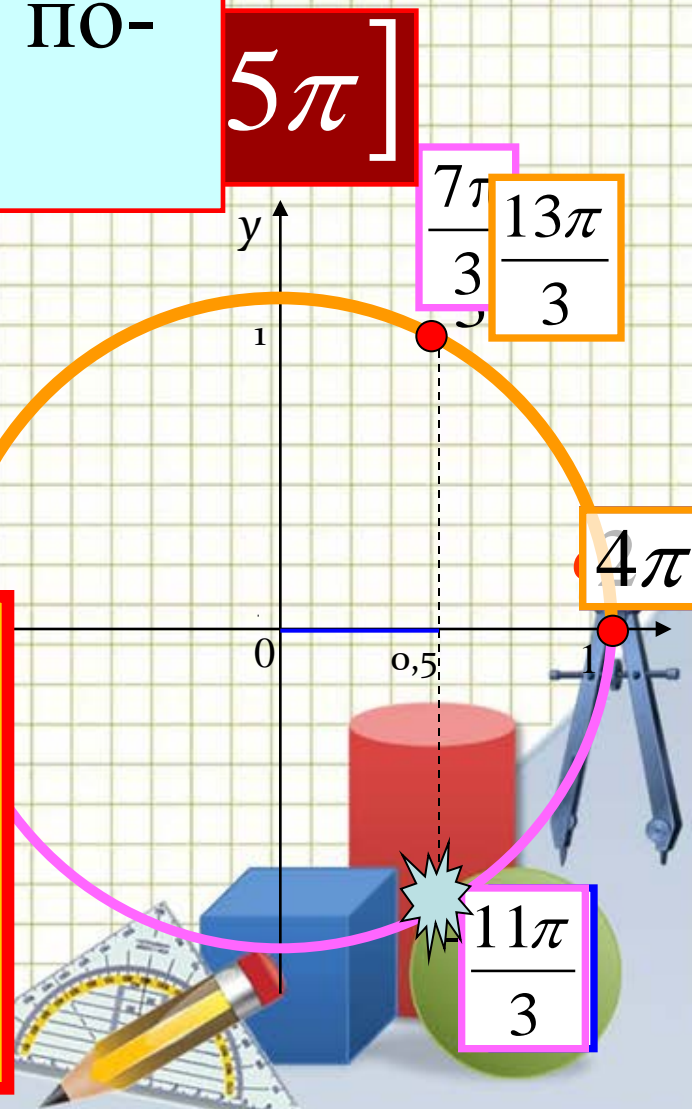
0,5

4π

$\frac{7\pi}{3}$

$\frac{13\pi}{3}$

$\frac{11\pi}{3}$

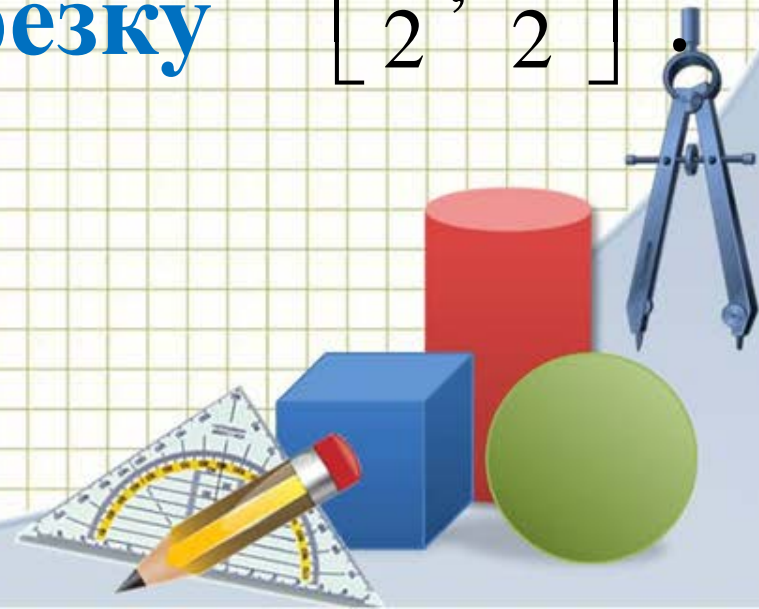


Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Укажите корни,
принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$



$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\left[\operatorname{tg} x = 1,$$

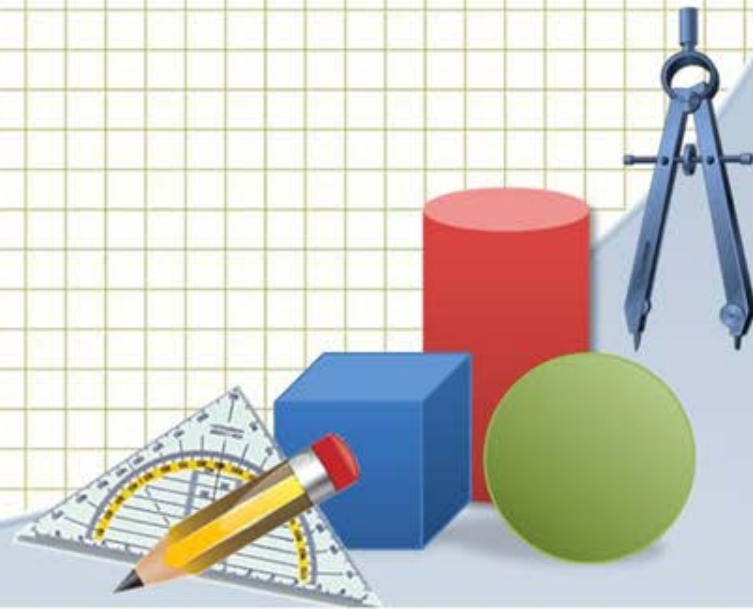
$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2};$$

Разделим на $\cos^2 x; \cos^2 x \neq 0.$

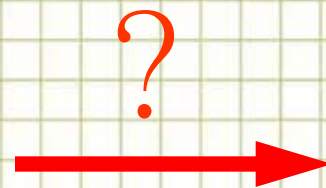
Однородное уравнение

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$



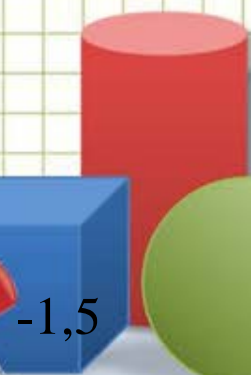
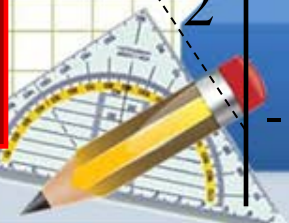
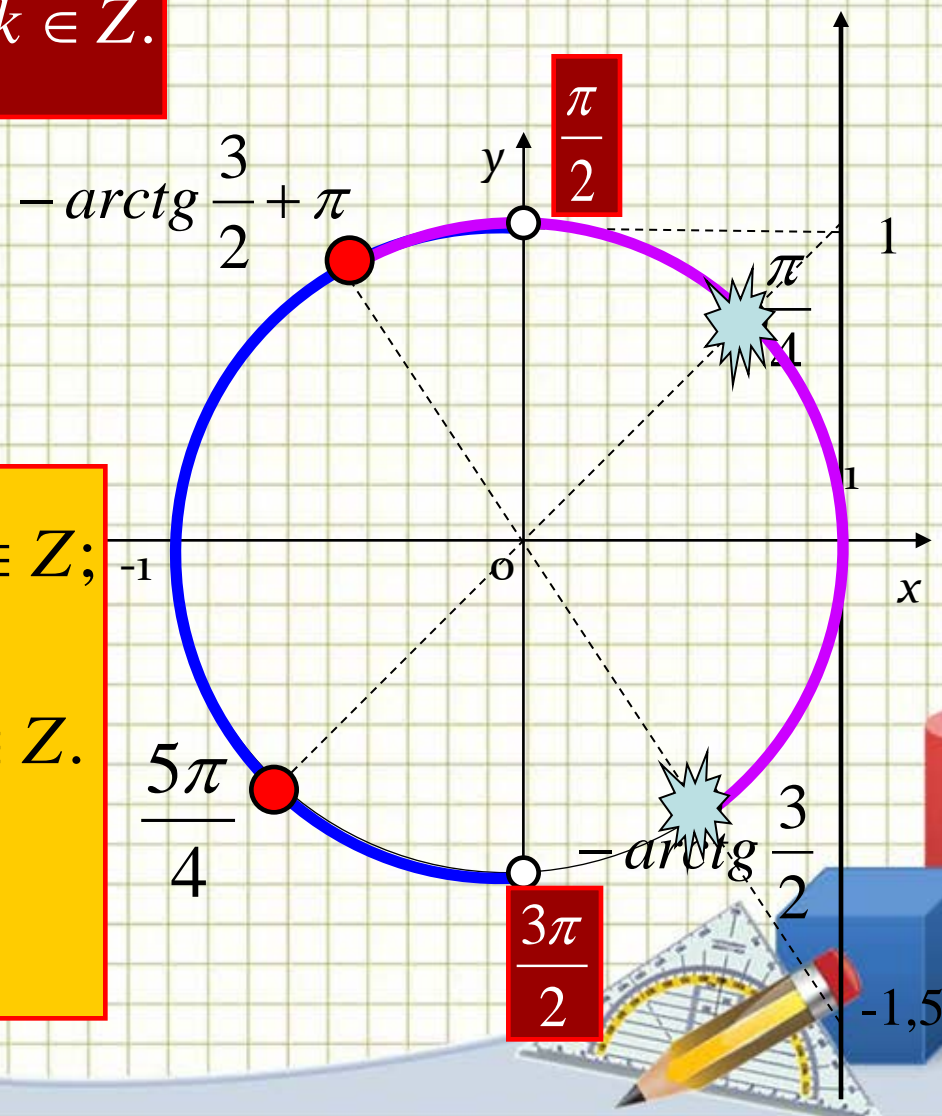
$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-\arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{5\pi}{4}; \pi - \arctg\frac{3}{2}.$$



прямой.

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0.$$

Решение :

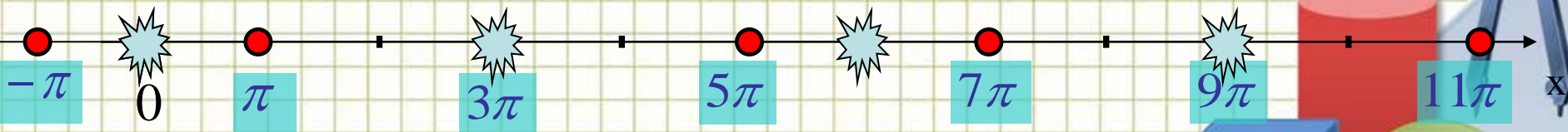
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 3\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$T\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 4\pi,$$

$$T\left(\sin \frac{x}{3}\right) = 6\pi.$$

Наим. общий период :

$$T_{\text{общ}} = 12\pi.$$

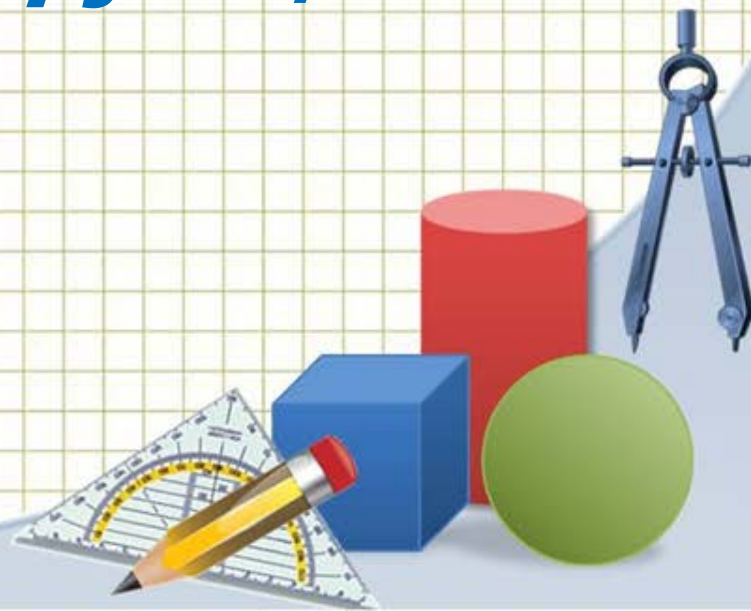


Ответ :

$$-\pi + 6\pi t, \pi + 6\pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

Функционально-графический способ

выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.



Решите уравнение

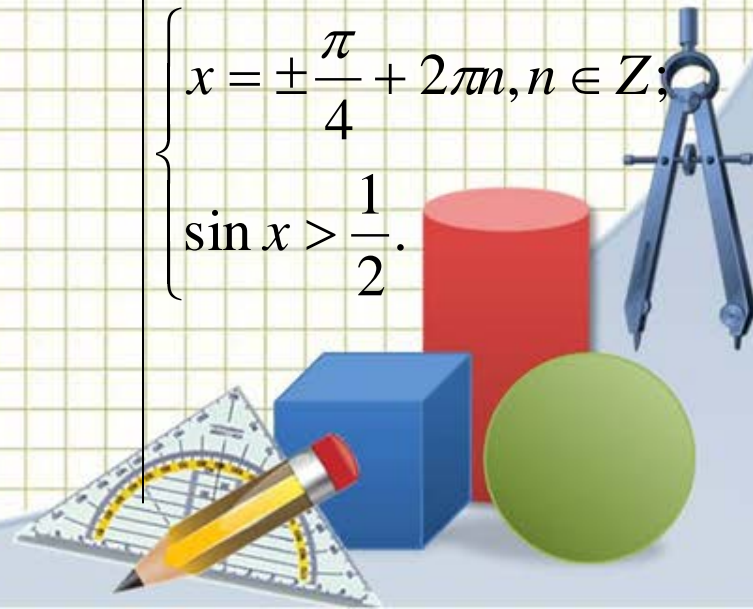
$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\frac{2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

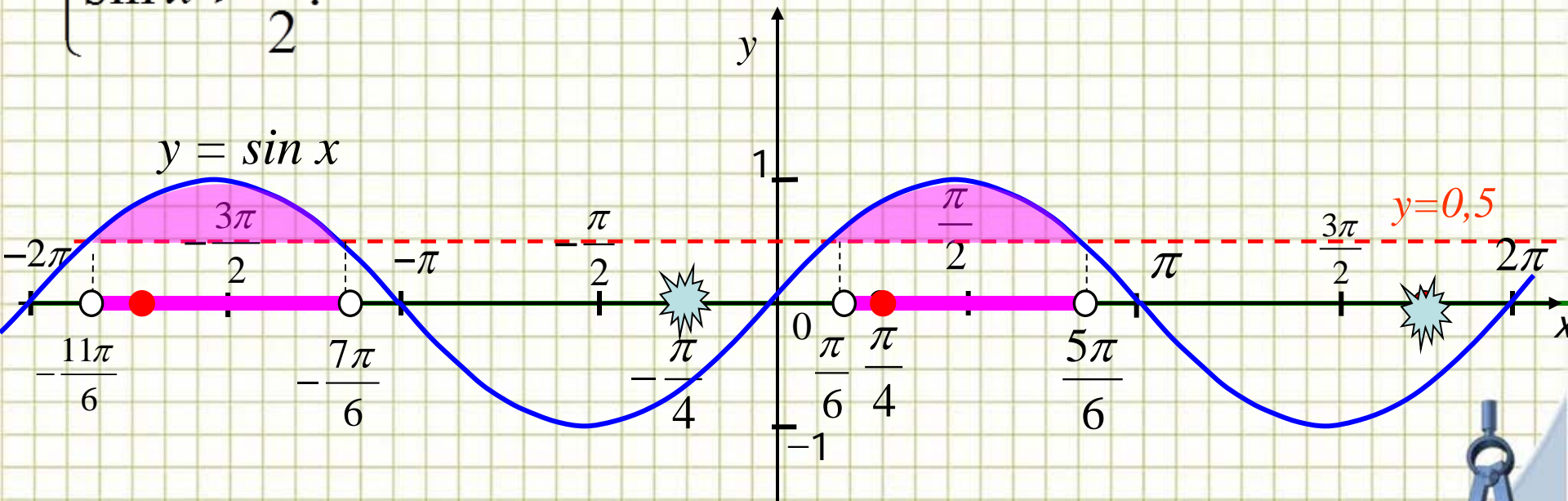
$$\frac{(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (2 \sin x - 1)}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \\ \sin x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

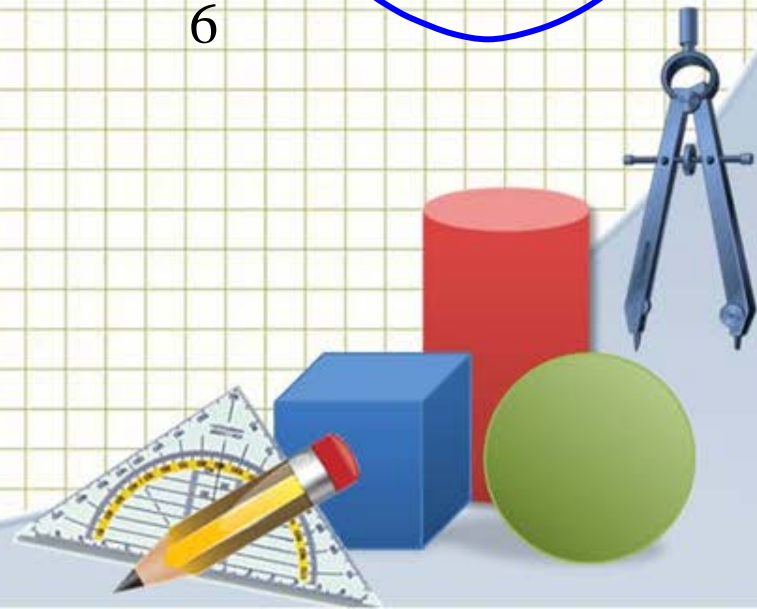
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

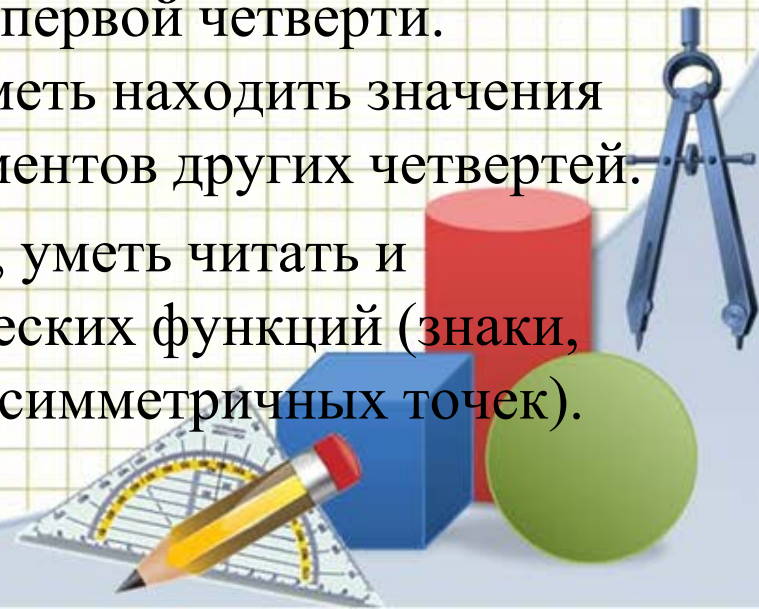


Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$



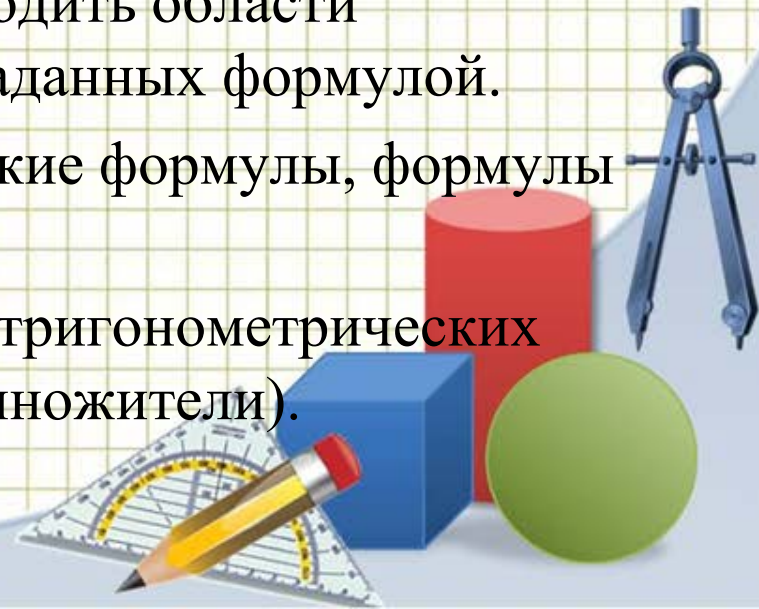
Для успешного решения задач типа 13 необходимо знать и уметь:

- 1. Понимать, уметь "читать" числовую окружность. При этом использовать не только градусную меру углов, но и радианную.
- 2. Знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
- 3. Знать таблицу значений тригонометрических функций основных аргументов и аргументов первой четверти. Применяя числовую окружность, уметь находить значения тригонометрических функций аргументов других четвертей.
- 4. Используя числовую окружность, уметь читать и применять свойства тригонометрических функций (знаки, четность, периодичность, формулы симметричных точек).



Для успешного решения задач типа 13 необходимо знать и уметь:

- 5. Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения по формулам и с использованием числовой окружности.
- 6. Уметь решать простейшие тригонометрические неравенства, используя числовую окружность.
- 7. Уметь выбирать корни согласно условию задачи или по виду уравнения, для чего уметь находить области определения различных функций, заданных формулой.
- 8. Знать основные тригонометрические формулы, формулы двойных аргументов.
- 9. Знать основные методы решения тригонометрических уравнений (замена, разложение на множители).



Работать над темой рекомендуется в соответствии со следующим планом:

- Числовая окружность.
- Числовая окружность в координатной плоскости.
- Градусная и радианная мера угла.
- Определение, значения и свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
- Обратные тригонометрические функции и их свойства.
- Простейшие тригонометрические уравнения.
- Простейшие тригонометрические неравенства.
- Выбор корней при решении тригонометрических уравнений.
- Методы решения тригонометрических уравнений.
- Системы тригонометрических уравнений.
- Примеры решения задания 13 из экзаменационных вариантов.

