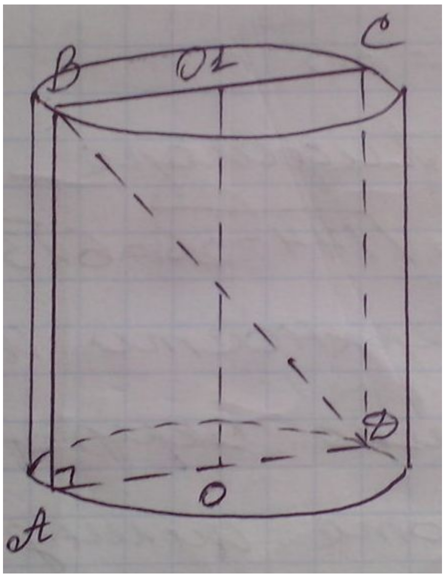
Задача №1

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 60º. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.



Пусть дан цилиндр, прямоугольник *АВСД* – его осевое сечение, *АД* и *ВС* – диаметры оснований. Точка *О* – центр нижнего основания, точка O_1 - центр верхнего основания. $OO_1 \subset (ABC)$, OO_1 - высота цилиндра.

$AB \perp AД$, *АД* проекция *ВД* на плоскость нижнего основания цилиндра, тогда $\angle ВДА$ – угол между диагональю *ВД* и плоскостью нижнего основания.

По условию *ВД = 12 см*, $\angle ВДА = 60^o$. Из $\Delta ВАД$ ($\angle ВАД = 90^o$), $\angle АВД = 90^o - 60^o = 30^o$. $АД = \frac{1}{2}ВД$, $АД = \frac{1}{2}12 = 6$ *(см)*, по свойству катета, лежащего против $\angle АВД = 30^o$.

Используя теорему Пифагора $AB = \sqrt{ВД^2 - АД^2}$, $AB = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$ *(см)*.

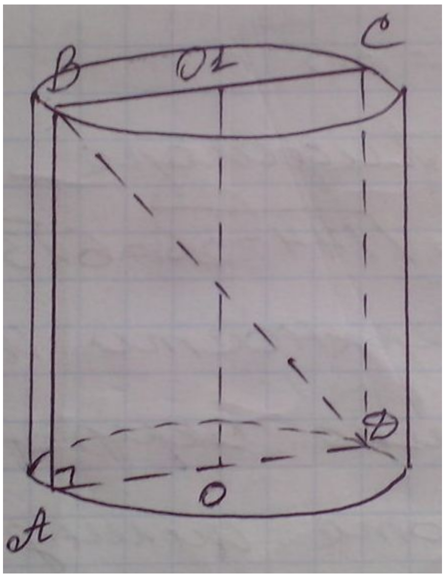
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = C \cdot H$, где *С* – длина окружности, *Н* – высота цилиндра. $H = AB = 6\sqrt{3}$ см, $S_{бок} = \pi d \cdot H$, $d = АД$, $S_{бок} = \pi АД \cdot AB$, $S_{бок} = \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\pi\sqrt{3}(см^2)$.

Ответ: $36\pi\sqrt{3}см^2$.

Задача №2.

Диагональ осевого сечения цилиндра равна $24\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости его основания под углом 30º. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.



Пусть дан цилиндр, прямоугольник *АВСД* – его осевое сечение, *АД* и *ВС* – диаметры соответственно нижнего и верхнего оснований. Точка *О* – центр нижнего основания, точка O_1 - центр верхнего основания. $OO_1 \subset (ABC)$, OO_1 - ось цилиндра, высота цилиндра.

$AB \perp AД$, *АД* проекция *ВД* на плоскость нижнего основания цилиндра, тогда $\angle ВДА$ – угол между диагональю *ВД* и плоскостью нижнего основания. По условию $ВД = 24\sqrt{3}$ см, $\angle ВДА = 30^o$. Из $\Delta ВАД$ ($\angle ВАД = 90^o$), $AB = \frac{1}{2}ВД$, $AB = \frac{1}{2}24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см) – по свойству катета, лежащего против угла 30º.

Используя теорему Пифагора $АД = \sqrt{ВД^2 - AB^2}$, $АД = \sqrt{1728 - 432} = 36$(см).

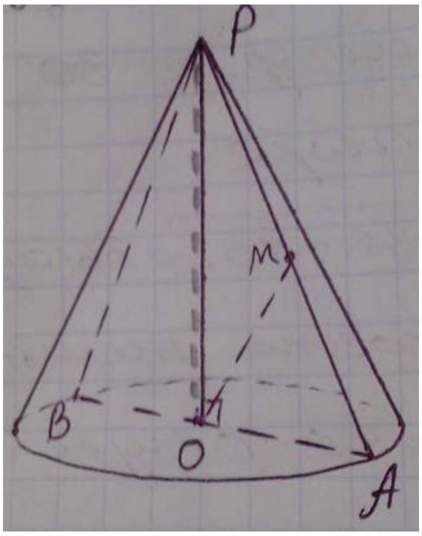
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = C \cdot H$, где *С* – длина окружности, *Н* – высота цилиндра. $H = AB = 12\sqrt{3}$ см, $S_{бок} = \pi d \cdot H$, $d = АД$, $S_{бок} = \pi АД \cdot AB$, $S_{бок} = \pi \cdot 36 \cdot 12\sqrt{3} = 432\pi\sqrt{3}(см^2)$.

Ответ: $432\pi\sqrt{3} см^2$.

Задача №3.

Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 6 см. Угол между образующей и плоскостью основания равен 60º. Найдите площадь осевого сечения.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, PO – ось конуса, PO - высота конуса. Построим осевое сечение конуса - равнобедренный ΔAPB, AB – диаметр основания конуса, PA=PB – образующие. Точка M – середина PA, OM – расстояние от центра основания конуса до середины образующей PA. По условию OM = 6 см. $PO \perp AB$, OA – проекция наклонной PA на плоскость основания конуса, тогда $\angle$PAO – угол между образующей и плоскостью основания конуса, $\angle$PAO = 60º.

Из ΔAPB, $\angle$PBA = $\angle$PAB = 60º, как углы при основании равнобедренного треугольника APB, значит ΔAPB равносторонний, PA = PB = AB.

Рассмотрим ΔPOA ($\angle$POA = 90º), точка M – середина гипотенузы PA, значит это центр окружности, описанной около ΔPOA, OM = AM = MB = R, где R – радиус описанной окружности. Тогда PA = 2OM, PA = 2·6 = 12 (см).

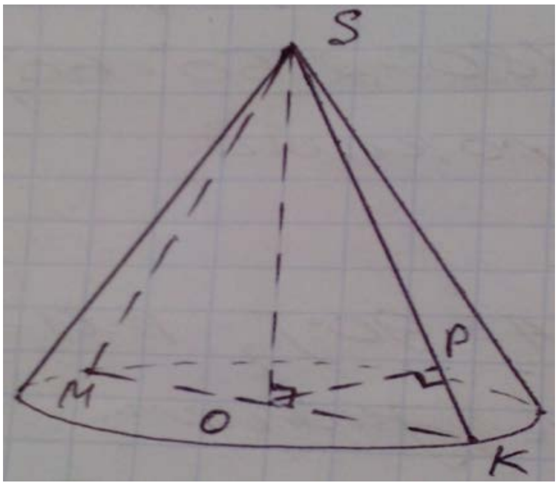
Площадь осевого сечения $S_{\Delta APB} = \frac{PA^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta APB} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ (см²).

Ответ: $36\sqrt{3} см^2$.

Задача №4.

Расстояние от центра основания конуса до образующей равно 3 см. Угол при вершине осевого сечения равен 120º. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, SO – ось конуса, SO - высота конуса. Построим осевое сечение конуса – равнобедренный ΔMSK, MK – диаметр основания конуса, SM=SK – образующие конуса, SO$\perp$MK. Опустим из точки O перпендикуляр на образующую SK, OP$\perp$SK, тогда OP – расстояние от центра основания конуса до образующей SK, OP = 3 см.

По условию $\angle$MSK = 120º - угол при вершине осевого сечения. В равнобедренном ΔMSK высота SO – биссектриса, медиана. $\angle$MSO = $\angle$KSO = 120º:2 = 60º. Тогда $\angle$SMK = $\angle$SKM = (180º - 120º):2 = 30º - как углы при основании равнобедренного треугольника.

Из ΔSPO ($\angle$SPO = 90º) SO = $\dfrac{OP}{\sin\angle PSO}$, SO = $\dfrac{3}{\sin 60^\circ}$ = $2\sqrt{3}$(см).

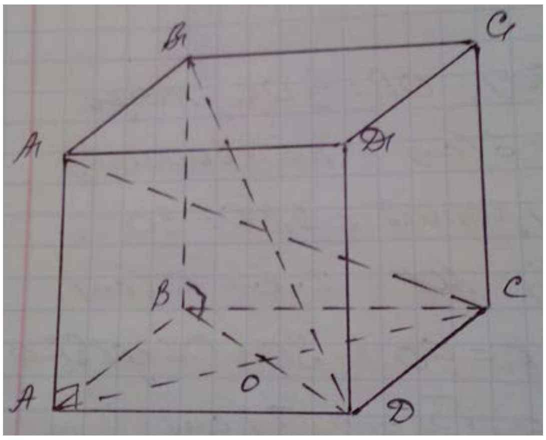
Из ΔSOK ($\angle$SOK = 90º) OK = SO· tg $\angle$KSO, OK = $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=6$ (см), тогда MK = 6·2 = 12 (см). Площадь осевого сечения конуса $S_{\Delta MSK}=\dfrac{1}{2}MK\cdot SO$,

$S_{\Delta MSK}=\dfrac{1}{2}12\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}(см^2)$.

Ответ: $12\sqrt{3}см^2$.

Задача №5. В основании прямой призмы лежит ромб с большей диагональю, равной $6\sqrt{3}$ см. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30°, меньшая - угол 45°. Найдите объем призмы.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямая призма, ромб АВСД – ее основание. Точка О – точка пересечение диагоналей ромба, $\angle$ А – острый, АС – большая диагональ ромба, ВД – меньшая диагональ ромба, АС > ВД. $AA_1 \perp (ABC)$, АС – проекция A_1C на плоскость основания, $BB_1 \perp (ABC)$, ВД – проекция $B_1Д$ на плоскость основания. Так как АС > ВД, то $A_1C > B_1Д$ по свойству наклонных и их проекций, т.е. A_1C - большая диагональ призмы. $\angle A_1CA$- угол, образованный большей диагональю призмы с плоскостью основания, $\angle B_1ДB$- угол, образованный меньшей диагональю призмы с плоскостью основания. По условию $\angle A_1CA$ =30°, $\angle B_1ДB$ = 45°.

Из ΔA_1AC, ($\angle A_1AC$ =90°) АС = $6\sqrt{3}$ см, $A_1A = AC \cdot tg\angle A_1CA$, $A_1A = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6(см)$,

$BB_1 = A_1A = 6см$.

В ΔB_1BD, ($\angle B_1B$D =90°), $\angle BB_1D$ = *90°- 45° = 45°*, значит ΔB_1BD - равнобедренный, $ВД$ = B_1B = 6 см.

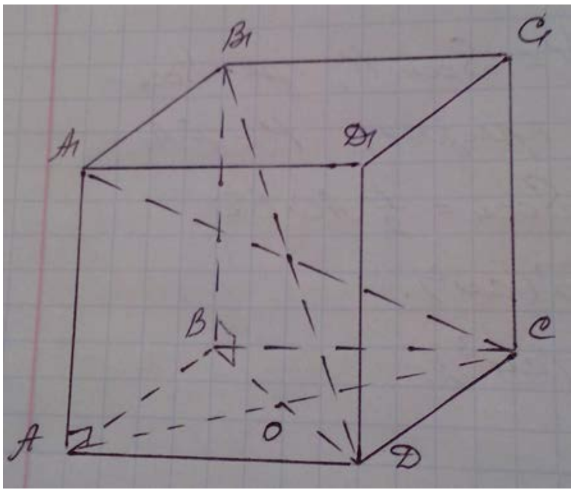
Объем призмы V = $S_{осн}\cdot H$, где $S_{осн}$ - площадь основания призмы, H = AA_1 - высота призмы. $S_{осн} = \frac{1}{2}AC\cdot BD$, $S_{осн} = \frac{1}{2}6\sqrt{3}\cdot 6 = 18\sqrt{3}(см^2)$. V = $18\sqrt{3}\cdot 6 = 108\sqrt{3}(см^3)$.

Ответ: $108\sqrt{3}см^3$.

Задача №6.

В основании прямой призмы лежит ромб. Большая диагональ призмы равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 30º, а меньшая образует с боковым ребром угол 45º. Найдите объем призмы.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямая призма, ромб АВСД – ее основание. Точка О – точка пересечение диагоналей ромба, $\angle$ A – острый, АС – большая диагональ ромба, ВД – меньшая диагональ ромба, $AC > ВД$. $AA_1 \perp (ABC)$, АС – проекция A_1C на плоскость основания, $BB_1 \perp (ABC)$, ВД – проекция $B_1Д$ на плоскость основания. Так как АС > ВД, то $A_1C > B_1Д$ по свойству наклонных и их проекций, значит A_1C - большая диагональ призмы, $\angle A_1CA$ - угол, образованный большей диагональю призмы и плоскостью основания. $\angle BB_1Д$ - угол, образованный меньшей диагональю призмы и плоскостью основания. По условию $\angle A_1CA$ =30º, $\angle BB_1Д$ = 45º. Из ΔA_1AC, ($\angle A_1AC$ =90º) A_1C = 12 см, $A_1A = \frac{1}{2} \cdot A_1C$, $A_1A = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(см)$ - по свойству катета, лежащего против угла 30º. BB_1 = AA_1 = 6 см.

Используя теорему Пифагора АС = $\sqrt{A_1C^2 - A_1A^2}$, АС = $\sqrt{144-36} = 6\sqrt{3}(см)$.

Из $\Delta B_1BД$, ($\angle B_1BД$ =90º), $\angle BДB_1 = 90^0 - 45^0 = 45^0$, $\Delta BB_1Д$ - равнобедренный, ВД = BB_1 = 6 см.

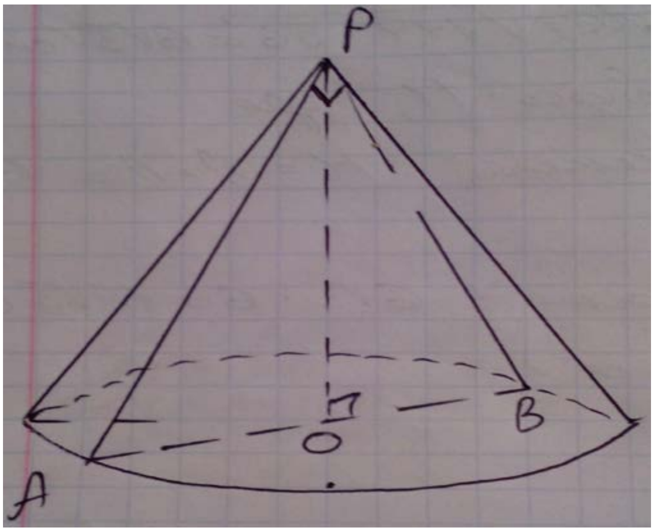
Объем призмы V = $S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ - площадь основания призмы, $H = AA_1$ - высота призмы. $S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $S_{осн} = \frac{1}{2} 6\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}(см^2)$. V = $18\sqrt{3} \cdot 6 = 108\sqrt{3}(см^3)$.

Ответ: $108\sqrt{3} см^3$.

Задача №7.

Осевое сечение конуса прямоугольный треугольник. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания конуса равен 5 см.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, PO – ось конуса, высота конуса. Построим сечение конуса – прямоугольный равнобедренный ΔAPB, $\angle APB = 90^o$, AB – диаметр основания конуса, PA=PB – образующие. OA = OB = 5 см (по условию) – радиусы основания конуса, AB = 2·OA, AB = 2·5 = 10 (см).

Так как ΔAPB – равнобедренный, $\angle PAB = \angle PBA = 45^o$, как углы при основании равнобедренного треугольника. PA = AB· cos$\angle$PAB, PA = 10· cos45º = 10· $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $5\sqrt{2}(см)$.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi Rl$, где R=OA = 5 см, l = PA = $5\sqrt{2}$ см.

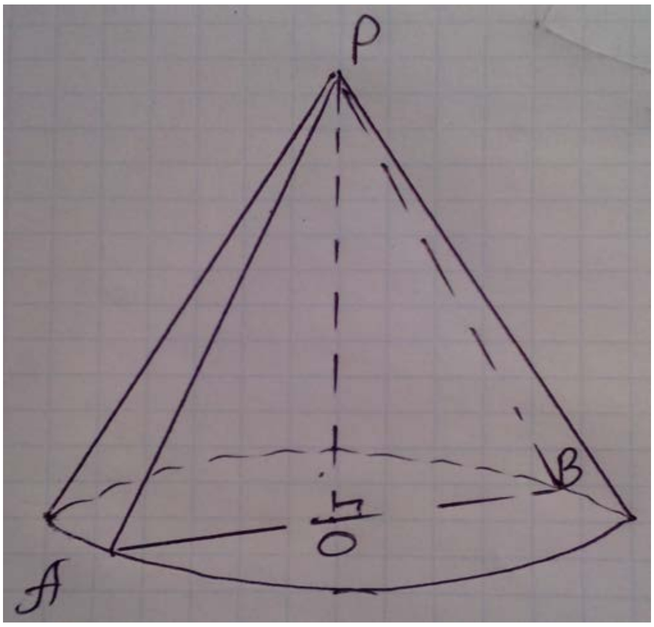
$S_{бок} = \pi 5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\pi\sqrt{2}$ (см²).

Ответ: $25\pi\sqrt{2}$ см².

Задача №8.

Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите объем конуса.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, PO – ось конуса, высота конуса. Построим сечение конуса – равносторонний ΔAPB, PA=PB=AB = 10 см (по условию). PA, PB – образующие конуса, PO$\subset$(APB), AB – диаметр конуса. AO=OB – радиусы основания, AO=OB $=\frac{1}{2}\cdot AB=5$(см).

Из ΔPOA ($\angle$POA=90º), используя теорему Пифагора PO=$\sqrt{PA^2-AO^2}$,

PO = $\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ (см).

Объем конуса $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot\text{PO}$, где $S_{\text{осн}}$ - площадь основания конуса. $S_{\text{осн}}$ = $\pi\cdot AO^2$,

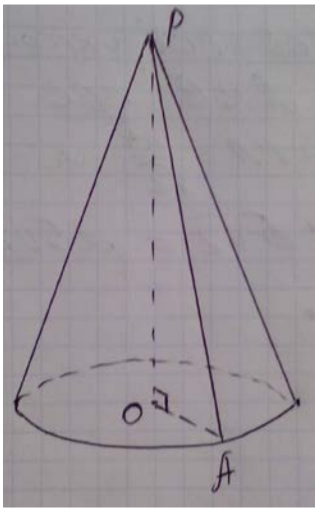
$S_{\text{осн}}=25\cdot\pi$ см². Тогда $V=\frac{1}{3}25\cdot\pi\cdot5\sqrt{3}=\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}(см^3)$.

Ответ: $\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}см^3$.

Задача №9.

Площадь боковой поверхности конуса равна 136π см², а его образующая равна 17 см. Найдите объем конуса.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, PO – ось конуса, высота конуса, PA – образующая, OA – радиус основания конуса.

По условию PA = 17 см, $S_{бок} = 136\pi см^2$. $S_{бок} = \pi Rl$, где R = OA, l = PA, $S_{бок} = \pi OA \cdot PA$,

отсюда OA = $\dfrac{S_{бок}}{\pi \cdot \mathrm{PA}}$, OA = $\dfrac{136\pi}{\pi \cdot 17} = 8(см)$.

Из ΔPOA, ($\angle$POA=90º), используя теорему Пифагора PO=$\sqrt{PA^2 - AO^2}$,

PO = $\sqrt{289-64} = 15$ (см).

Объем конуса $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot \mathrm{PO}$, где $S_{осн}$ - площадь основания конуса. $S_{осн}$ = $\pi \cdot OA^2$,

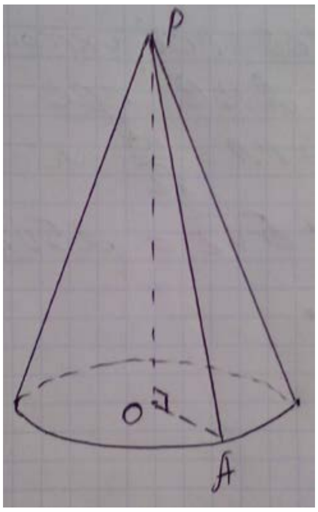
$S_{осн} = 64 \cdot \pi$ см². Тогда $V = \dfrac{1}{3} 64 \cdot \pi \cdot 15 = 320\pi (см^3)$.

Ответ: $320\pi см^3$.

Задача №10.

Площадь боковой поверхности конуса равна 65π см², а его образующая равна 13см. Найдите объем конуса.

Решение.



Пусть дан конус, точка O – центр его основания, PO – ось конуса, высота конуса, PA – образующая, OA – радиус основания конуса.

По условию PA = 13 см, $S_{бок} = 65\pi см^2$. $S_{бок} = \pi Rl$, где R = OA, l = PA, $S_{бок} = \pi OA \cdot PA$,

отсюда OA = $\dfrac{S_{бок}}{\pi \cdot \mathrm{PA}}$, OA = $\dfrac{65\pi}{\pi \cdot 13} = 5(см)$.

Из ΔPOA, ($\angle$POA=90º), используя теорему Пифагора PO=$\sqrt{PA^2 - AO^2}$,

PO = $\sqrt{169-25} = 12$ (см).

Объем конуса $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot \mathrm{PO}$, где $S_{осн}$ - площадь основания конуса. $S_{осн}$ = $\pi \cdot OA^2$,

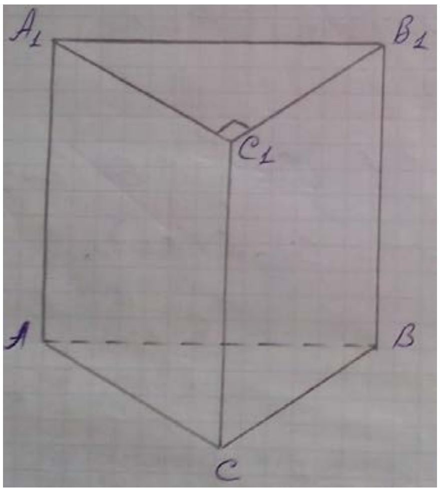
$S_{осн} = 25 \cdot \pi$ см². Тогда $V = \dfrac{1}{3} 25 \cdot \pi \cdot 12 = 100\pi (см^3)$.

Ответ: $100\pi см^3$.

Задача №11.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 5 см. Высота призмы равна радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Найти объем призмы.

Решение.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ - прямая треугольная призма. ΔABC – прямоугольный треугольник, ее основание, $\angle$ACB = 90º. По условию AB = 13 см, AC = 5 см. $AA_1 \perp (ABC)$, AA_1 - высота призмы. По условию AA_1 = r, где r – радиус окружности, вписанной в основание призмы.

Из ΔABC, ($\angle$ACB = 90º), используя теорему Пифагора CB = $\sqrt{AB^2 - AC^2}$, CB = $\sqrt{169-25} = 12(см)$. Радиус окружности, вписанной в ΔABC $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где $S_{\Delta ABC}$ - площадь треугольника, p – полупериметр треугольника, p = $\frac{1}{2}(13+12+5) = 15$(см), $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30(см^2)$, тогда $r = \frac{30}{15} = 2(см)$, AA_1=2см.

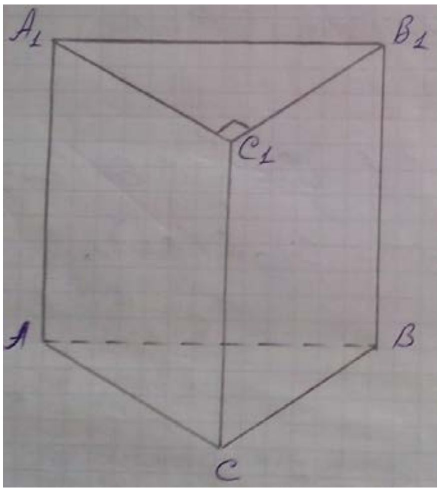
Объем призмы V = $S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ - площадь основания призмы, $H = AA_1$ - высота призмы. V = 30 · 2 = 60 (см²).

Ответ: 60 см².

Задача №12.

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 17 см и катетом 8 см. Высота призмы равна радиусу окружности, описанной около основания призмы. Найти объем призмы.

Решение.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ - прямая треугольная призма. ΔABC – прямоугольный треугольник, ее основание, $\angle$ACB = 90º. По условию AB = 17 см, AC = 8 см. $AA_1 \perp (ABC)$, AA_1 - высота призмы. По условию AA_1 = R, где R – радиус окружности, описанной около основания призмы.

Построим точку M – середину гипотенузы AB - это центр окружности, описанной около ΔABC, R = MA = MB $=\frac{1}{2}AB$, R = $\frac{17}{2}см.$

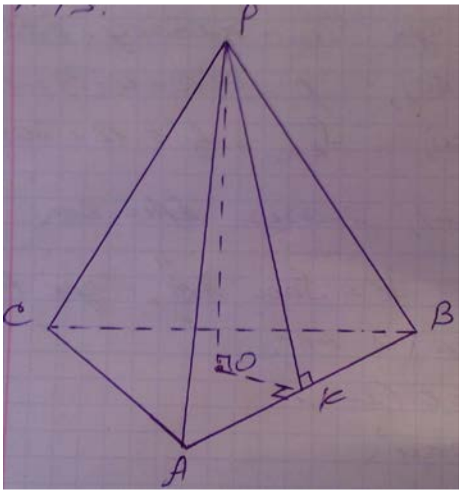
Из ΔABC, ($\angle$ACB = 90º), используя теорему Пифагора CB = $\sqrt{AB^2 - AC^2}$, CB = $\sqrt{289-64} = 15(см)$.

Объем призмы V = $S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ - площадь основания призмы, $H =$ AA_1 - высота призмы. $S_{осн}$ = $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB,$ $S_{осн}$ $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60(см^2).$ V = 60 $\cdot \frac{17}{2} = 510(см^2).$

Ответ: 510 см².

Задача 13. В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен $\sqrt{3}$ см. Апофема пирамиды равна $2\sqrt{7}$ см. Найдите объем пирамиды.

Решение.



Пусть дана правильная треугольная пирамида PABC, значит ее основание правильный треугольник ABC. Высота PO проходит через его центр, точку O. Точка O – центр вписанной окружности. Проведем апофему PK$\perp$AB, по условию PK = $2\sqrt{7}$ см. PO $\perp$(ABC), OK – проекция PK на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах AB $\perp$OK, значит OK – радиус окружности, вписанной в ΔABC, OK = r = $\sqrt{3}$ см по условию задачи. Так как ΔABC – правильный, AB = BC = CA, то $r = \dfrac{AB}{2tg\dfrac{180^0}{3}}$, AB = 2r·tg60º, AB = $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$=6 (см).

Из ΔPOK ($\angle$POK = 90º), используя теорему Пифагора PO = $\sqrt{PK^2 - OK^2}$, PO = $\sqrt{28-3}$= 5 (см).

Объем пирамиды V=$\dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$, где $S_{\text{осн}}$ - площадь основания, т.е. площадь правильного треугольника ABC, H=PO=5см. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}(\text{см}^2)$. V = $\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 5 = 15\sqrt{3}(см^3)$.

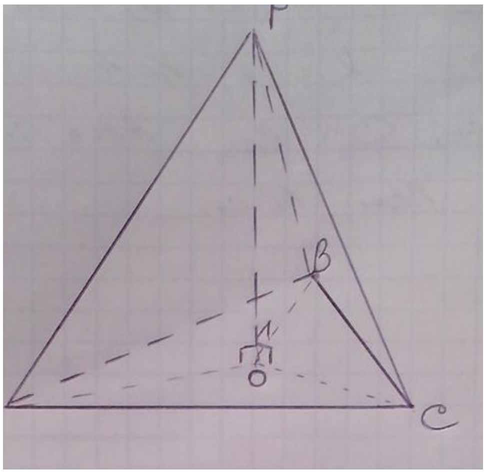
Ответ: $15\sqrt{3}см^3$.

Задача 14. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно $\sqrt{37}$ см. Найдите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен $2\sqrt{3}$ см.

Решение.

P

A



Пусть дана правильная треугольная пирамида PABC, значит ее основание правильный треугольник ABC. Высота PO проходит через его центр, точку O. Точка O – центр описанной окружности, OA = OB = OC = R, где R – радиус описанной окружности. По условию задачи R = $2\sqrt{3}$ см. Боковые ребра правильной пирамиды равны, PA = PB = PC и по условию задачи равны $\sqrt{37}$ см.

Так как в основании пирамиды лежит правильный треугольник, то R = $\dfrac{AB}{2\sin\frac{180^0}{3}}$ = $\dfrac{AB}{\sqrt{3}}$, откуда AB = $\sqrt{3}\cdot R$, AB = $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$=6 (см).

Объем пирамиды V=$\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$, где $S_{\text{осн}}$ - площадь основания, т.е. площадь правильного треугольника ABC, H – высота, H = PO.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{36\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}(см^2)$.

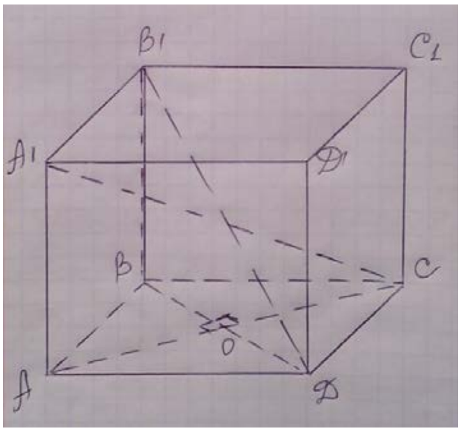
Из ΔPOA, ($\angle$POA = 90º), используя теорему Пифагора PO = $\sqrt{PA^2-OA^2}$, PO = $\sqrt{35-12}$= 5 (см).

V = $\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 5=15\sqrt{3}(см^3)$.

Ответ: $15\sqrt{3}см^3$.

Задача 15. Основание прямой призмы – ромб с диагоналями 10 см и 24 см. Меньшая диагональ призмы равна 26см. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямая призма, ромб АВСД – ее основание. Точка О – точка пересечение диагоналей ромба, $\angle$ А – острый, АС – большая диагональ ромба, ВД – меньшая диагональ ромба, $AC > ВД$. $AA_1 \perp (ABC)$, АС – проекция A_1C на плоскость основания, $BB_1 \perp (ABC)$, ВД – проекция $B_1Д$ на плоскость основания. Так как АС > ВД, то $A_1C > B_1Д$ по свойству наклонных и их проекций, значит $B_1Д$ - меньшая диагональ призмы. По условию задачи АС = 24 см, ВД = 10 см, $В_1$Д = 26 см.

Площадь полной поверхности призмы $S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности призмы, $S_{осн}$ – площадь основания.

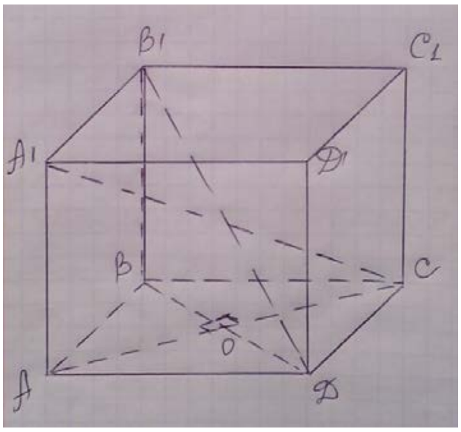
$S_{осн} = \dfrac{1}{2} AC \cdot ВД$, $S_{осн} = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120(см^2)$. $S_{бок} = P \cdot H$, где Р – периметр основания призмы, Н – высота, Н=$ВВ_1$. Рассмотрим ромб АВСД, по свойству диагоналей ромба АО = $\dfrac{1}{2}AC$, АО = 12см, ВО = $\dfrac{1}{2}ВД$, ВО = 5 см. Из ΔАОВ, ($\angle$АОВ = 90º), используя теорему Пифагора АВ = $\sqrt{AO^2 + BO^2}$, АВ = $\sqrt{144+25}$ = 13 (см). Периметр ромба Р = 4·13=52 (см).

Из ΔВ$В_1$Д, ($\angle В_1$ВД=90º), используя теорему Пифагора $ВВ_1 = \sqrt{B_1Д^2 - ВД^2}$, $ВВ_1 = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24(см)$. Тогда $S_{бок} = 52 \cdot 24 = 1248(см^2)$, $S_{пол} = 1248 + 2 \cdot 120 = 1488(см^2)$.

Ответ: $1488 см^2$.

Задача 16. Основание прямой призмы – ромб с диагоналями 16 см и 30 см. Большая диагональ призмы равна 50 см. Вычислите площадь полной поверхности призмы.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямая призма, ромб АВСД – ее основание. Точка О – точка пересечение диагоналей ромба, $\angle$А – острый, АС – большая диагональ ромба, ВД – меньшая диагональ ромба, $AC > ВД$. $AA_1 \perp (ABC)$, АС – проекция A_1C на плоскость основания, $BB_1 \perp (ABC)$, ВД – проекция $B_1Д$ на плоскость основания. Так как АС > ВД, то $A_1C > B_1Д$ по свойству наклонных и их проекций, значит A_1C - большая диагональ призмы. По условию задачи АС = 30 см, ВД = 16 см, A_1C = 50 см.

Площадь полной поверхности призмы $S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности призмы, $S_{осн}$ – площадь основания.

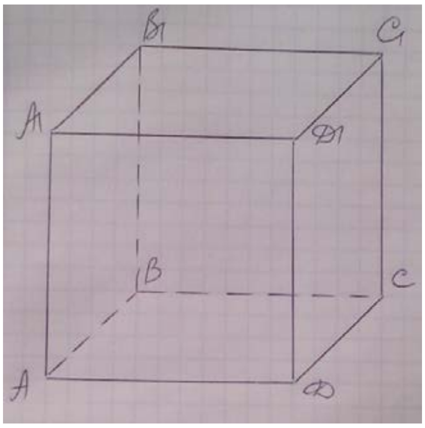
$S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot ВД$, $S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = 240 (см^2)$. $S_{бок} = P \cdot H$, где Р – периметр основания призмы, Н – высота, Н=AA_1. Рассмотрим ромб АВСД, по свойству диагоналей ромба АО = $\frac{1}{2}AC$, АО = 15 см, ВО = $\frac{1}{2}ВД$, ВО = 8 см. Из ΔАОВ, ($\angle$АОВ = 90º), используя теорему Пифагора АВ = $\sqrt{AO^2 + BO^2}$, АВ = $\sqrt{225+64}$ = 17 (см). Периметр ромба Р = 4·17 = 68 (см).

Из ΔAA_1C, ($\angle A_1Ac$=90º), используя теорему Пифагора $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2}$, $AA_1 = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 (см)$. Тогда $S_{бок} = 68 \cdot 40 = 2720 (см^2)$, $S_{пол} = 2720 + 2 \cdot 240 = 3200 (см^2)$.

Ответ: $3200 см^2$.

Задача 17. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат, равна 264см². Найдите сторону основания параллелепипеда, если его высота равна 8 см.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед, боковые ребра перпендикулярны основанию и равны, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = ДД_1$. Основание квадрат АВСД. У параллелепипеда все грани - равные прямоугольники, поэтому площадь полной поверхности параллелепипеда $S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ - площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ - площадь основания.

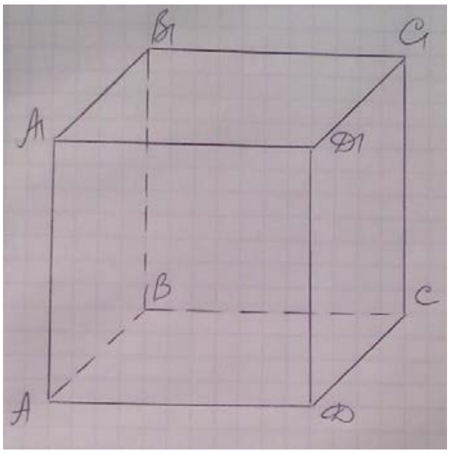
По условию $S_{пол} =$ 264 см², высота AA_1=8 см. $S_{бок}$ = 4АВ· AA_1, $S_{осн}$=АВ², тогда $S_{пол}$ =4АВ· AA_1 + 2 АВ² = 4АВ·8 + 2АВ² = 264 см². Получим уравнение 2АВ² + 32АВ – 264 = 0, АВ² + 16АВ – 132 = 0, АВ = $\frac{-16+\sqrt{256+528}}{2} = 6$ (см) или АВ = $\frac{-16-\sqrt{256+528}}{2} = -22$ (см), так как по условию задачи АВ>0, то АВ = 6 см.

Ответ: 6 см.

Задача №18.

В прямоугольном параллелепипеде его измерения относятся как 1:2:3. Полная поверхность параллелепипеда равна 352 см². Найдите его измерения.

Решение.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед, боковые ребра перпендикулярны основанию и равны, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = ДД_1$. Основание прямоугольник АВСД. У параллелепипеда противоположные грани - равные прямоугольники, поэтому площадь полной поверхности параллелепипеда $S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн}$, где $S_{бок}$ - площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ - площадь основания.

По условию измерения прямоугольного параллелепипеда $АД:ДС:АА_1$=1:2:3.

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда АД = 1x, ДС = 2x, $АА_1$ = 3x.

$S_{пол} = 2АД \cdot AA_1 + 2ДС \cdot AA_1 + 2АД \cdot ДС = 2(АД \cdot AA_1 + ДС \cdot AA_1 + АД \cdot ДС)$,

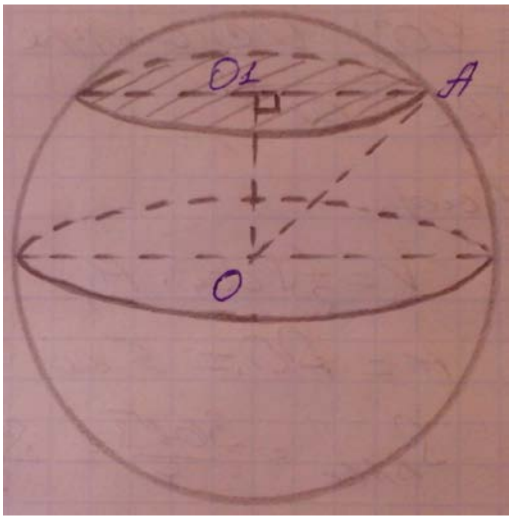
$S_{пол} = 2(1x \cdot 3x + 2x \cdot 3x + 1x \cdot 2x) = 22x^2$, по условию $S_{пол} = 352см^2$. Тогда $22x^2 = 352$, x=4 (x>0). Тогда АД = 4 см, ДС=2·4=8 см, $АА_1$=3·4=12 см.

Ответ: 4см, 8см, 12см.

Задача №19.

Длина линии пересечения сферы и плоскости равна 10πсм. Радиус сферы равен 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости сечения.

Решение.



Пусть дана сфера с центром в точке О. Сечение сферы плоскостью – окружность с центром в точке O_1. Так как центр O_1 этой окружности есть основание опущенного перпендикуляра OO_1 на плоскость сечения, то OO_1 - расстояние от центра сферы до заданной плоскости сечения.

По условию длина окружности $C = 2\pi O_1A$, где O_1A – радиус окружности с центром в O_1, $2\pi O_1A = 10\pi$, $O_1A = 5$ см.

Проведем радиус сферы ОА = R, где А – точка, принадлежащая окружности сечения. По условию ОА = 13 см.

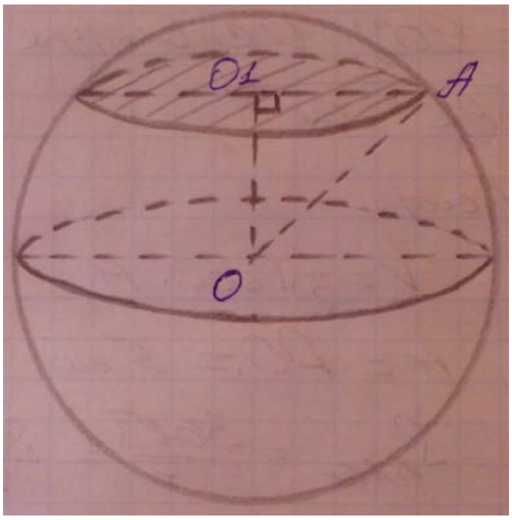
Из ΔOO_1A ($\angle OO_1A = 90^o$), используя теорему Пифагора $OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2}$, $OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Задача №20.

Площадь сечения шара плоскостью равна 64πсм². Радиус шара равен 17 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

Решение.



Пусть дан шар с центром в точке O. Сечение шара плоскостью – круг с центром в точке O_1. Так как центр O_1 этого круга есть основание опущенного на него перпендикуляра OO_1, то OO_1 - расстояние от центра шара до заданного сечения. По условию площадь сечения $S_{сеч} = 64\pi см^2$.

Проведем радиус OA = R, где A – точка, принадлежащая окружности сечения. По условию OA = 17 см.

Площадь сечения $S_{сеч} = \pi r^2$, где r = O_1A – радиус круга с центром в O_1. По условию $S_{сеч} = 64\pi см^2$, значит $\pi O_1A^2 = 64\pi$, O_1A^2=64, O_1A= 5 см (O_1A>0).

Из ΔOO_1A ($\angle OO_1A$ = 90º), используя теорему Пифагора OO_1 = $\sqrt{OA^2 - O_1A^2}$, $OO_1 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

Ответ: 15 см.