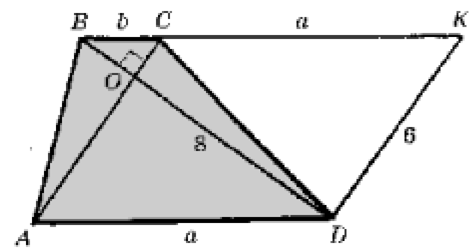
В трапеции диагонали длиной 6 см и 8 см взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

Способ 1.



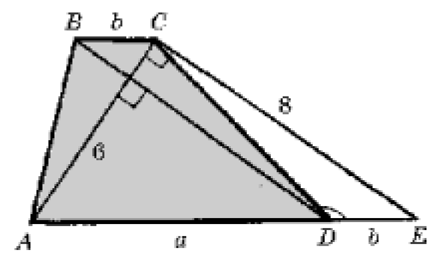
1. Продолжим *BC* вправо. Проведем *DK* || *AC*. Так как *ACKD* – параллелограмм, то *DK* = 6 см.
2. *BD* ^ *DK*, так как *BD* ^ *AC*. D *BDK* – прямоугольный.

$$BK = \sqrt{BD^2 + DK^2};$$
$$BK = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (см)}.$$

3. *BK* = *BC* + *AD*. Средняя линия равна половине *BK*, т. е. 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 2 (похожий на способ 1).



Проведем *CE* || *BD* до пересечения с продолжением *AD*. *DE* = *BC*, так как *DBCE* – параллелограмм. *AE* вычислим по теореме Пифагора из D *ACE* (*CE* || *BD*, но *BD* ^ *AC*, следовательно, *CE* ^ *AC*):

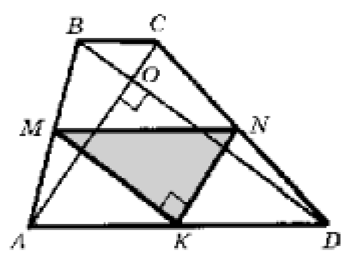
$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2};\ AE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

AE = *a* + *b*. Но средняя линия равна $\frac{a+b}{2}$,

т. е. равна 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 3.



1. *MN* – средняя линия трапеции. Проведем *MK* || *BD* и соединим точки *N* и *K*.

2. *NK* – средняя линия D *ACD*, следовательно, $NK = \frac{1}{2}AC;\ NK = 3 \text{ (см)}.$

3. *MK* – средняя линия D *ABD*, следовательно, $MK = \frac{1}{2}BD;\ MK = 4 \text{ (см)}.$

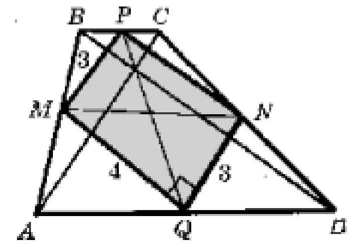
4. Р *MKN* = Р *AOD* как углы с соответственно параллельными сторонами.

5. D *MNK* – прямоугольный. $MN = \sqrt{MK^2 + NK^2};\ MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см)}.$

Ответ: 5 см.

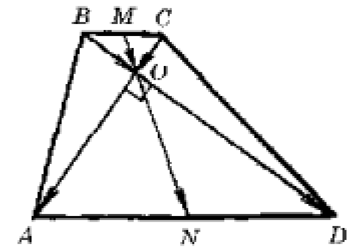
Способ 4.

Соединим середины сторон трапеции. Легко доказать, что *MPNQ* – параллелограмм с прямым углом, т. е. прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Диагонали его *MN* = *PQ* = 5 см (египетский треугольник).



Ответ: $MN = 5$ см.

Способ 5 (с использованием векторного аппарата).



Пусть точки M и N – середины сторон BC и AD. Можно доказать, что $\overline{ON} = k\overline{MO}$,

т. е. векторы коллинеарны и точки M, O, N лежат на одной прямой. Известно, что

$$+\begin{array}{l}\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{BO} + \overline{CO}) \\ \overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OD})\end{array}$$

$$\overline{MO} + \overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{BO} + \overline{CO} + \overline{OA} + \overline{OD})$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{BD}),$$

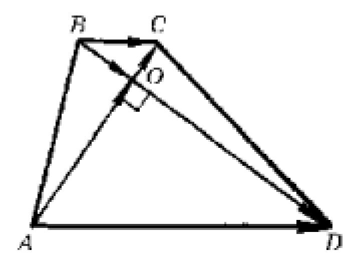
$$\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{CA}^2 + \underbrace{2\,\overline{CA}\cdot\overline{BD}\,\cos 90^\circ}_{0} + \overline{BD}^2\right)$$

$$MN^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 8^2) = 25,\ MN = 5.$$

Используя предыдущий способ, легко показать, что MN равно длине средней линии в этой трапеции.

Ответ: 5 см.

Способ 6 (с использованием векторного аппарата).



$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD},$$

$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC}.$$

Сложим эти равенства почленно:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AO} + \underbrace{\overline{OD} + \overline{BO}} + \overline{OC},$$

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD},\ (\overline{AD} + \overline{BC})^2 = (\overline{AC} + \overline{BD})^2,$$

$$\overline{AD}^2 + 2\overline{AD}\cdot\overline{BC}\cos 0^\circ + \overline{BC}^2 =$$

$$= \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cos 90^\circ + \overline{BD}^2,$$

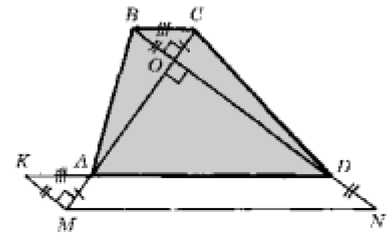
$$(AD + BC)^2 = AC^2 + BD^2;\ (AD + BC)^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

$$AD + BC = 10.$$

Но средняя линия равна полусумме AD и BC, т. е. 5 см.

Ответ: 5 см.

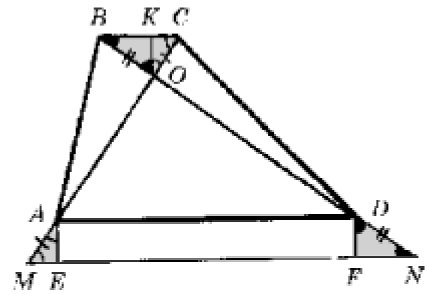
Способ 7.



1. Продолжим CA на расстояние $AM = CO$. Через точку M проведем $MN \parallel AD$. BD З $MN = N$.
2. D OMN – прямоугольный, $OM = 6$ см, $ON = 8$ см. Следовательно, $MN = 10$ см (теорема Пифагора).
3. Проведем $MK \parallel ND$. Продолжим AD до пересечения с MK. D MAK = D BOC (по I признаку), следовательно, $AK = BC$.
4. $MKDN$ – параллелограмм, $DK = MN = 10$ см. Но $DK = AD + BC$. Значит, средняя линия равна 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 8.



Продолжим AC за точку A так, что $AM = OC$. Продолжим BD за точку D так, что $DN = BO$. Итак, D OMN – прямоугольный с катетами 6 см и 8 см. По теореме Пифагора $MN = 10$ см. Проведем AE ^ MN, DF ^ MN, OK ^ BC.

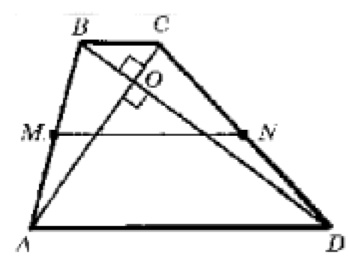
$$\left.\begin{array}{l}\Delta\, AME = \Delta\, KOC \\ \Delta\, DFN = \Delta\, BKO\end{array}\right\}$$ **по стороне и двум прилежащим к ней углам.**

Следовательно, $ME = KC$ и $FN = BK$, т. е. $MN = AD + BC = 10$ (см).

Средняя линия равна $\dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{10}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

Способ 9.



Пусть $OC = x$, $BO = y$; тогда $AO = 6 - x$, $DO = 8 - y$. MN – средняя линия.

1. Из подобия D BOC и D AOD имеем:

$$\frac{x}{6 - x} = \frac{y}{8 - y},$$
$$8x - xy = 6y - xy,$$
$$8x = 6y,\ y = \frac{4}{3}x.$$

2. Из прямоугольного треугольника BOC имеем: $BC = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}x.$

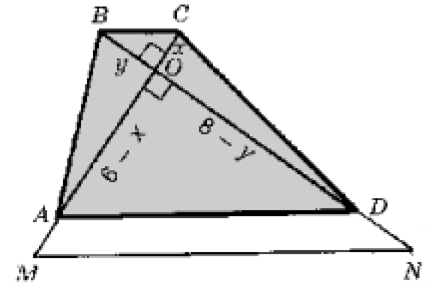
3. Из подобия D BOC и D AOD имеем:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO},\ \frac{\frac{5}{3}x}{AD} = \frac{x}{6 - x},$$
$$AD = \frac{5}{3}(6 - x) = 10 - \frac{5}{3}x.$$

4. $$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{\frac{5}{3}x + 10 - \frac{5}{3}x}{2} = 5.$$

Ответ: 5 см.

Способ 10.



1. Из подобия D *BOC* и D *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}$, $y = \frac{4}{3}x$.

2. Продолжим диагонали на отрезки, равные *CO* и *BO*.

3. Из D *MON*: *MN* = 10 см.

4. D *AOD* подобен D *MON*; $MN = \frac{4}{3}AD,\ AD = \frac{3}{4}MN = \frac{3}{4}\cdot 10 = 7{,}5\ (\text{см}).$

5. В D *BOC*: $BC = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \frac{5}{3}x.$

6. D *BOC* подобен D *AOD*.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO},\ \frac{\frac{5}{3}x}{7{,}5} = \frac{x}{6-x};$$

$$10x - \frac{5}{3}x^2 = 7{,}5x,$$

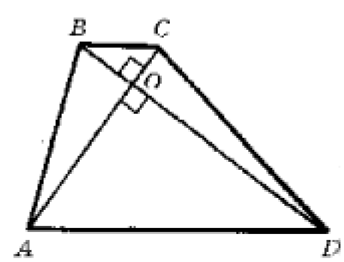
$$2{,}5x = \frac{5}{3}x^2;\ 7{,}5 = 5x;\ x = 1{,}5\ (\text{см}).$$

7. $BC = \frac{5}{3}x = \frac{5}{3}\cdot 1{,}5 = 2{,}5\ (\text{см}).$

8. Средняя линия равна $\frac{AD + BC}{2} = \frac{7{,}5 + 2{,}5}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

Способ 11.



Пусть $a = \frac{AD + BC}{2}$ – средняя линия.

OC = *x*, *BO* = *y*, *OA* = 6 – *x*, *OD* = 8 – *y*. Из подобия D *BOC* и D *AOD*:

$$\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y};\ \ y = \frac{4}{3}x;$$

$$BC = \frac{5}{3}x.$$

Пусть *x* < 3 (половины *AC*).

$$AD = \sqrt{(6-x)^2 + (8-y)^2} =$$
$$= \sqrt{36 - 12x + x^2 + 64 - 16y + y^2} =$$
$$= \sqrt{100 + x^2 - 12x + \frac{16}{9}x^2 - \frac{64}{3}x} =$$
$$= \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 100}\ ;\ \frac{AD + BC}{2} = a\,.$$
$$\frac{\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 100} + \frac{5}{3}x}{2} = a,$$
$$\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 100} = 2 \ - \frac{5}{3}x.$$

Возведем в квадрат:

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 100 = 4a^2 - \frac{20}{3}ax + \frac{25}{9}x^2,$$
$$4a^2 - \frac{20}{3}ax + \frac{100}{3}x - 100 = 0 \mid \cdot 3$$
$$12a^2 - 20ax + 100x - 300 = 0 \mid : 4$$

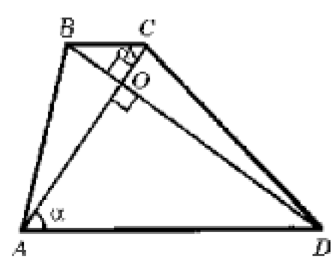
$3a^2 - 5ax + 25x - 75 = 0$. Решим относительно a:

$$D = (5x)^2 - 4\cdot 3(25x - 75) =$$
$$= 25x^2 - 300x + 900 = 25(x^2 - 12x + 36),$$
$$a_{1,2} = \frac{5x \pm 5(x-6)}{6},$$

$$a_1 = \frac{10x - 30}{6} = \frac{5}{3}x - 5 < 0 \text{ – не подходит},$$
$$a_2 = \frac{5x - 5x + 30}{6} = 5.$$

Ответ: 5 см.

Способ 12 (тригонометрический).



1. Из подобия D *BOC* и D *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}$, $y = \frac{4}{3}x.$

2. D *BOC* – прямоугольный. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{3}x}{x} = \frac{4}{3}.$

3. Найдем cos a либо по формуле $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, либо методом треугольника: $\cos\alpha = \frac{3}{5}.$

4. Из D *BOC*: $\frac{OC}{BC} = \cos\alpha$, $BC = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{x\cdot 5}{3} = \frac{5}{3}x.$

5. Из D *AOD*:

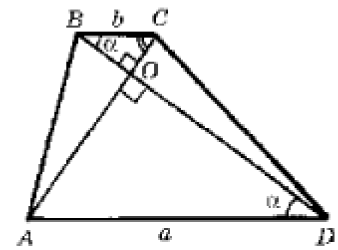
$$\frac{AO}{AD} = \cos\alpha, \quad AD = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{6-x}{\frac{3}{5}} = \frac{5(6-x)}{3}.$$

6. Средняя линия равна . $\frac{AD+BC}{2}$.

$$\frac{AD+BC}{2} = \frac{\frac{5(6-x)}{3} + \frac{5}{3}x}{2} = \frac{10 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x}{2} = 5.$$

Ответ: 5 см.

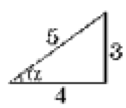
Способ 13 (тригонометрический).



1. Из подобия треугольников *BOC* и *AOD*: $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}$, $y = \frac{4}{3}x$.

2. $\frac{x}{6-x} = \frac{b}{a}$, , $ax = 6b - bx$, $(a+b)x = 6b$, $\frac{a+b}{2} = \frac{3b}{x}$, $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{\sin\alpha}$.

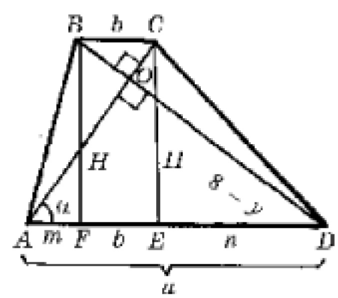
3. $\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{x}{\frac{4}{3}x} = \frac{3}{4}$, $\alpha = \mathbf{arctg}\,\frac{3}{4}$.

4. $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$ $\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}}{\sin\,\alpha = ?}\right.$ 

$\left.\sin\,\alpha = \frac{3}{5}\right)$.

Ответ: 5 см.

Способ 14.



1. $\frac{x}{6-x} = \frac{y}{8-y}$, $y = \frac{4}{3}x$, $\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$.

2. Из D *ACE*:

$$AE = \sqrt{6^2 - H^2}\text{; из } \Delta\ DBF\text{:}$$
$$FD = \sqrt{8^2 - H^2}.$$

3. $AE + FD = \sqrt{36 - H^2} + \sqrt{64 - H^2} = m + b + n + b = a + b.$

Средняя линия $\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{36 - H^2} + \sqrt{64 - H^2}}{2}$.

4. Из D *ACE*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{H}{\sqrt{36 - H^2}}, \quad \frac{H}{\sqrt{36 - H^2}} = \frac{4}{3},$$

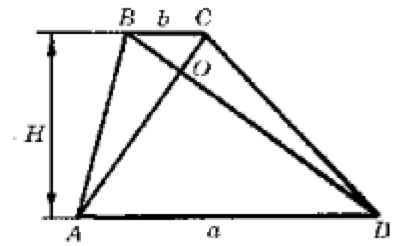
$$3H = 4\sqrt{36 - H^2}, \quad 9H^2 = 16 \cdot 36 - 16H^2,$$

$$25H^2 = 16 \cdot 36, \quad H^2 = \frac{16 \cdot 36}{25}, \quad H = \frac{4 \cdot 6}{5} = 4{,}8.$$

5. Подставив в (*), находим $\frac{a + b}{2} = \frac{\sqrt{6^2 - 4{,}8^2} + \sqrt{8^2 - 4{,}8^2}}{2} = \frac{3{,}6 + 6{,}4}{2} = 5.$

Ответ: 5 см.

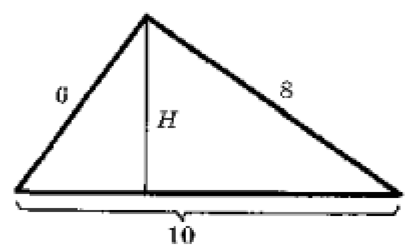
Способ 15.



1. $S_{трап} = \frac{1}{2}d_1d_2,$ так как диагонали *d*1 ^ *d*2. $S_{трап} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см²).

2. $S_{трап} = \frac{a + b}{2} \cdot H.$

H – высота не только трапеции, но и прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Находим



$$\frac{1}{2} \cdot 10H = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8,$$

H=4,8

3. $\frac{a + b}{2} = \frac{S_{трап}}{H}, \quad \frac{a + b}{2} = \frac{24}{4{,}8} = 5.$

Ответ: 5 см.

Г. Домкина, Т. лаптева,
школа №№ 713, Москва