«Способы и методы решения задач с параметрами»

Автор: Сурина Зоя Петровна
учитель математики государственного бюджетного общеобразовательного учреждения средней общеобразовательной школы №1106 Юго-Западного округа города Москвы

Цель данной работы – изучение различных способов решения задач с параметрами. Возможность и умение решать задачи с параметрами демонстрируют владение методами решения уравнений и неравенств, осмысленное понимание теоретических сведений, уровень логического мышления, стимулируют познавательную деятельность. Для развития этих навыков необходимы длительнее усилия, именно поэтому в профильных 10-11 классах с углублённым изучением точных наук введен курс: «Математический практикум», частью которого является решение уравнений и неравенств с параметрами. Курс входит в число дисциплин, включенных в компонент учебного плана школы.

Успешному изучению методов решения задач с параметрами могут помочь элективный или факультативный курсы, или компонент за сеткой по теме: «Задачи с параметрами».

Рассмотрим четыре больших класса задач с параметрами:

1. Уравнения, неравенства и их системы, которые необходимо решить для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих определённому множеству.
2. Уравнения, неравенства и их системы, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра.
3. Уравнения, неравенства и их системы, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения (системы, неравенства) имеют заданное число решений.
4. Уравнения, неравенства и их системы, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Методы решений задач с параметрами.

1. **Аналитический метод.**
   Это способ прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Пример 1. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение: $(2a-1)x^2+ax+(2a-3)=0$ имеет не более одного корня.

Решение:

При $2a-1=0$ данное уравнение квадратным не является, поэтому случай $a=\frac{1}{2}$ разбираем отдельно.

Если $a=\frac{1}{2}$, то уравнение принимает вид $\frac{1}{2}x-2=0$, оно имеет один корень.

Если $a \neq \frac{1}{2}$, то уравнение является квадратным; чтобы оно имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был неположителен:

$D = a^2 - 4(2a-1)(2a-3) = -15a^2 + 32a - 12$;

$$-15a^2 + 32a - 12 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \dfrac{16+2\sqrt{19}}{15} \\ a \le \dfrac{16-2\sqrt{19}}{15} \end{array}\right., \qquad (1)$$

Чтобы записать окончательный ответ, необходимо понять, удовлетворяет ли $a = \frac{1}{2}$ условию (1), а для этого надо сравнить числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{16-2\sqrt{19}}{15}$.

$\frac{1}{2} > \frac{16-2\sqrt{19}}{15}$. Очевидно, что $\frac{1}{2} < \frac{16+2\sqrt{19}}{15}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$.

2. **Графический метод.**

В зависимости от задачи (с переменной *x* и параметром *a*) рассматриваются графики в координатной плоскости (*x;y*) или в плоскости (*x;a*).

Пример 2. Для каждого значения параметра a определите количество решений уравнения $\left|x^2 - 7|x| + 6\right| = a$.

Решение:

Заметим, что количество решений уравнения $\left|x^2 - 7|x| + 6\right| = a$ равно количеству точек пересечения графиков функций $y = \left|x^2 - 7|x| + 6\right|$ и $y = a$.

График функции $y = x^2 - 7x + 6 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ показан на рис.1.

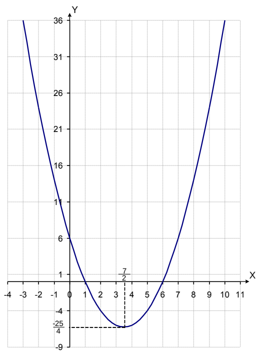

Рис.1

График функции $y = x^2 - 7|x| + 6$ на рис.2.

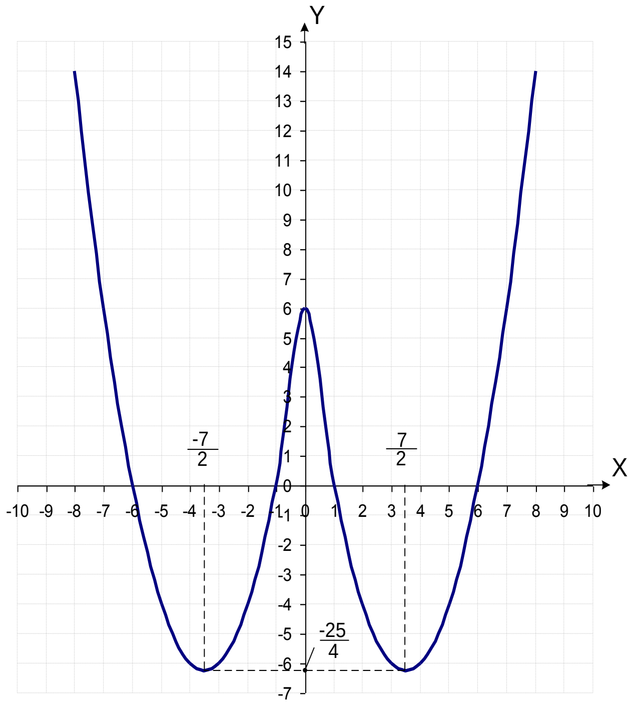

Рис.2

График функции $y = \left| x^2 - 7|x| + 6 \right|$ на рис.3.

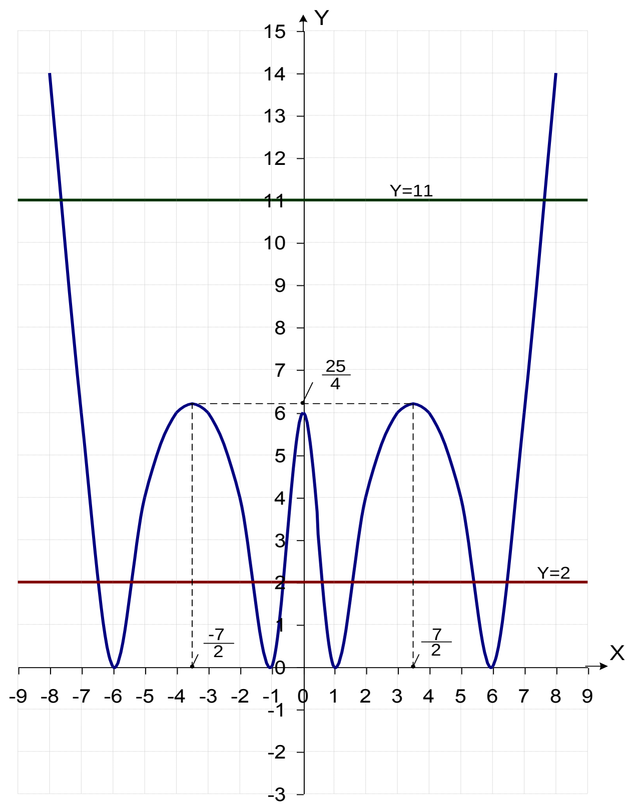

Рис.3

$y = a$ - это горизонтальная прямая. По графику несложно установить количество точек пересечения в зависимости от a (например, при a =11 – две точки пересечения; при a =2 – восемь точек пересечения).

Ответ: при $a < 0$ - решений нет; при $a = 0$ и $a = \frac{25}{4}$ - четыре решения; при $0 < a < 6$ - восемь решений; при $a = 6$ - семь решений; при $6 < a < \frac{25}{4}$ - шесть решений; при $a > \frac{25}{4}$ - два решения.

3. Метод решения относительно параметра.

При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение становится более простым. После упрощений нужно вернуться к исходному смыслу переменных *x* и *a* и закончить решение.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

Решение:

Будем решать это уравнение заменой переменных. Пусть $\sqrt{x-8} = t$, $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 8$ и уравнение примет вид $at^2 + t + 5a - 2 = 0$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти все *a*, при которых уравнение $at^2 + t + 5a - 2 = 0$ имеет единственное неотрицательное решение. Это имеет место в следующих случаях.

1) Если *a* = 0, то уравнение имеет единственное решение $t = 2$.

2) Если $a \neq 0$ и $D = 1 - 20a^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow a \in (-0{,}1;0{,}5)$, то имеем единственное неотрицательное решение, если корни разных знаков, т.е.

$$t_1 t_2 = \frac{5a-2}{a} \leq 0 \Leftrightarrow a \in \left(0;\frac{2}{5}\right].$$

(При $a = \frac{2}{5}$ получаем $t_1 = 0,\ t_2 = -\frac{1}{a} < 0$).

3) Если $a \neq 0$ и $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -0{,}1 \Rightarrow t = 5 \\ a = 0{,}5 \Rightarrow t = -1 \end{array}\right.$,

то одно неотрицательное решение имеем при *a* = -0,1.

Ответ: $\{-0{,}1\} \cup [0;0{,}4]$.

Решение некоторых типов уравнений и неравенств с параметрами.

Задачи с параметрами помогают в формировании логического мышления, в приобретении навыков исследовательской деятельности.

Решение каждой задачи своеобразно и требует к себе индивидуального, нестандартного подхода, поскольку не существует единого способа решения таких задач.

I. Линейные уравнения.

Задача №1. При каких значениях параметра *b* уравнение

$9x + b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b+\sqrt{3})$ не имеет корней?

Решение:

$9x + b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b+\sqrt{3})$,

$b^2 - (2-\sqrt{3})b - \sqrt{3} - \sqrt{3} + b^2(b+\sqrt{3}) = b^4 x - 9x$,

$b^2 - 2b - \sqrt{3}b - 2\sqrt{3} + b^3 + b^2\sqrt{3} = b^4x - 9x$,
$\left(b^2 + \sqrt{3}b\right) - 2\left(b + \sqrt{3}\right) + b^2\left(b + \sqrt{3}\right) = \left(b^2 - 3\right)\left(b^2 + 3\right)x$,
$\left(b + \sqrt{3}\right)\left(b - 2 + b^2\right) = \left(b^2 - 3\right)\left(b^2 + 3\right)x$.
Разложим на множители $b^2 + b - 2$.
$b^2 + b - 2 = 0$
D = 1 +8 = 9
$b_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = 1; -2$
$\left(b + \sqrt{3}\right)\left(b - 1\right)\left(b + 2\right) = \left(b + \sqrt{3}\right)\left(b - \sqrt{3}\right)\left(b^2 + 3\right)x$
При $b = -\sqrt{3}$ $\quad 0 \cdot x = 0 \quad x \in R$.
При $b = \sqrt{3}$ $\quad 0 \cdot x = (b-1)(b+2)\left(b + \sqrt{3}\right)$ - решений нет.
Ответ: При $b = \sqrt{3}$.

II. Степенные уравнения, неравенства и их системы.

Задача №2. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства:

$\dfrac{25 - (a+10)x}{x^2} < \dfrac{5a}{x^2}\left(\dfrac{5}{x} - 2\right) - 1$ содержит число 6, а также содержит два отрезка длиной 6, не имеющие общих точек.
Решение:
$$\frac{25 - (a+10)x}{x^2} < \frac{5a}{x^2}\left(\frac{5}{x} - 2\right) - 1.$$
Преобразуем обе части неравенства.

$$\frac{25}{x^2} - \frac{a}{x} - \frac{10}{x} < \frac{25a}{x^3} - \frac{10a}{x^2} - 1,$$
$$-\frac{25}{x^2} + \frac{a}{x} + \frac{10}{x} + \frac{25a}{x^3} - \frac{10a}{x^2} - 1 > 0,$$
$$\frac{25}{x^2}\left(\frac{a}{x} - 1\right) - \frac{10}{x}\left(\frac{a}{x} - 1\right) + \frac{a}{x} - 1 > 0,$$
$$\left(\frac{a}{x} - 1\right)\left(\frac{25}{x^2} - \frac{10}{x} + 1\right) > 0.$$
Полученное неравенство равносильно системе:
$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} - 1 > 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - a}{x} < 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$$
Для того, чтобы множество решений неравенства содержало число 6, необходимо и достаточно выполнение условия: $\dfrac{6 - a}{6} < 0 \Leftrightarrow a > 6$

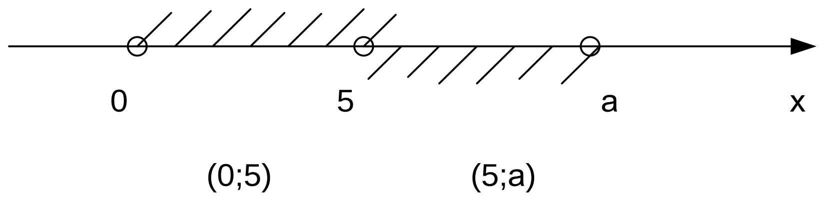

Рис.4

При $a > 6$ множество решений неравенства: $(0;5)\cup(5;a)$.

Интервал $(0;5)$ не может содержать ни одного отрезка длины 6. Значит, два непересекающихся отрезка длины 6 должны содержаться в интервале $(5;a)$. Это выполняется при $a > 5+6+6 \Leftrightarrow a > 17$.

Ответ: $(17;+\infty)$.

III. Показательные уравнения, неравенства и системы.

Задача №3. В области определения функции $y=\left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)^{-0{,}5}$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найти все значения, при которых такая сумма будет больше 5, но меньше 10.

Решение:

1) Графиком дробно-линейной функции $z=\dfrac{5x+2}{x+2}$ или $z=5-\dfrac{8}{x+2}$ является гипербола. По условию $x>0$. При неограниченном возрастании x дробь $\dfrac{8}{x+2}$ монотонно убывает и приближается к нулю, а значения функции z возрастают и приближаются к 5. Кроме того,

$z(0)=1$.

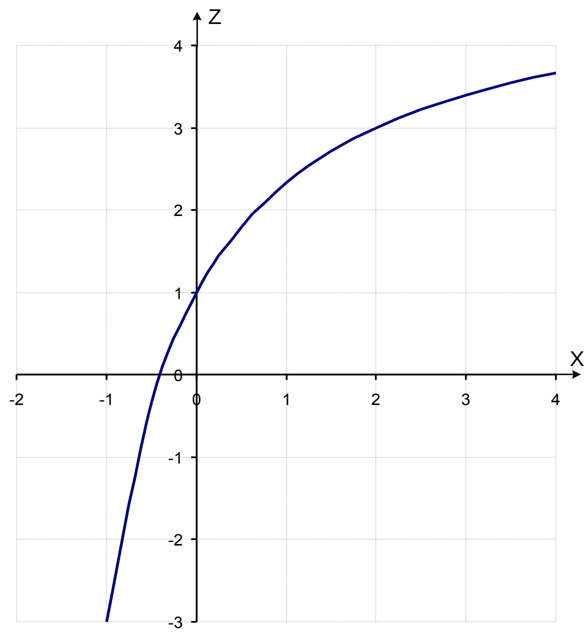

Рис.5

2) По определению степени область определения *D(y)* состоит из решений неравенства $a^a > \mathrm{a}^{\frac{5x+2}{x+2}}$. При $a=1$ получаем неравенство, у которого решений нет. Поэтому функция y нигде не определена.

3) При $0 < a < 1$ показательная функция с основанием a убывает и неравенство $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$ равносильно неравенству $a < \dfrac{5x+2}{x+2}$. Так как $x > 0$, то $z(x) > z(0) = 1$. Значит, каждое положительное значение x является решением неравенства $a < \dfrac{5x+2}{x+2}$. Поэтому для таких a указанную в условии сумму нельзя найти.

4) При $a > 1$ показательная функция с основанием a возрастает и неравенство $a^a > a^{\frac{5x+2}{x+2}}$ равносильно неравенству $a > \dfrac{5x+2}{x+2}$. Если $a \geq 5$, то любое положительное число является его решением, и указанную в условии сумму нельзя найти. Если $1 < a < 5$, то множество положительных решений – это интервал $(0; x_0)$, где $a = z(x_0)$.

5) Целые числа расположены в этом интервале подряд, начиная с 1. Вычислим суммы последовательно идущих натуральных чисел, начиная с 1 : 1; 1+2 = 3; 1+2+3 = 6; 1+2+3+4 = 10;… Поэтому указанная сумма будет больше 5 и меньше 10, только если число 3 лежит в интервале $(0; x_0)$, а число 4 не лежит в этом интервале. Значит, $3 < x_0 \leq 4$. Так как $z = \dfrac{5x+2}{x+2}$ возрастает на $a \in [3;4]$, то $z(3) < z(x_0) \leq z(4)$.

Поэтому $\dfrac{5 \cdot 3 + 2}{3+2} < a \leq \dfrac{5 \cdot 4 + 2}{4+2}$, т.е. $a \in \left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{22}{6}\right]$.

Ответ: $\left(3{,}4; \dfrac{11}{3}\right]$.

IV. Уравнения, неравенства и системы, содержащие модули.

Задача № 1. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2ay - a^2 + 1 \\ y + a \leq |x| \end{cases}$$ имеет ровно два решения ?

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + (y^2 - 2ay + a^2) \leq 1 \\ y + a \leq |x| \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + (y-a)^2 \leq 1 \\ y + a \leq |x| \end{cases}$$

Решением первого неравенства является все точки внутри окружности (с границей) радиусом 1 с центром в точке А$(0; a)$. Множество решений второго неравенства – часть плоскости, лежащая под графиком функции $y = |x| - a$. Чтобы система имела ровно два решения, окружность должна касаться графика в двух точках (рис.18).

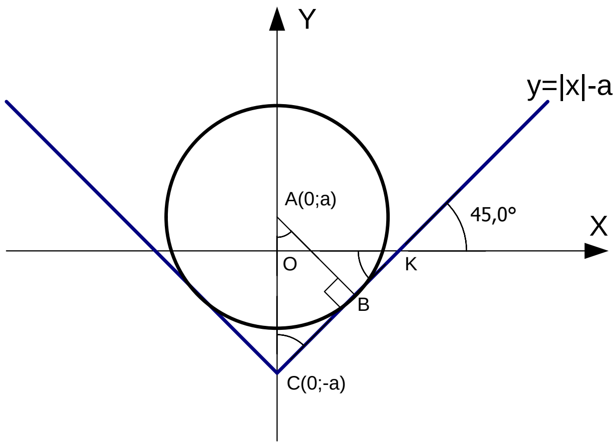

Рис.6

Так как угловой коэффициент графика функции $y = |x| - a$ равен 1, то угол наклона графика равен arctg1, т.е. 45° Так как радиус окружности, опущенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\angle$ ABC = 90°. $\angle$OKC = 45° , $\angle$KOC = 90° , значит, $\angle$BAC = 45° . Тогда CB = AB = 1 (как радиус единичной окружности).

По теореме Пифагора из треугольника ABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 2$

$AC = \sqrt{2}$

Очевидно, что $a = 0{,}5AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

V. Иррациональные уравнения, неравенства и системы.

Задача № 2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых среди решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ нет ни одной точки отрезка $[7;96]$.

Решение:

Сначала решим неравенство при всех значениях параметра, а потом найдем те из них, для которых среди решений нет ни одной точки отрезка $[7;96]$. Пусть $t = \sqrt{ax} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = t^2 \\ t \geq 0 \end{cases}$. При такой замене переменных ОДЗ неравенства выполняется автоматически.

Видно, что *x* можно выразить через *t*, если $a \neq 0$. Поэтому случай, когда *a* = 0, рассмотрим отдельно.

1) Пусть *a* = 0, тогда $x + 4a > 5\sqrt{ax} \Leftrightarrow x > 0$, и заданный отрезок является решением.

2) Пусть $a \neq 0$, тогда $x = \frac{t^2}{a}$ и неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ примет вид

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 \end{cases}.$$

Теперь видно, что решение неравенства зависит от знака *a*, поэтому придется рассматривать два случая:

а) Если $a > 0$, то

$$\frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{t}^2 - 5at + 4a^2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{t} \in [0; \mathrm{a}) \cup (4a; +\infty),$$

или, в старых переменных,

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{ax} < a \Leftrightarrow 0 \leq x < a, \\ \sqrt{ax} > 4a \Leftrightarrow x > 16a. \end{array}\right.$$

Решение не содержит ни одной точки заданного отрезка $[7;96]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} a \leq 7, \\ 16a \geq 96 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [6;7].$$

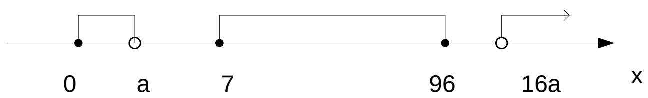

Рис.7

б) Если $a < 0$, то

$$\frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{t}^2 - 5at + 4a^2 < 0 \Leftrightarrow \mathrm{t} \in (4a; a) \Leftrightarrow t \in \varnothing,$$

Т.к. $t \geq 0$.

Ответ: $[6;7]$.

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа.

По статистике многие из выпускников не приступают к решению задач с параметрами на ЕГЭ. По данным ФИПИ всего 10% выпускников приступают к решению таких задач, и процент их верного решения невысок: 2-3%, поэтому приобретение навыков решения трудных, нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, учащимися школ по-прежнему остается актуальным.