Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория вероятности

Д. В. Агеев

Теория вероятности

16 октября 2016 г.

Об авторе

Агеев Дмитрий Владимирович — преподаватель подготовительных курсов ФГБОУ ВПО КемГУ.
E-mail: ageev-dmitrijj@rambler.ru

Содержание

Литература

- ЕГЭ-2016: Математика: 30 вариантов / под ред. И. В. Ященко. 2016
- Математика: учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. 2010

Классическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Классическое определение вероятности

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

Классическое определение вероятности

Пример. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. НВТЧ вынутый шар окажется чёрным.

Классическое определение вероятности

Решение.

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через A. Общее число случаев $n = 5 + 3 = 8$. Число случаев m, благоприятствующих появлению события A, равно 3. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Ответ: 0,375.

Задача 1

В коробке 10 синих шаров, 2 красных шара и 8 зеленых. НВТЧ взятый наугад шар будет зеленым.

Решение

Общее число различных исходов есть $n = 10 + 2 + 8 = 20$. Число благоприятствующих исходов равно $m = 8$. Соласно классичесому определению вероятностей:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{8}{20} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

Задача 2 [2015]

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достанется один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Решение

Первый способ (классическое определение вероятности): $\frac{23}{25} = 0,92$.
Второй способ: $1 - \frac{2}{25} = 0,92$.

Ответ: 0,92.

Задача 3 [2015]

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 из Норвегии. Порядок выступления спортсменов определяется жребием. НВТЧ спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Решение

В данном случае нет разницы, когда выступит спортсмен из Швеции: $\frac{9}{4+7+9+5} = 0,36$.

Ответ: 0,36.

Задача 4 [2015]

Перед началом первого тура чемпионата по бамбинтону участников разбивают на игровые пары слуайным образом. Всего частвуют 26 спортсменов, среди которых 10 россиян, в том числе Руслан. НВТЧ в первом туре Руслан будет играть с бамбинтонистом из России?

Решение

Руслан может сыграть с 9 россиянами из 25 спортсменов. Значит искомая вероятность равна $\frac{9}{25} = 0,36$.

Ответ: 0,36.

Число сочетаний

Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$, тогда сочетаниями из n элементов по k называются такие наборы элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, 0! = 1$ — факториал числа n.

Другими словами число сочетаний из n по k — это число способов выбрать k элементов из n, не обращая внимание на порядок следования элементов.

Задача 5 (Число сочетаний)

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение

Обозначим событие, состоящее в появлении двух черных шаров через A. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из $12 + 8 = 20$ по 2:

$$n = C_{20}^2 = 190.$$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет

$$m = C_8^2 = 28.$$

Решение

Отсюда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{28}{190} = 0,147.$$

Ответ: $0,147$.

Задача 6 (Число сочетаний)

В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение

Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5, то есть

$$n = C_{18}^{5} = 8568.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных.

Решение

Число способов выборки двух бракованных деталей их 4 имеющихся бракованных равно

$$C_4^2 = 6.$$

Число способов выборки трёх качественных деталей из 14 имеющихся качественных деталей равно

$$C_{14}^3 = 364.$$

Решение

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Отсюда искомая вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} = 0,255.$$

Ответ: 0,255.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность $P(A_1A_2...A_n)$ совместного появления нескольких независимых друг от друга событий $A_1, ..., A_n$ с вероятностями $P(A_1), ..., P(A_n)$ вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. НВТЧ сумма выпавших очков на двух игральных кубиках равна 12.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ хотя бы одного из нескольких попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$ с вероятностями $P(A_1), \ldots, P(A_n)$ вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Пример. НВТЧ сумма выпавших очков на двух игральных кубиках равна 7.

Задача 7

В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. НВТЧ два наудачу вынутых шара окажутся чёрными.

Решение

Ответ: .

Задача 8

В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – 5 белых и 3 черных шара. Из каждой урны вынимают по шару. НВТЧ оба шара чёрные.

Решение

Ответ: .

Задача 9 [2015]

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9,
если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов,
из них только 4 пристрелянные.

Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение

ВТЧ Джон возьмет пристреленный пистолет и промахнется равна $\frac{4}{10} \cdot (1 - 0,9) = 0,04$. ВТЧ Джон возьмет непристрелянный пистолет и промахнется равна $\frac{6}{10} \cdot (1 - 0,3) = 0,42$. Поскольку нас устроит хотя бы одно из двух событий, то искомая вероятность равна $0,04 + 0,42 = 0,46$.

Ответ: 0,46.

Задача 10

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 9 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 4 очка, если проигрывает — 0 очков.

Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение

Ответ: .

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события (гипотезы) $B_1, \dots, B_n$ образуют полную группу событий, то есть

$$P(B_1) + \dots + P(B_n) = 1$$

и при наступлении каждого из них, например B_i, событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P(A|B_i)$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

— формула полной вероятности.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}.$$

Задача 11

На склад поступили детали с трёх станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором — 35% и на третьем 25%, причём на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором — 80% и на третьем — 70%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

Решение

Введём следующие обозначения: B_i — деталь изготовлена на i-м станке $(i = 1, 2, 3)$, A — деталь оказалась первого сорта. Из условия следует, что $P(B_1) = 0,4$, $P(B_2) = 0,35$, $P(B_3) = 0,25$, $P(A|B_1) = 0,9$, $P(A|B_2) = 0,8$ и $P(A|B_3) = 0,7$.

Решение

Следовательно,
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,815.$

Ответ: 0,815.

Задача 12

В первом ящике имеются 8 белых и 6 чёрных шаров, а во втором — 10 белых и 4 чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар — чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

Решение

Введём обозначения: B_i — был выбран i-й ящик ($i = 1, 2$); A — при проведении двух последовательных испытаний выбора ящика и выбора шара был вынут чёрный шар. Тогда

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Решение

Вероятность извлечения чёрного шара после того, как выбран первый ящик, равна

$$P(A|B_1) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Вероятность извлечения чёрного шара после того, как выбран второй ящик, равна

$$P(A|B_2) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Решение

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что вынутый шар оказался чёрным:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + (B_2) \cdot P(A|B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}.$$

Решение

Искомая вероятность вычисляется по формуле Байеса:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{5}{14}} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом их которых вероятность появления события A равна p, наступит ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Задача 13

Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет $p = 0,8$. Найти вероятность четырёх попаданий при шести выстрелах.

Решение

Воспользуемся формулой Бернулли. Здесь $n = 6$, $k = 4$, $p = 0,8$. По формуле Бернулли находим

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0,8^4 \cdot (1 - 0,8)^{6-4} = 0,246.$$

Ответ: 0,246.

Различные задачи

Различные задачи

Задача 14 ([1] B1 №4)

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. НВТЧ решка выпадет все три раза.

Решение

Ответ: 0,125.

Задача 15 ([1] B2 №4)

В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. НВТЧ орёл выпадет ровно 2 раза.

Решение

Ответ: 0,375.

Задача 16 ([1] В3 №4)

В классе 21 шестиклассник, среди них два друга — Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. НВТЧ Митя и Петя окажутся в одной группе.

Решение

Ответ: 0,3.

Задача 17 ([1] B4 №4)

Игральную кость бросают дважды. НВТЧ оба раза выпало число, большее 3.

Решение

Ответ: 0,25.

Задача 18 ([1] B5 №4)

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. НВТЧ решка не выпадет ни разу.

Решение

Ответ: 0,25.

Задача 19 ([1] B6 №4)

При артеллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена.

Вероятность уничтожения цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение

Ответ: 4.

Задача 20 ([1] B7 №4)

На фабрике керамической посуды 30% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. НВТЧ случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение

Ответ: 0,85.