Школьный тур Всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс.

Задача 1. В волшебном саду выросло 2013 яблок. Сколько в этом саду яблонь, если на каждой яблони яблок выросло поровну и в этом саду все яблони разного сорта, которых меньше 30, но больше 10. (7б)

Задача 2. Дан квадрат ABCD и равносторонний треугольник ADM. Отрезок CM пересекает отрезок AD в точке K. Найдите угол AKM. (7б)

Задача 3. Найдите все двузначные числа, каждое из которых в сумме с числом, написанном теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. (7б)

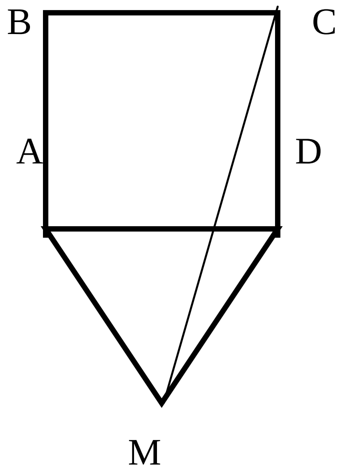
Задача 4. Однажды Гулливер подслушал разговор дежуривших около него четырёх лилипутов. Первый сказал второму «Ты лгун». Третий сказал первому «Сам ты лгун». Четвёртый сказал первому и третьему «Оба вы лгуны». Четвёртый сказал второму «И ты тоже лгун». Известно, что одни лилипуты всё время лгут, а другие говорят правду. Кто же прав? (7б)

Задача 5. Барон Мюнхгаузен говаривал как-то, что есть два числа, у которых сумма, произведение и частное одинаково. Докажите, что барон как всегда прав. (7б)

Ответы. Краткие решения 8 класс.

Задача 1. Ответ: 11 яблонь. Решение: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$

Задача 2. Ответ: 75°. Решение:



∟CDM=60°+90°=150° ;

∟KCD=(180°-150°):2=15°

∟CKD=90°-15°=75°

∟AKM=∟CKD

∟AKM=75°

Задача 3. Ответ: 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92. Решение:

$\overline{ab} = 10a + b; \quad \overline{ba} = 10b + a; \quad \overline{ab} + \overline{ba} = 11a + 11b = 11(a + b)$, значит a+b=11.

Задача 4. Ответ: Первый и четвёртый лгуны, а второй и третий говорят правду. Решение: допустим первый сказал правду, тогда второй и третий лгуны, что противоречит высказываниям четвёртого. Допустим первый лгун, тогда второй и третий говорят правду, а четвёртый лгун.

Задача 5. Ответ: 0,5 и -1. Решение:

$$x + y = xy = \frac{x}{y} \qquad .xy = \frac{x}{y}; \quad xy^2 - x = 0; \quad x(y^2 - 1) = 0;$$

$$x = 0 \ \textit{неподходит} \quad y = \pm 1, \textit{если} \ \ y = 1, \textit{то} \ \ x + 1 = x \ \ - \textit{нет решения}$$

$$\textit{если} \ \ y = -1, \ \textit{то} \ \ x - 1 = -x.; \quad 2x = 1; \quad x = 0{,}5$$

9 класс.

1. Сравните числа $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$ и 10. (7баллов)

2. Известно, что $OA_1=1$, $A_1A_2=1$ и $\angle OA_1A_2=90^\circ$; $A_2A_3=1$, $\angle OA_2A_3=90^\circ$; $A_3A_4=1$, $\angle OA_3A_4=90^\circ$; и т.д. (рис. 1). Тогда длина отрезка OA_{2009} равна…(7баллов)

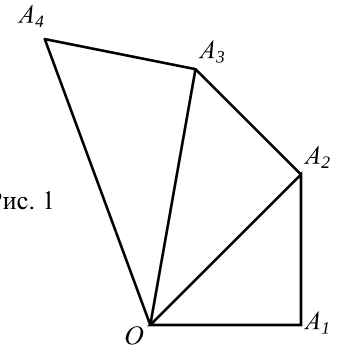


Рис. 1

3. Витя задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Витя? (7баллов)

4. Решить неравенство: $\sqrt{2x^2-8x+6}+\sqrt{4x-x^2-3}<x-1$.(7баллов)

5. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было? (7баллов)

Решения 9 класс

1. Сравните числа $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$ и 10.

Решение. Возведем оба числа в квадрат, так они оба положительны:

$$\left(\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}\right)^2=28-10\sqrt{3}+2\sqrt{28-10\sqrt{3}}\cdot\sqrt{28+10\sqrt{3}}+28+10\sqrt{3}=$$

$$=56+2\sqrt{28^2-\left(10\sqrt{3}\right)^2}=56+2\sqrt{784-300}=56+2\sqrt{484}=56+2\cdot 22=100;$$

$10^2=100$. Так как равны квадраты положительных чисел, значит, равны и сами числа.

Ответ: числа равны.

2. Известно, что $OA_1=1$, $A_1A_2=1$ и $\angle OA_1A_2=90^\circ$; $A_2A_3=1$, $\angle OA_2A_3=90^\circ$; $A_3A_4=1$, $\angle OA_3A_4=90^\circ$; и т.д. (рис. 1). Тогда длина отрезка OA_{2009} равна…

Решение.По теореме Пифагора, имеем,

$OA_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$OA_3=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

$OA_4=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$OA_5=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ и т. д.

$OA_{2009}=\sqrt{2008+1}=\sqrt{2009}$

Ответ: $\sqrt{2009}$.

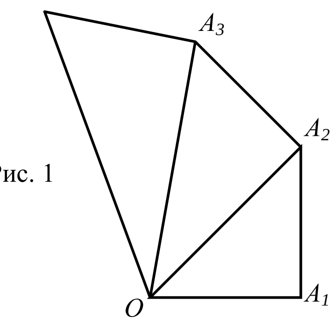


Рис. 1

3. Витя задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Витя?

Решение.Запишем условие в следующем виде: a + b = a · b = a : b. Из второго равенства a · b = a : b получаем, что b2 = 1, т.е b = +1 или b = -1. Рассмотрим первое равенство a + b = a · b. При b = 1 оно не имеет решений (1 = 0). При b = -1 получаем a = 0,5.

a + b = 0,5 — 1 = — 0,5

a · b = 0,5 · (-1) = — 0,5
a : b = 0,5 : (-1) = — 0,5

4. Решить неравенство: $\sqrt{2x^2-8x+6}+\sqrt{4x-x^2-3}<x-1$.

   Решение. Заметим, что все решения исходного неравенства существуют, если подкоренные выражения неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии x2 – 4x + 3 = 0. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.

5. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

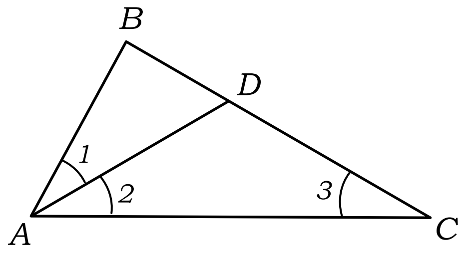
   Решение. Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

10 класс

1. Делится ли $13^{13}+13^{14}+13^{15}$ на 61? (7баллов)
2. Решить уравнение $\left(x^2+x\right)^2+\left|x^2+x\right|-2=0$.(7баллов)
3. Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2*см* больше стороны AB, а AC = 5*см*. Найти AB и BC. (7баллов)
4. При каких значениях *a* разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3? (7баллов)
5. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение $a_2\cdot a_9=147$. Найти прогрессию, если она является возрастающей. (7баллов)

Решения 10 класс

1. Делится ли $13^{13}+13^{14}+13^{15}$ на 61?
Решение.
Разложить заданное число на множители. Тогда, получим $13^{13}+13^{14}+13^{15}=$
$=13^{13}(1+13+169)=13^{13}\cdot 183=13^{13}\cdot 3\cdot 61$ – делится на 61.
2. Решить уравнение $\left(x^2+x\right)^2+\left|x^2+x\right|-2=0$.
Решение.
Обозначив $\left|x^2+x\right|=t$, где $t>0$, получим $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=1$, ($t_2=-2$ – не подходит). Далее, решая $\left|x^2+x\right|=1$, получим уравнения $x^2+x-1=0$ и $x^2+x+1=0$ (не имеет действительных корней), находим из первого уравнения $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Ответ. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
3. Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2*см* больше стороны AB, а AC = 5*см*. Найти AB и BC.
Решение.



Проведем биссектрису AD. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. В ΔADC $AD = DC$. Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle 1 = \angle 3$).

Из подобия имеем: $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$,

или $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+2-y}{x}=\dfrac{y}{5}$.

Для нахождения x и y получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{y}{5},\\ \dfrac{x+2-y}{x}=\dfrac{y}{5};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=xy+2y,\\ 5x+10-5y=xy.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $5y-10=2y$, откуда $y=\frac{10}{3}$, тогда $x=4$.

значит $AB = 4см$, $BC = 6см$.

II способ. Указание: применить теорему синусов.

Ответ. $AB = 4см$, $BC = 6см$.

4. При каких значениях *a* разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3?

Решение. I способ:

Пусть $x_1-x_2=3$, откуда $x_1=x_2+3$, тогда согласно т. Виета имеем: $x_1+x_2=-\frac{1}{a}$,

$x_1x_2=-\frac{2}{a}$.

Составим систему уравнений $\begin{cases} x_2+3+x_2=-\frac{1}{a}, \\ (x_2+3)x_2=-\frac{2}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-\frac{1+3a}{2a}, \\ \left(-\frac{1+3a}{2a}+3\right)\left(-\frac{1+3a}{2a}\right)=-\frac{2}{a}; \end{cases}$

$$\left(-\frac{1+3a}{2a}\right)^2-\frac{3+9a}{2a}+\frac{2}{a}=0; \quad \frac{1+6a+9a^2}{4a^2}-\frac{3+9a-8a}{2a}=0; \quad \frac{1+6a+9a^2-6a-18a^2+8a}{4a^2}=0;$$

откуда получим $a=1$, $a=-\frac{1}{9}$.

II способ:

$D=1+8a$, $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a}$, где $a\ge-\frac{1}{8}$, тогда

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}-\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a}\right|=\left|\frac{-1+\sqrt{1+8a}+1+\sqrt{1+8a}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{1+8a}}{a}\right|=3,$$

решая последнее, получим $a=1$, $a=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $a=1$, $a=-\frac{1}{9}$.

5. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение $a_2\cdot a_9=147$. Найти прогрессию, если она является возрастающей.

Решение. $S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot10=\frac{2a_1+9d}{2}\cdot10=5(2a_1+9d)=140$, откуда $a_1+a_{10}=28$

$a_2+a_9=a_1+d+a_{10}-d=a_1+a_{10}=28$, получили систему:

$$\begin{cases} a_2+a_9=28, \\ a_2\cdot a_9=147; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2=28-a_9, \\ (28-a_9)\cdot a_9=147; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2=28-a_9, \\ {a_9}^2-28a_9+147=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_9=7, \\ a_9=21; \end{array}\right. \\ a_2=28-a_9; \end{cases}$$

Т.к. прогрессия возрастает, то $a_2=7$, $a_9=21$, следовательно, $d=\frac{a_9-a_2}{9-2}=\frac{21-7}{7}=2$.

$a_1=7-2=5$, $a_n=5+2(n-1)=2n+3$ – формула *n*-ого члена а.п.

Ответ: $a_1=5$, $a_n=2n+3$.

11 класс

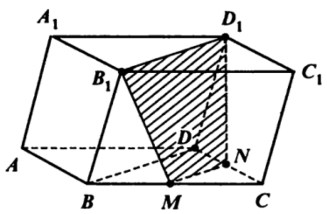
1. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение – трапеция. (7баллов)
2. Найдите все решения уравнения: $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.(7баллов)
3. В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$. (7баллов)
4. Можно ли разрезать арбуз на 4 части так, чтобы после того, как его съели, осталось 5 корок? (7баллов)

5.Найти значение выражения: $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$ при $a=2003$.(7баллов)

Решения 11 класс

1. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение – трапеция.

   Решение.



По условию задачи точка N – середина DC.

Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем BD, $BD \parallel B_1D_1$.

Из точки N проводим $MN \parallel BD$, значит $MN \parallel B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M, D_1 и N, тогда B_1D_1NM – искомое сечение. Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \parallel NM$, значит B_1D_1NM – трапеция (по определению).

2. Найдите все решения уравнения: $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.

   Решение. $x^2+5y^2+4xy+2y+1=x^2+4xy+4y^2+y^2+2y+1=(x+2y)^2+(y+1)^2$

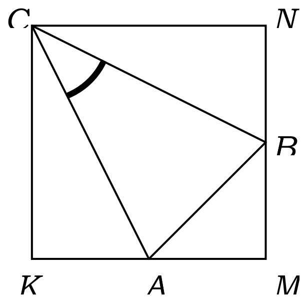
   $(x+2y)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow x=2;\ y=-1$.

   Ответ: $x=2;\ y=-1$.

3. В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$.

   Решение. Пусть сторона квадрата – $2a$, тогда $CN=2a$, $BN=a$, $CB=CA=a\sqrt{5}$, $AB=a\sqrt{2}$. В равнобедренном треугольнике по теореме косинусов найдем косинус угла ACB.

$$\cos\angle ACB=\frac{\left(a\sqrt{5}\right)^2+\left(a\sqrt{5}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\left(a\sqrt{5}\right)^2}=\frac{8a^2}{10a^2}=0{,}8.$$



Следовательно, $\angle ACB=\arccos 0{,}8$.

Ответ: $\arccos 0{,}8$.

4. Можно ли разрезать арбуз на 4 части так, чтобы после того, как его съели, осталось 5 корок?
   Решение. Вырежем из арбуза длинный тонкий цилиндр, протыкающий арбуз насквозь. Это одна из частей, от которой останется две корки. Остальную часть арбуза произвольным образом разрежем на три части, каждая из которых дает по одной корке.
5. Найти значение выражения: $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$ при $a = 2003$.
   Решение.
   $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)=$
   $=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)=$
   $=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)=$
   $=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)=$
   $=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)=1-a,$
   Если $a = 2003$, то $1-a=1-2003=-2002$.
   Ответ: –2002