Олимпиадные задания по математике 10-11 класс.

1. При каких значениях параметра m уравнение $mx^{-2} + 2 = 3m - 2x^{-2}$ *не имеет корней*.

2. Из вершины острого угла прямоугольного треугольника проведена биссектриса, которая разделила противоположный катет на отрезки a = 4 *см*, b = 5 *см*. Вычислите площадь треугольника.

3. Путь из села в город таков: сначала 15 км в гору, потом 6 км с горы. Велосипедист едет без остановок в гору с одной постоянной скоростью, с горы – с другой. В один конец он ехал 3,1 ч, обратно 2,5 ч. Какова скорость велосипедиста в гору и с горы?

4. Постройте эскиз графика функции: $y(x) = \dfrac{|3x^2 + 2x - 5|}{x - 1}$.

5. Найдите все значения числового параметра a, при которых корни уравнения $(a+1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ положительны.

6. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки ему хотя бы на квас, если цены вырастут еще на 20%?

7. В равнобедренном треугольнике основание равно 8, боковая сторона 5. Вычислите радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Критерии оценивания.

10 баллов – Получен правильный ответ. Приведено полное, правильное решение. Все шаги обоснованы и верны.

8 баллов – Получен правильный ответ. Приведено полное, правильное решение. Один из шагов решение пропущен или не обоснован.

6 баллов – Получен правильный ответ. Приведено правильное решение, но не полное. Пропущено несколько шагов решения, или обоснование приведенного решение не точно (с описками, недочетами).

4 балла – Приведено правильное решение, но допущена одна вычислительная ошибка, которая привела к не правильному ответу. Шаги решения приведены.

2 балла – Приведен правильный ответ, без обоснования, или рассмотрен частный случай.

0 баллов – Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Решение.

Задача №1

При каких значениях параметра m уравнение
$mx^{-2} + 2 = 3m - 2x^{-2}$ не имеет корней.

Решение.

ОДЗ: x$\neq 0$. $mx^{-2} + 2x^{-2} = 3m - 2x^{-2}, mx^{-2} + 2x^{-2} = 3m - 2, \frac{(m+2)}{x^2} = 3m - 2.$

1-й случай. Если $3m$-2=0, то $m = \frac{2}{3}$. При $m = \frac{2}{3}$ имеем $m + 2 = \frac{2}{3}$+2$\neq 0$. В этом случае в левой части преобразованного уравнения будет выражение, отличное от нуля при любом x из ОДЗ уравнения, а в правой части – нуль. Следовательно, при $m = \frac{2}{3}$ данное уравнение решений не имеет, то есть $m = \frac{2}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

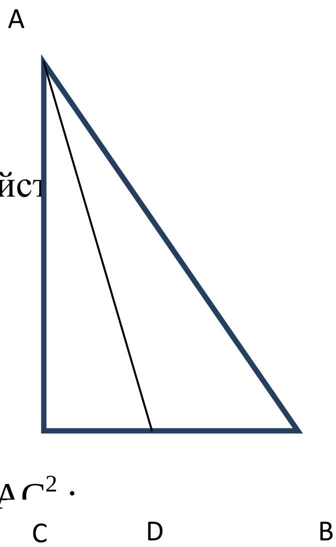
2-й случай. $3m$-2 $\neq 0$. Тогда $x^2 = \frac{m+2}{3m-2}$. Так как $x\neq 0$, то полученное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда ≤ 0. Решая это неравенство, получим -2$\leq m < \frac{2}{3}$.

Так как в первом случае показано, что m = $\frac{2}{3}$, также удовлетворяет условию задачи, то получим $m \in \left[-2; \frac{2}{3}\right]$.

Ответ: m∈ [-2; $\frac{2}{3}$].

Задача №2.

Из вершины острого угла прямоугольного треугольника проведена биссектриса, которая разделила противоположный катет на отрезки a = 4см, b = 5см. Вычислите площадь треугольника.



Решение.$< ACB$ прямой

<CAD = <DAB, CD = 4см, DB = 5см.

Катет CB = 4 + 5 = 9(см). Используя свойст

биссектрисы угла треугольника:

$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$. $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$, $AB = \frac{5}{4}AC$.

По теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$;

$AC^2 + 81 = \frac{25}{16}AC^2$; $16AC^2 + 16 \cdot 81 = 25AC^2$;

$16 \cdot 81 = 9\,AC^2$; $AC = \sqrt{\frac{16 \cdot 81}{9}} = 12$(см).

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$(см^2).

Ответ: 54см^2

Задача №3

Путь из села в город таков: сначала 15км в гору, потом 6км с горы. Велосипедист едет без остановок в гору с одной постоянной скоростью, с горы – с другой. В один конец он ехал 3,1ч, обратно 2,5ч. Какова скорость велосипедиста в гору и с горы?

Решение.

Пусть в гору велосипедист ехал со скоростью x *км/ч,* а с горы - *y км/ч*. Больше времени заняла дорога с большим подъемом, поэтому $\frac{15}{x} + \frac{6}{y} = 3{,}1$ и $\frac{6}{x} + \frac{15}{y} = 2{,}5$. Обозначим $a = \frac{1}{x}$ и $b = \frac{1}{y}$ и решим систему уравнений: $\begin{cases} 15a + 6b = 3{,}1 \\ 6a + 15\,b = 2{,}5. \end{cases}$ Она имеет единственное решение

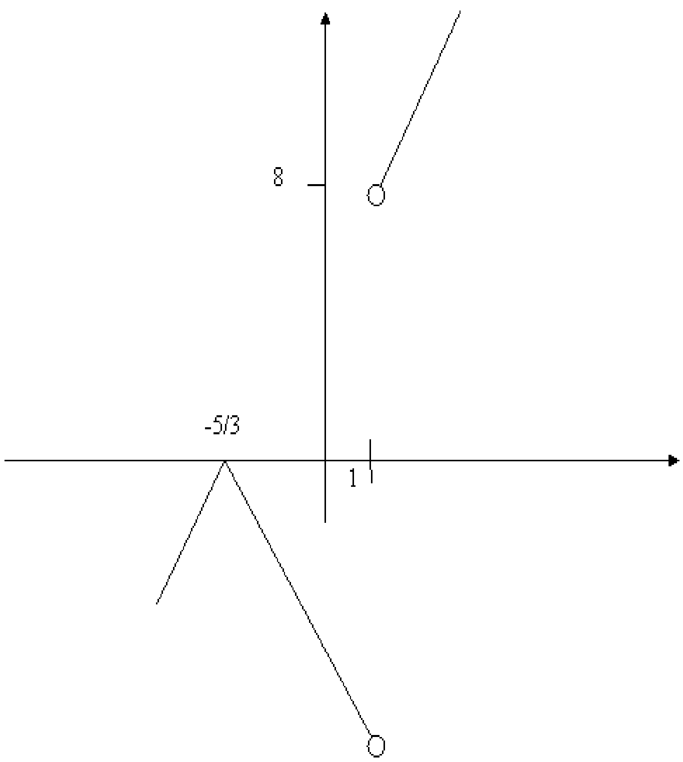
$a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{10}$. Откуда x = 6, y= 10. Это означает, что скорость велосипедиста в гору 6 *км/ч,* а с горы 10 *км/ч.*

Ответ: 6 *км/ч,* 10 *км/ч.*

Задача 4. Постройте эскиз графика функции: $y(x) = \frac{|3x^2+2x-5|}{x-1}$ **.**

Решение. $$y(x) = \frac{|3x^2+2x-5|}{x-1} = \begin{cases} (3x+5), \textit{ если } x \in (-\infty; -5/3] \cup (1; +\infty); \\ -(3x+5), \textit{если } x \in (-5/3; \cup 1); \\ \textit{не определена при } x = 1. \end{cases}$$

Отсюда график:



Задача 5. Найдите все значения числового параметра *a*, при которых корни уравнения $(a+1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ положительны.

Решение. Если *(a+1)=0*, то уравнение будет линейным, и его корнем при*a=-1* является *x=1*. Подходит.
Если *a?-1*, то уравнение будет квадратным. По теореме Виета его корни положительны тогда и только тогда, когда выполняется

$$\begin{cases} \dfrac{(a+3)}{a+1)} > 0, \\ \dfrac{a}{a+1} < 0, \\ D/4 = a^2 - (a+1)(a+3) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty), \\ a \in (-1; 0), \\ a \in (-\infty; -3/4]. \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; -3/4]$$

С учетом первого случая получаем ответ $a \in [-1; -3/4]$.

Ответ $a \in [-1; -3/4]$

Задача 6. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки ему хотя бы на квас, если цены вырастут еще на 20%?

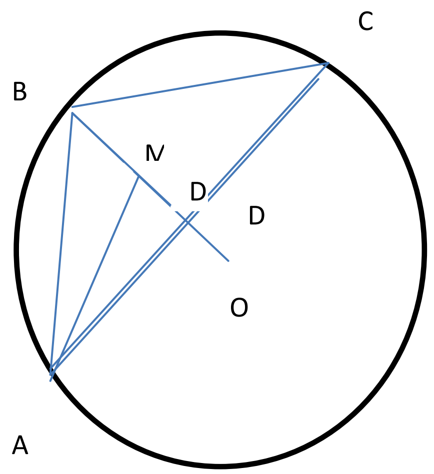
Решение. Пусть первоначально квас стоил *x%* от денежки, а хлеб – *(100-x)%.* После подорожания цен на 20%, получим следующий баланс $1{,}2 \cdot \left(x\% + \dfrac{(100-x)\%}{2} \right) = 100$. Отсюда $x\% = \dfrac{200}{3}$. При двукратном подорожании цен эта величина увеличится в 1,44 раза и достигнет величины 96%, что меньше стоимости денежки.

Ответ. Хватит.

Задача №7

В равнобедренном треугольнике основание равно 8, боковая сторона 5. Вычислите радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Решение.



O – центр описанной окружности,

M – центр вписанной окружности,

AB = BC = 5, AC = 8, MD = r, BO = R.

Найдем площадь и периметр данного треугольника. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$;

$BD = \sqrt{25-16} = 3$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+5+5}{2} = 9; r = \frac{S}{p} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 12} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$;

OM = OB $\cdot$ BD + DM = R $\cdot$ BD + r = $\frac{25}{6} \cdot 3 + \frac{4}{3} = 2{,}5$.

Ответ: $r = 1\frac{1}{3}$; R = $4\frac{1}{6}$; OM = 2,5.