Решение задач по теме «Кредиты, с заданной последовательностью долгов»

Бабинер Е.С.,
старший преподаватель кафедры общего образования и воспитания
ОГАОУ ДПО «Институт повышения квалификации педагогических работников»

Для выявления закономерности составим следующую таблицу:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = D_0(1+r)$	$V_1 = S_1 - D_1 = D_0(1+r) - D_1$	D_1
2	$S_2 = D_1(1+r)$	$V_2 = D_1(1+r) - D_2$	D_2
3	$S_3 = D_2(1+r)$	$V_3 = D_2(1+r) - D_3$	D_3
…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-1} = D_{n-2}(1+r)$	$V_{n-1} = D_{n-2}(1+r) - D_{n-1}$	D_{n-1}
n	$S_n = D_{n-1}(1+r)$	$V_n = S_n = D_{n-1}(1+r)$	$D_n = 0$

Тогда

$$\sum_n = V_1 + \cdots + V_n = \boldsymbol{D_0 + r(D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1})}. \quad (1)$$

Откуда

$$\boldsymbol{r = \frac{\sum_n + D_0}{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}}. \quad (2)$$

Если последовательность $\{D_k\}$ задана в частях, то есть $D_k = a_k \cdot S$, то таблица принимает вид:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = S(1+r)$	$V_1 = S(1+r) - a_1S = S(1 + r - a_1)$	a_1S
2	$S_2 = a_1S(1+r)$	$V_2 = a_1S(1+r) - a_2S = S(a_1 + a_1r - a_2)$	a_2S
3	$S_3 = a_2S(1+r)$	$V_3 = S(a_2 + a_2r - a_3)$	a_3S
…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-1} = a_{n-2}S(1+r)$	$V_{n-1} = S(a_{n-2} + a_{n-2}r - a_{n-1})$	$a_{n-1}S$
n	$S_n = a_{n-1}S(1+r)$	$V_n = S_n = a_{n-1}S(1+r)$	0

Тогда

$$\boldsymbol{\Sigma_n = S\big(1 + r + r(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1})\big)}. \quad (3)$$

Если последовательность $\{D_k\}$ задана в процентах, то переводим проценты в части и используем в решении формулу (3).

Задача 1

Известно: $S_0, n, \{D_k\}, \sum_n < C$.

Неизвестно: r.

Найти: r.

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн.руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найти наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение.

По формуле (1) получаем:

$$\sum_n = 1 + r(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) = 1 + 2{,}6r.$$

Учитывая то, что $\sum_n < 1{,}2$:

$$1 + 2{,}6r < 1{,}2.$$

Откуда:

$$r < 0{,}077.$$

Так как требуется наибольшее значение r, следовательно, $r = \mathbf{0{,}08}$ или **8**%.

Задача 2

Известно: $r, n, \{D_k\}, V_k > C$.

Неизвестно: S_0.

Найти: наименьшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн.руб.)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}25 - 0{,}7) = 0{,}55 \cdot S$$

$$V_2 = S(0{,}7(1 + 0{,}25) - 0{,}4) = 0{,}475 \cdot S$$

$$V_3 = S \cdot 0{,}4(1 + 0{,}25) = 0{,}5 \cdot S$$

Так как наименьшая выплата $V_2 = 0{,}475 \cdot S$, поэтому решаем неравенство:

$$0{,}475 \cdot S > 5,$$

$$S > 10{,}53.$$

Поэтому $S = \mathbf{11}$ млн.рублей.

Задача 3

Известно: $r, n, \{D_k\}, \{V_k\}$.

Неизвестно: S_0, Σ_n.

Найти: Σ_n.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере *S* тыс рублей. Условия его возврата таковы:

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным *S* тыс рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найти общую сумму выплат за 5 лет.

Решение.

Составим таблицу для $\{S_k\}$, $\{V_k\}$ и $\{D_k\}$, с учетом условия и $V_k = S_k - D_k$:

k	S_k	V_k	D_k
0	S		S
1	$S_1 = 1{,}2 \cdot S$	$V_1 = 0{,}2 \cdot S$	S
2	$S_2 = 1{,}2 \cdot S$	$V_2 = 0{,}2 \cdot S$	S
3	$S_3 = 1{,}2 \cdot S$	$V_3 = 0{,}2 \cdot S$	S
4	$S_4 = 1{,}2 \cdot S$	360	D_4
5	$S_5 = 1{,}2 \cdot D_4$	360	0

Так как

$$S_5 = 1{,}2 \cdot D_4 = 360, \text{ то } D_4 = 300.$$

Так как

$$D_4 = 1{,}2 \cdot S - 360 = 300, \text{ то } S = 550.$$

Сумма все выплат:

$$\Sigma_5 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot S + 2 \cdot 360 = 0{,}6 \cdot 550 + 720 = \mathbf{1050} \text{ тыс рублей.}$$

Задача 4

Известно: $r, n, \{D_k\}, V_k \in Z$.

Неизвестно: S_0.

Найти: S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* – натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн.руб.)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}15 - 0{,}7) = 0{,}45 \cdot S,$$
$$V_2 = S(0{,}7(1 + 0{,}15) - 0{,}4) = 0{,}405 \cdot S,$$
$$V_3 = S \cdot 0{,}4(1 + 0{,}15) = 0{,}46 \cdot S.$$

Перейдем к обыкновенным дробям:

$$V_1 = \frac{90}{200} \cdot S$$
$$V_2 = \frac{92}{200} \cdot S$$
$$V_3 = \frac{81}{200} \cdot S.$$

Для того, чтобы каждая из выплат составляла целое число, надо чтобы $S = \mathbf{200}$ млн руб.

Задача 5

Известно: $r, n, \{D_k\}, \Sigma_n < C$.

Неизвестно: S_0.

Найти: наибольшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн.рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей?

Решение.

Используя формулу (3), получаем:

$$\Sigma_n = 1{,}36 \cdot S < 50,$$
$$S < 36{,}76.$$

Следовательно, $S = \mathbf{36}$ млн руб.

Задача 6
Известно: $r, n, \{D_k\}, V_{max} - V_{min} < C$.
Неизвестно: S_0.
Найти: наименьшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн.руб.)	S	$0{,}8S$	$0{,}3S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}1 - 0{,}8) = 0{,}3 \cdot S,$$
$$V_2 = S(0{,}8(1 + 0{,}1) - 0{,}3) = 0{,}58 \cdot S,$$
$$V_3 = S \cdot 0{,}3(1 + 0{,}1) = 0{,}33 \cdot S.$$

Решаем неравенство:

$$V_{max} - V_{min} = 0{,}58 \cdot S - 0{,}3 \cdot S < C,$$
$$S < 3{,}6.$$

Следовательно, $S = \mathbf{3}$.

Задача 7
Известно: $r, n, \{D_k\}$.
Неизвестно: S_0, Σ_n.
Найти: $100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right)$.

В конце сентября 2016 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

– в течение первого месяца каждого квартала долг увеличивается на 6% по сравнению с долгом на конец предыдущего квартала;
– в течение второго месяца каждого квартала необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– долг на начало каждого квартала должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Квартал	1	2	3	4
Долг (в процентах)	100	75	40	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

Представим последовательность долгов в частях:

Квартал	1	2	3	4
Долг (в процентах)	1	0,75	0,4	0

По формуле (3) определяем общую сумму выплат:

$$\Sigma_n = S_0\big(1 + 0{,}06 + 0{,}06 \cdot (0{,}75 + 0{,}4)\big) = 1{,}129 \cdot S_0.$$

Чтобы узнать, на сколько процентов общая сумма выплат будет больше суммы кредита, надо найти значение выражения:

$$100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{1{,}129 \cdot S_0}{S_0} - 1\right) = \mathbf{12{,}9}.$$

Задача 8

Известно: $S_0, r, n, \{D_k\}$.

Неизвестно: Σ_n.

Найти: $100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right)$.

Виктория Викторовна взяла в банке кредит 1 500 000 рублей на 5 лет при условии:

- долг будет возвращаться пятью платежами, производимыми в конце каждого из пяти лет;
- имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 15%;
- в конце года, уже после начисления процентов, часть долга необходимо погасить в таком объеме, чтобы остаток был равен сумме указанной в таблице:

Год	1	2	3	4	5
Текущий долг (в рублях)	1 200 000	900 000	600 000	300 000	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

По формуле (1) находим общую сумму выплат:

$$\sum\nolimits_n = 15 + 0{,}15(15 + 12 + 9 + 6 + 3) = 21{,}75.$$

Чтобы узнать, на сколько процентов общая сумма выплат будет больше суммы кредита, надо найти значение выражения:

$$100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{21{,}75}{15} - 1\right) = \mathbf{45}.$$

Источники задач

1. https://ege.sdamgia.ru/
2. http://alexlarin.net/
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-наДону: Легион,2016. – 384 с.
4. Семенов А.В. Единый государственный экзамен. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся. Учебное пособие./А.В. Семенцов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под редакцией И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2017. – 192 с.