Задачи по планиметрии

№ 16

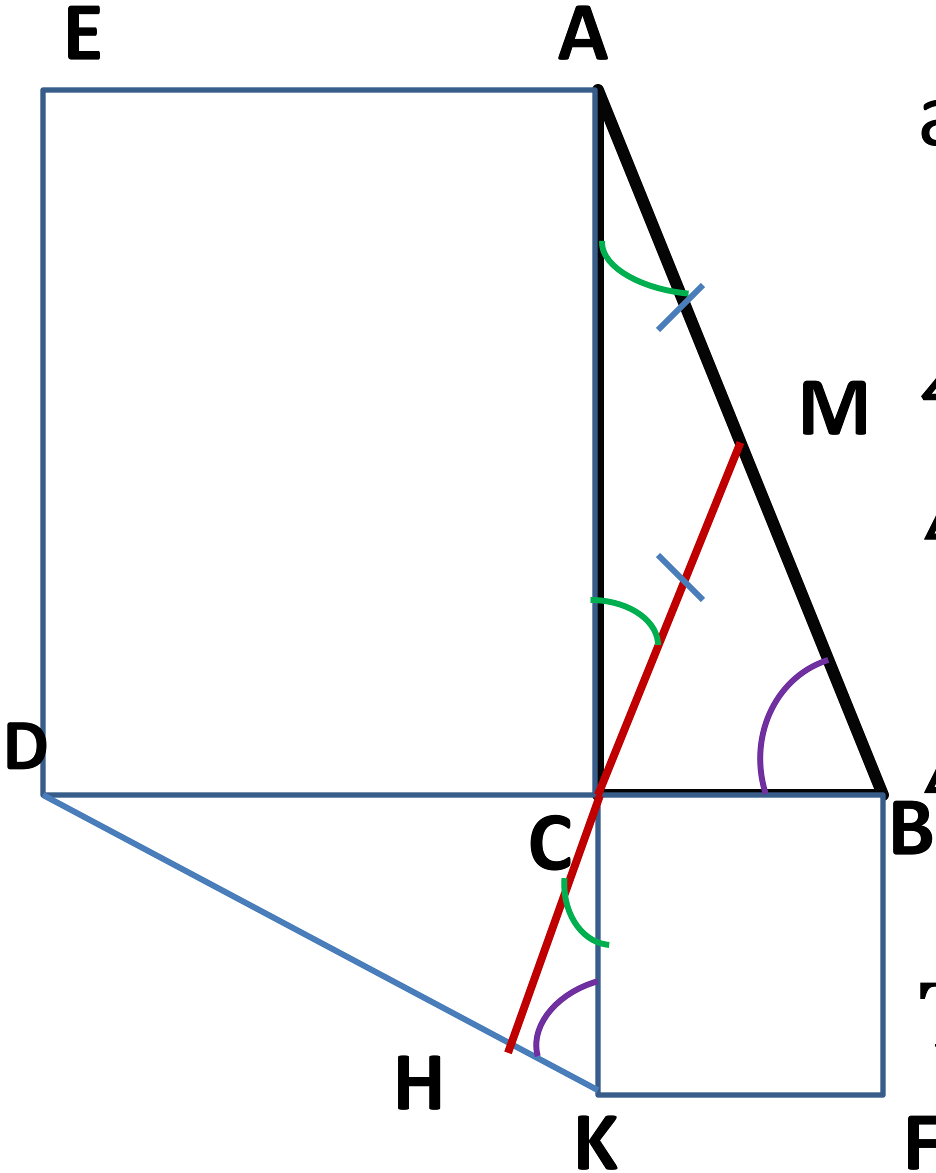
Презентацию составила:
учитель МКОУ СШ № 2 г.Котельниково
Куницына А.В.

Задача №1

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты ACDE и BFKC. Точка M – середина гипотенузы AB, H – точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 6 и 8.



а) ΔACM-р/б

$\Rightarrow \angle CAM = \angle ACM$

$\angle ACM = \angle HCK$(верт)

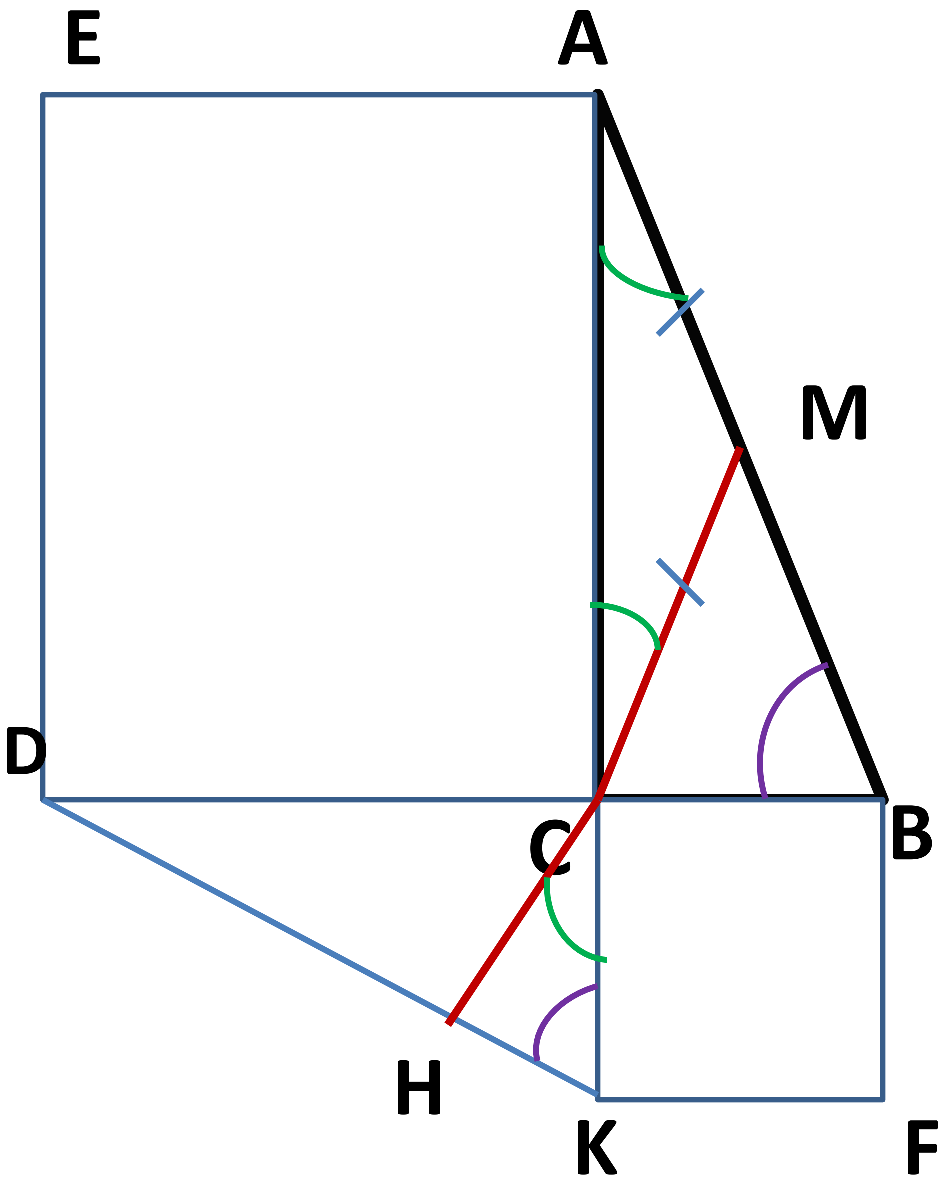
$\Delta ACB = \Delta DCK$(по 2 катетам) $\Rightarrow \angle ABC = \angle DKC$

$\Delta ACB \backsim \Delta CHK$(1пр) $\Rightarrow$

$\angle CHK = \angle ACB = 90^0$

Т.к $\angle CHK = 90^0$, то

$CM \perp DK$



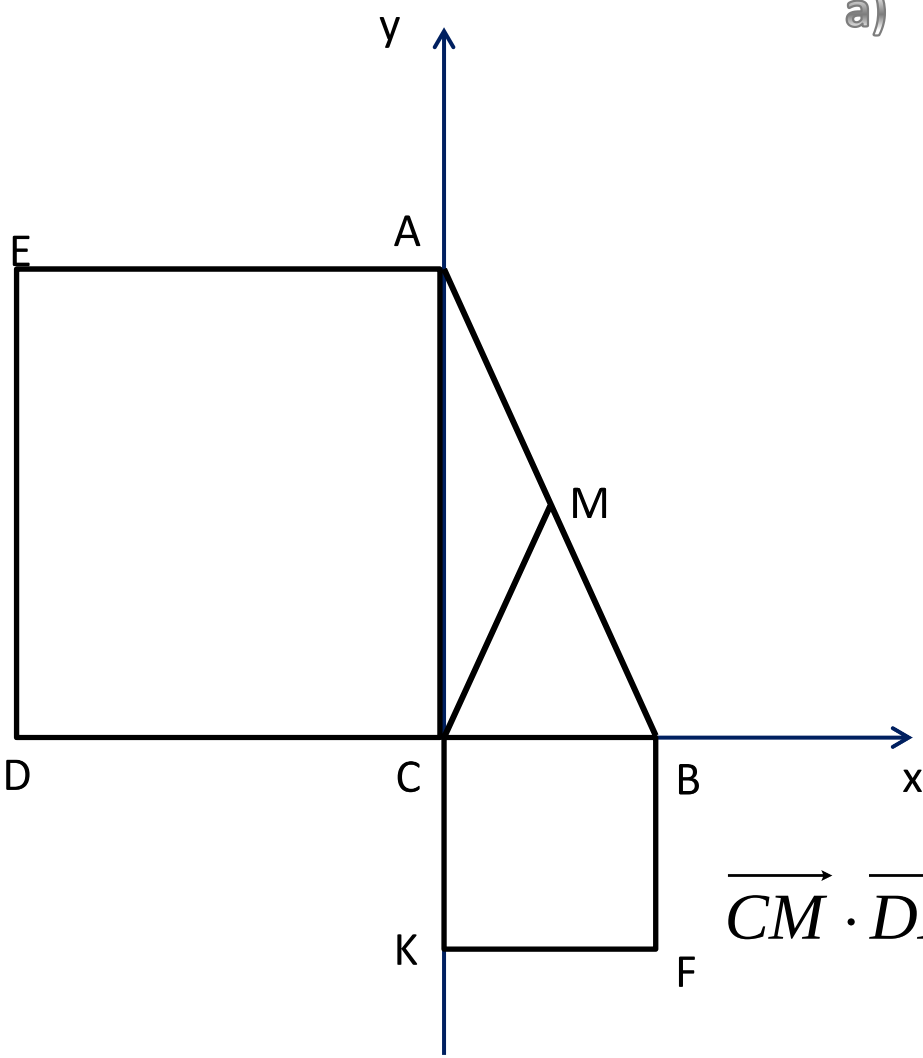
б) MH=CM+CH

CM=½AB=5

CH= $\frac{DC \cdot CK}{DK} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$

MH=9,8

2 способ



а)

$$C(0;0) \quad M(3;4)$$

$$\overrightarrow{CM}(3;4)$$

$$D(-8;0), K(0;-6)$$

$$\overrightarrow{DK}\{8;-6\}$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DK} = 24 - 24 = 0$$

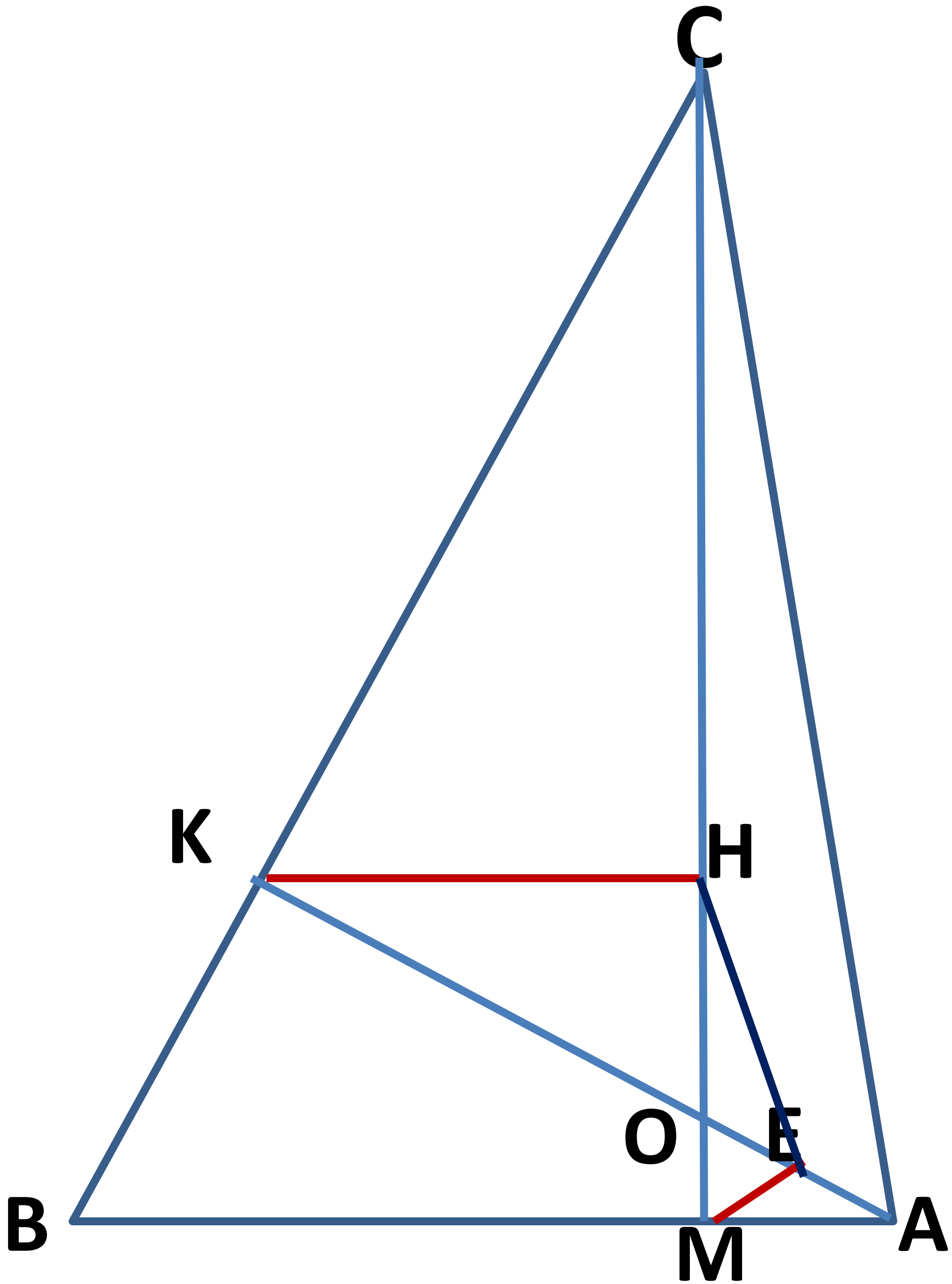
$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DK} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{DK} \Rightarrow CM \perp DK$$

Задача №2

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH:AC, если $\angle ABC=30^0$.



а) $\Delta KOH \sim \Delta MOE$ (1пр) $\Rightarrow$

$$\frac{KO}{OM}=\frac{KH}{ME}=\frac{HO}{OE}$$

$\Delta KOC \sim \Delta MOA$ (1пр) $\Rightarrow$

$$\frac{CO}{OA}=\frac{KC}{MA}=\frac{KO}{OM}$$

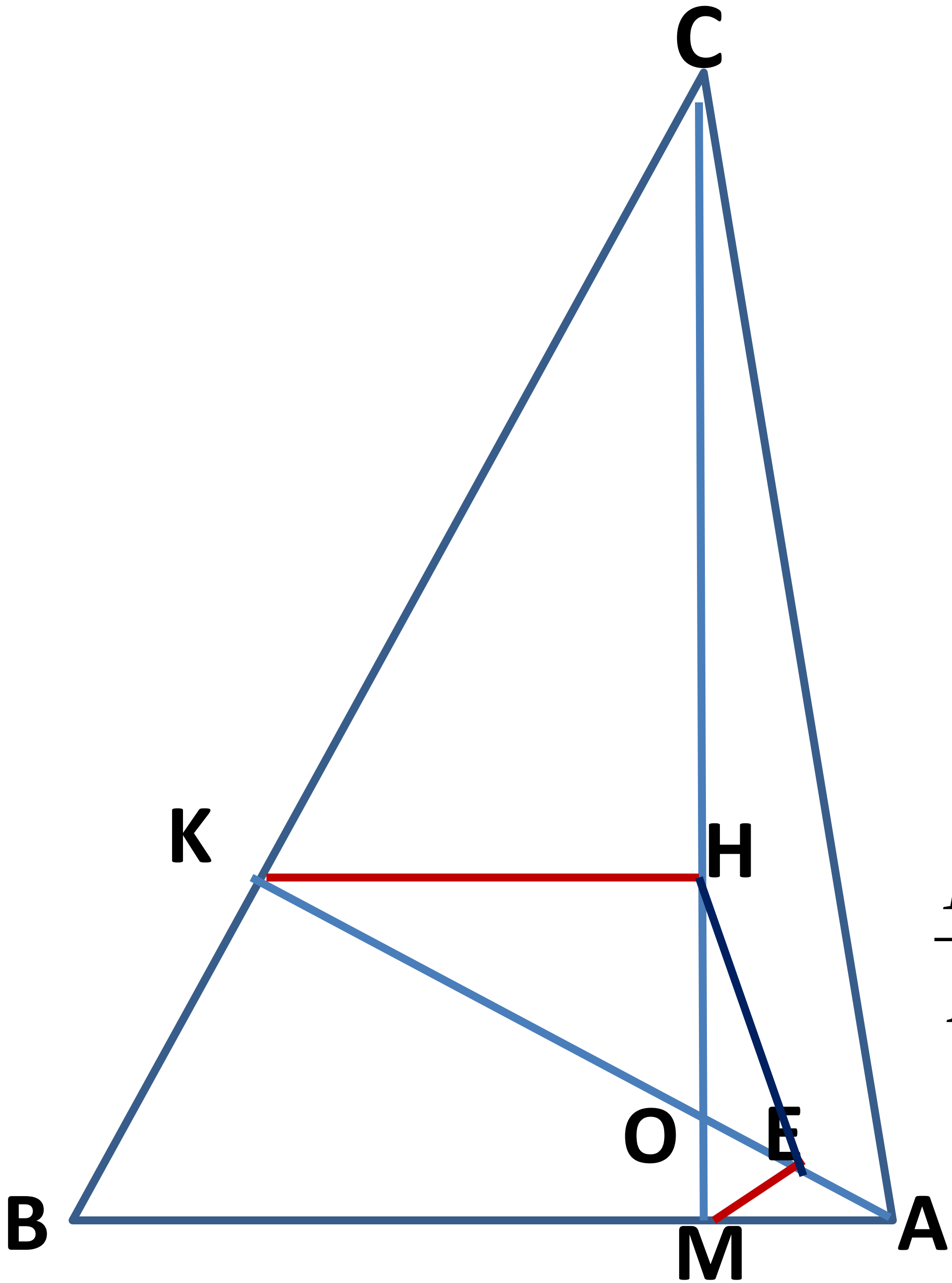
$$\Downarrow$$

$$\frac{HO}{OE}=\frac{CO}{OA}$$

$\Delta HOE \sim \Delta COA$ (2пр) $\Rightarrow$

$\angle OCA = \angle OHE$

$\angle OCA$ и $\angle OHE$- соответ., то $HE \parallel AC$



б)Т.к. $\triangle HOE \sim \triangle COA$, то

$$\frac{EH}{AC} = \frac{OH}{OC}$$

$\angle CKH = \angle CAB = 30$

$CK = x$, тогда $CH = \frac{1}{2}x$

$\angle KOC = 30 \Rightarrow CO = 2x$

$OH = 2x - \frac{1}{2}x = 1{,}5x$

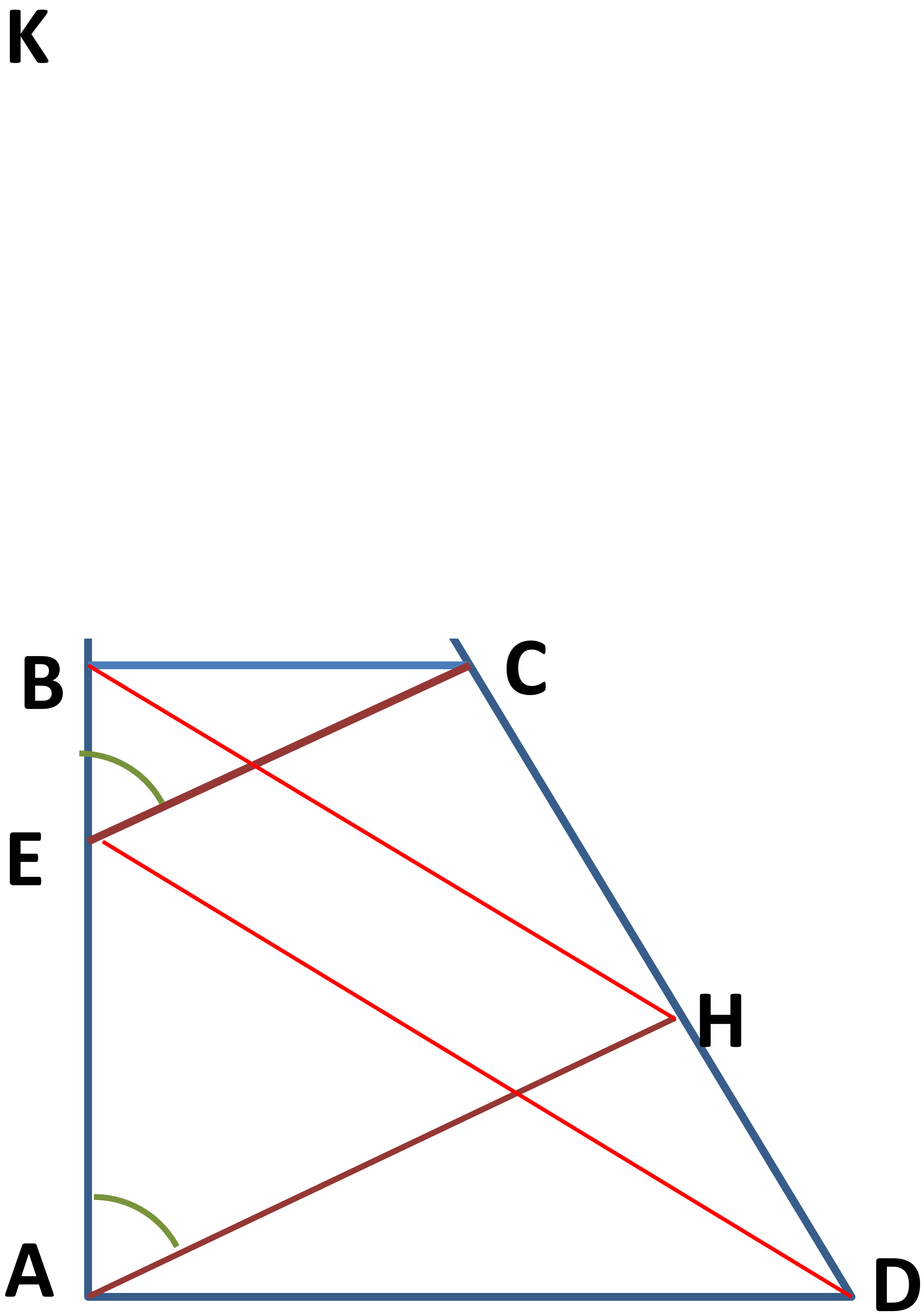
$$\frac{EH}{AC} = \frac{OH}{OC} = \frac{1{,}5x}{2x} = \frac{3}{4}$$

Задача №3

В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию AD. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH:ED, если $\angle BCD=135^0$.



а) $\triangle KBC \backsim \triangle KAD$ (1пр) $\Rightarrow$

$$\frac{KB}{KA} = \frac{KC}{KD} = a$$

КВ$=a\cdot$АК, КС$=a\cdot$KD

$\triangle KEC \backsim \triangle KAH$ (1пр) $\Rightarrow$

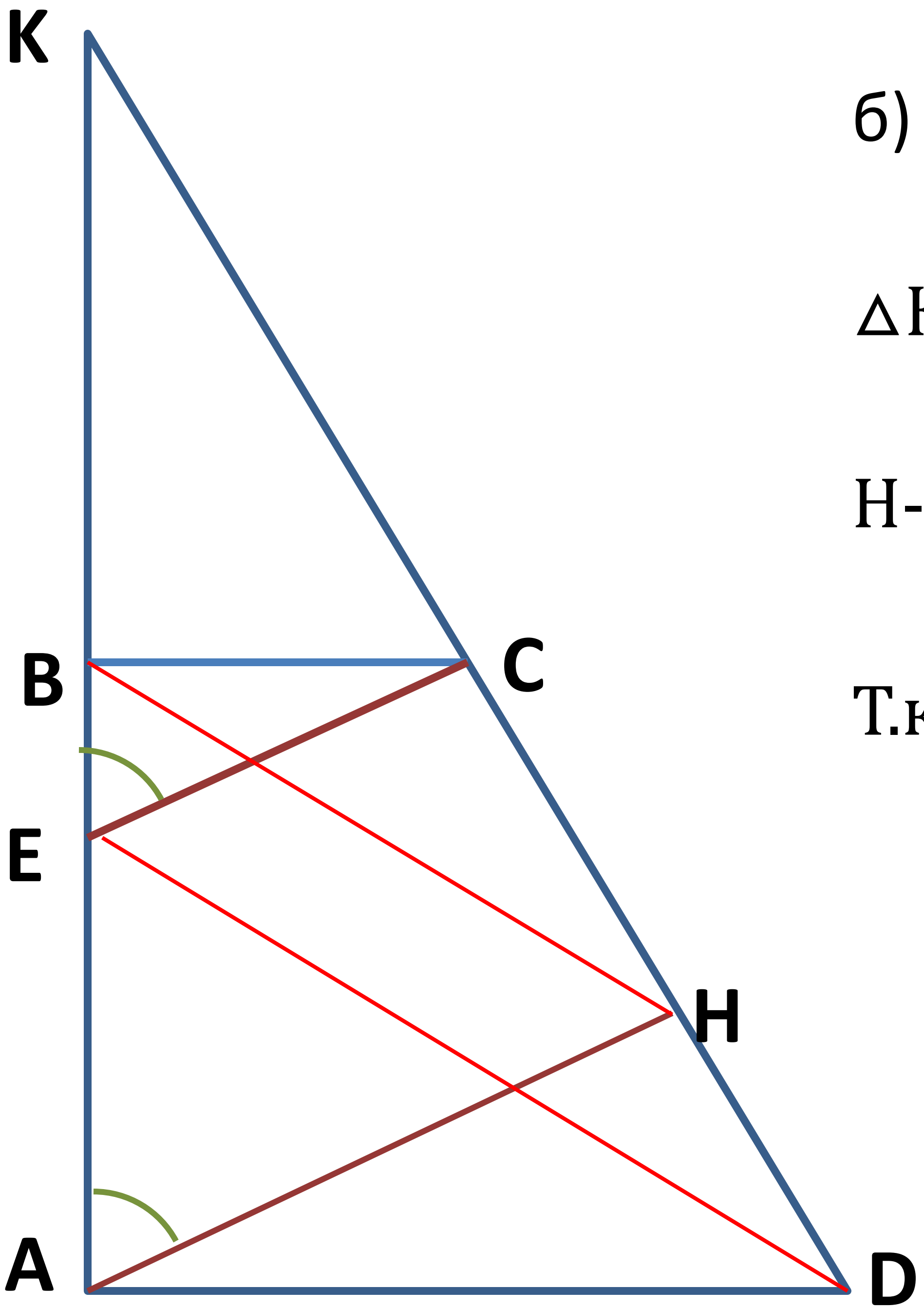
$$\frac{KE}{KA} = \frac{KC}{KH} = b$$

КЕ$=b\cdot$КА, КС$=b\cdot$КН

$$\frac{KB}{KE} = \frac{a \cdot AK}{b \cdot KA} = \frac{a}{b} \qquad \frac{KH}{KD} = \frac{a}{b}$$

$\triangle KBH \backsim \triangle KBD$ (2пр) $\Rightarrow$

$\angle KHB = \angle KDE$, соотв., то BH||ED



б) Т.к.$\angle BCD = 135^0$, $\angle CDA = 45^0$

$\triangle KAD$ –р/б, АК=AD, АН- высота ⇨ АН- медиана

Н- середина КD⇨ $\dfrac{KH}{KD} = \dfrac{1}{2}$

Т.к. $\triangle KBH \sim \triangle KED$, то

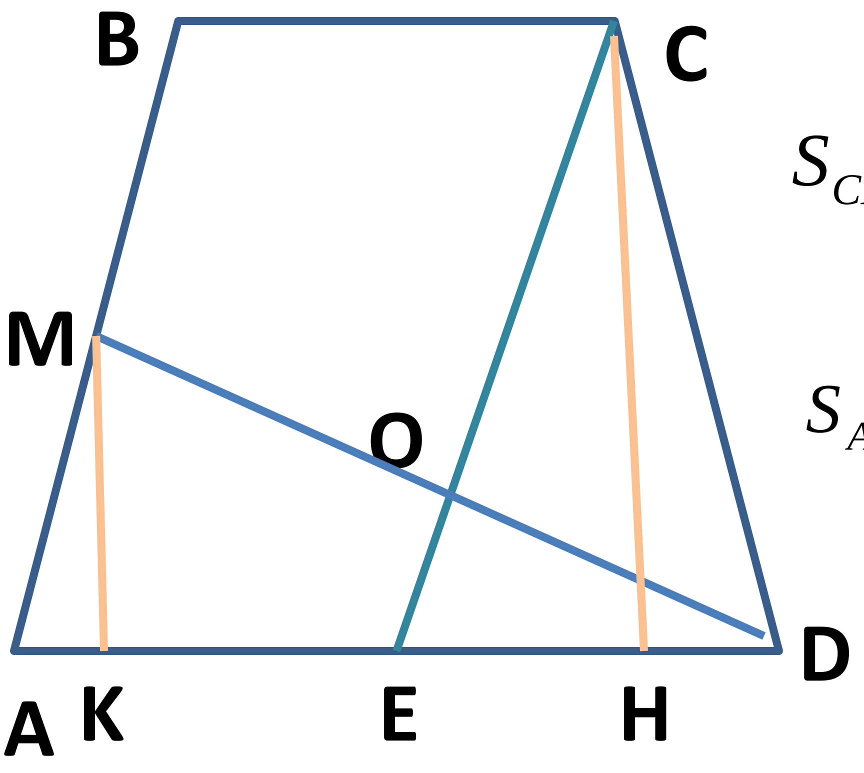
$$\frac{BH}{ED} = \frac{KH}{KD} = \frac{1}{2}$$

Задача №4

В трапеции ABCD точка E – середина основания AD, точка M – середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырехугольника AMOE и треугольника COD равны.

б) Найдите какую часть площадь четырехугольника AMOE составляет от площади трапеции ABCD, если BC=3, AD=4.



a)

$$S_{AMOE} = S_{AMD} - S_{OED}$$

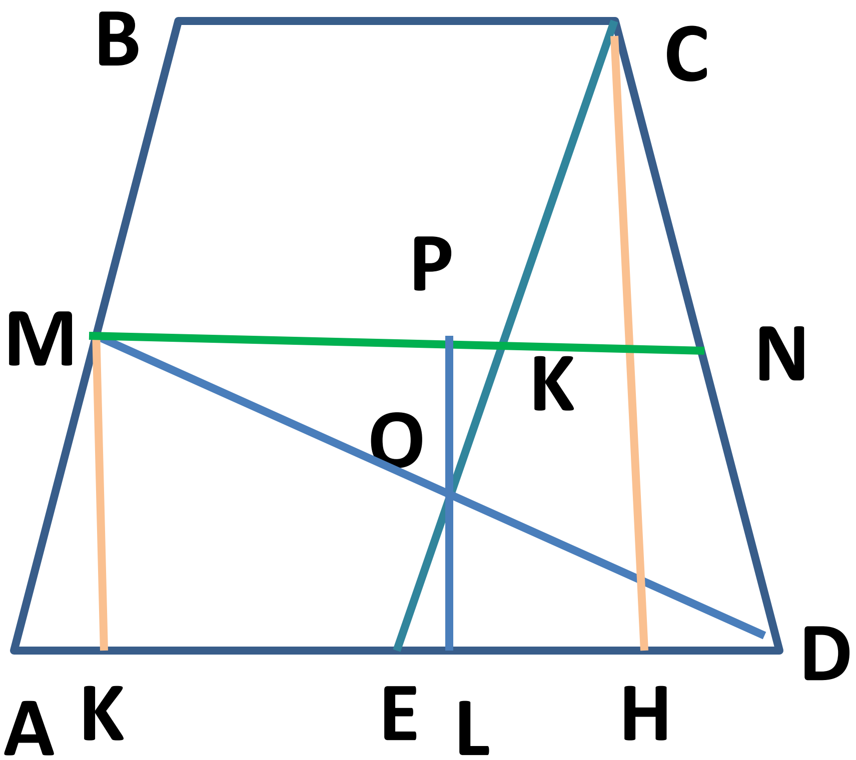
$$S_{COD} = S_{CED} - S_{OED}$$

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot CH = \frac{1}{4} \cdot AD \cdot CH$$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MK = \frac{1}{4} \cdot AD \cdot CH$$

$$S_{AMOE} = S_{COD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{4+3}{2} \cdot h = \frac{7}{2} \cdot h$$



б) Пусть CH=h

$$S_{AMD} = \frac{4}{4} \cdot h = h$$

MN=3,5 KN=1 MK=2,5

$\triangle MOK \backsim \triangle DOE$ (1пр) $\Rightarrow$

$$\frac{OP}{OL} = \frac{MK}{ED} = \frac{2{,}5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$OL = \frac{4}{9} PL = \frac{2}{9} \cdot h$$

$$S_{OED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} h = \frac{2}{9} \cdot h$$

$$S_{AMOE} = h - \frac{2}{9} \cdot h = \frac{7}{9} \cdot h$$

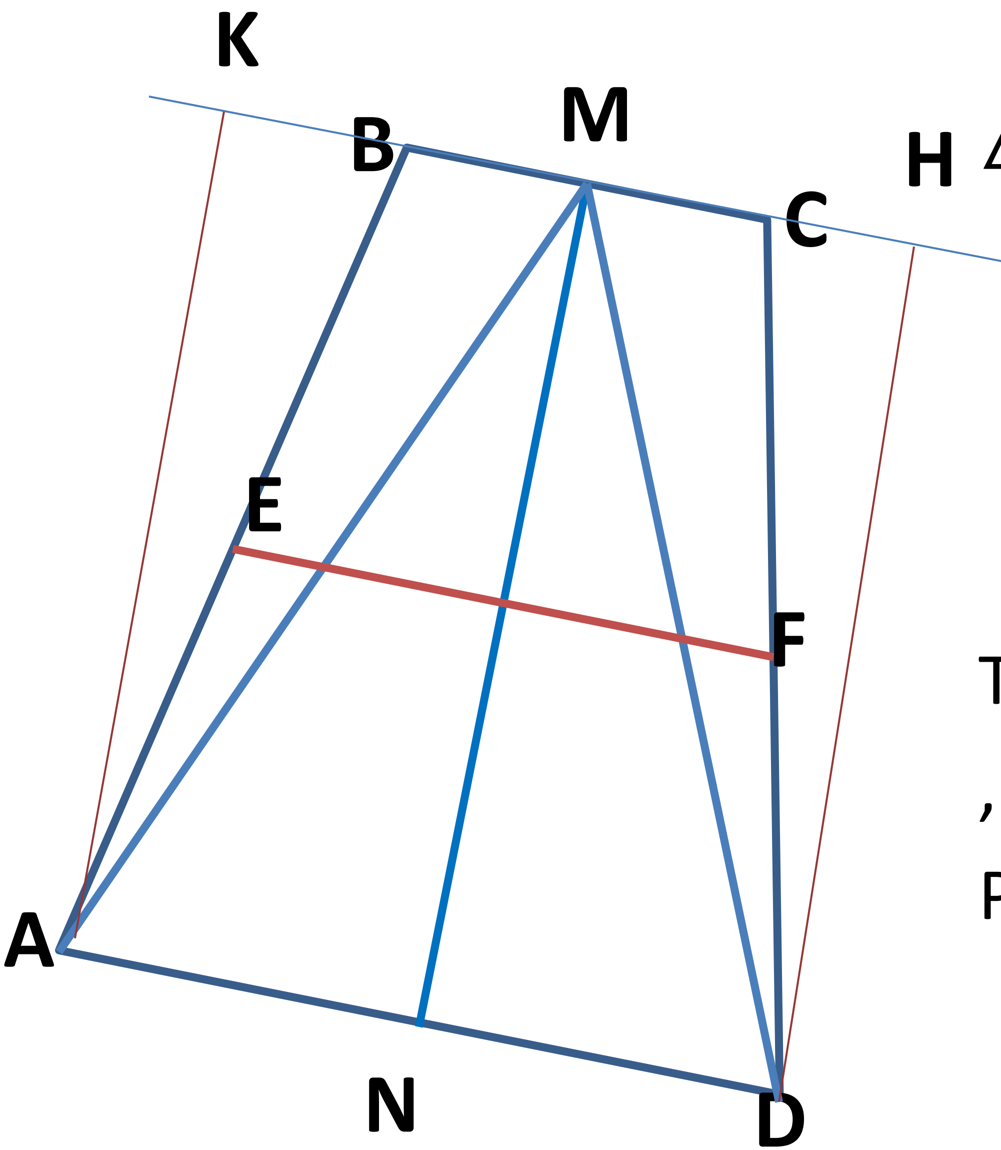
$$\frac{S_{AMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{7h}{9} : \frac{7h}{2} = \frac{2}{9}$$

Задача № 5

Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника делит его площадь пополам, а другой в отношении 11:17.

а) Докажите, что четырехугольник – трапеция.

б) Найдите отношение оснований трапеции.



а) $S_{ABMN} = S_{MNDC}$

$\triangle$AMD, MN- медиана $\Rightarrow$

$S_{AMN} = S_{MND}$

$\Downarrow$

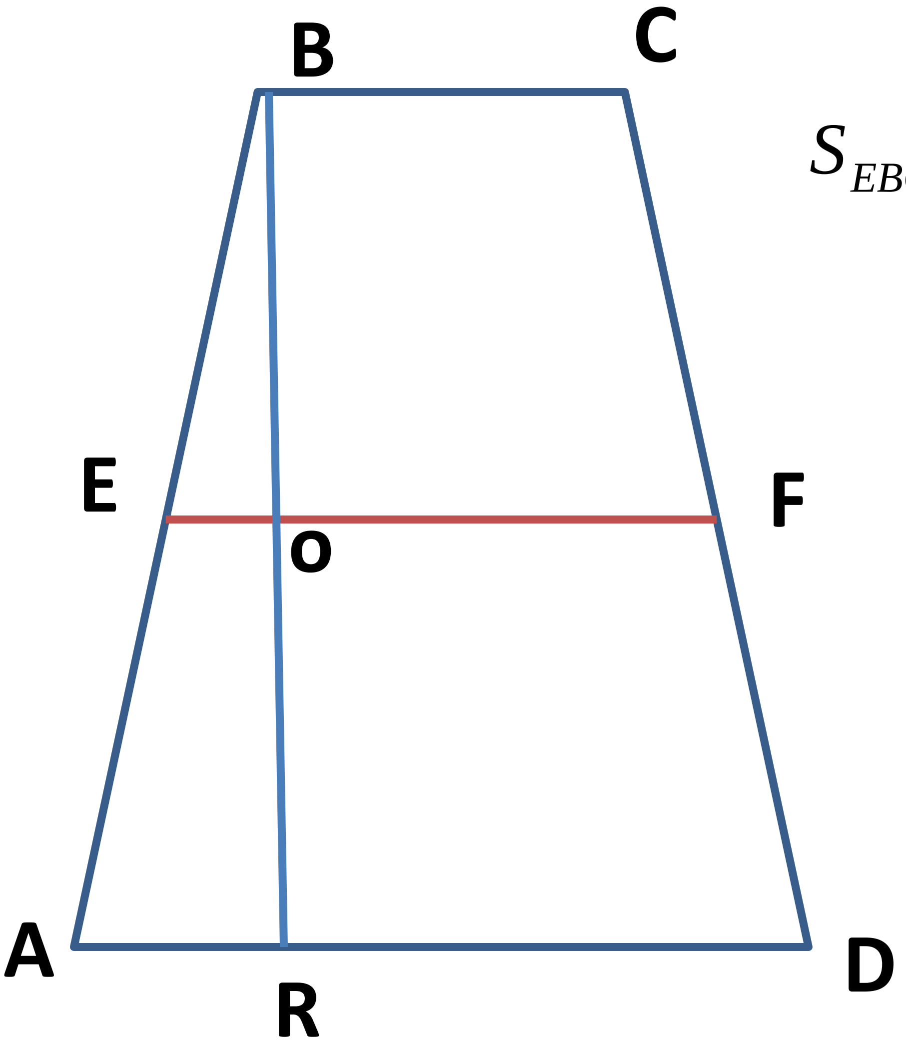
$S_{AMB} = S_{MCD}$

Т.к. BM=MC и $S_{AMB} = S_{MCD}$, то DH=AK

Расстояние от точек A и D до прямой BC равны, то AD||BC

Стороны AB и CD не параллельны

б) BO=OR=½·BR=½h



$$S_{EBCF}=\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{3a+b}{8}\cdot h$$

$$S_{EFDA}=\frac{3b+a}{8}\cdot h$$

$$\frac{3a+b}{3b+a}=\frac{11}{17}$$

$$51a+17b=33b+11a$$

$$\frac{a}{b}=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$$