Задачи ЕГЭ № 8 считаются настолько сложными, что многие их даже не решают. Но существуют приемы, с которыми многие задачи №8 решаются элементарно, а некоторые задачи можно решить вообще без формул. И они вполне доступны простому ученику.
Рассмотрим некоторые из них.

Первый тип - задачи, когда одно объёмное тело вписано в другое.

Задача №1: ***Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота равны 1. Найдите объём параллелепипеда.***

Решение.
Прежде всего, заметим, что высота цилиндра равна высоте параллелепипеда**.** Если нарисовать вид сверху, то есть круг, вписанный в прямоугольник, то можно увидеть. Что круг вписан в квадрат со стороною в два раза больше радиуса. Значит, площадь основания равна 4, а высота 1, объём равен 4.

Задача №2: В ***прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объем параллелепипеда***.

Решение.
Если нарисовать вид сверху или сбоку, или спереди, то есть круг, вписанный в прямоугольник, то можно увидеть. Что круг вписан в квадрат. Но можно ничего не рисовать, а просто представить себе, что шарик положили в коробочку, так чтобы он касался всех стенное, дна и крышки, ясно, что такая коробочка будет кубической формы. Длина, ширина и высота этой коробочки будет в два раза больше, чем радиус шара. Объём равен 8.

Задача№3: ***Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара***.

Решение. Площадь основания конуса равна площади большого круга шара, а высота цилиндра равна радиусу шара. Значит, $V_{кон} = 1/3\pi R^2 \cdot R = 1/3\pi R^3 = 6$.
$V_ш = 4/3\ \pi R^3 = 24$

Задача№4: ***Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.***

Решение.
Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания цилиндра равна площади большого круга вписанного шара, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара. Получим, $V_{цил.} = S_{осн.} \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 3/2 \cdot 4/3\ \pi R^3 = 3/2\ V_{ш.}$
Ответ: 36

Задача№5: ***Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.***
Решение.
Из предыдущей задачи можно сделать вывод, что если цилиндр описан около шара, то его объём в 1,3 раза больше объёма шара. То есть $V_{цил} = 1,5\ V_{ш.}$
Получим, $33 = 1,5\ V_{ш.,}$
$V_{ш.} = 33 : 1,5 = 22$
Ответ: 22

Слайд6 2 тип задач

Часто в задачах B11 дается многогранник и его объем или площадь. Затем многогранник растягивается или сжимается по разным направлениям. В результате получается новый многогранник, объем (площадь) которого и требуется найти.

Как решать такие задачи? Прежде всего, надо помнить, что многогранник рассматривается в *трехмерном пространстве*. И все изменения происходят по одной из трех осей. (слайд) Теперь, когда в задаче написано «высота цилиндра увеличена в 2 раза, а основание уменьшено в 3 раза», это следует понимать так:

- Растяжение в 2 раза по оси OZ;
- Сжатие в 3 раза по осям OX и OY.

Обратите внимание: сжатие произошло сразу *по двум осям*. Ведь окружность — фигура двумерная, в отличие, например, от отрезка (который одномерен). Поэтому изменение радиуса влечет растяжение сразу «в обе стороны».

Рассмотрим задачи, в которых увеличили или уменьшили какой – нибудь линейный размер (или размеры) объёмного тела в n раз.

Слайд: Теорема

Примеры: **Задача №1 [Пробный ЕГЭ 2012]**

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильной пирамиды, если все ее стороны увеличить в 7 раз?

Решение Подставляем n = 7 в формулу площади:

$S_{новая} = S_{старая} \cdot 7^2$, $S_{новая} = 49 \cdot S_{старая}$. Итак, площадь увеличится в 49 раз — это и есть ответ. Ответ 49

Задача №2 [Материалы индивидуальных занятий]

Площадь первой сферы равна 175. Найдите площадь второй сферы, если ее радиус в 5 раз меньше радиуса первой.

Решение

Работаем по той же формуле: $n = 5$. Но вместо умножения будет деление, поскольку радиус уменьшается. Имеем:

$S_{новая} = S_{старая} : n^2 = 175 : 5^2 = 175 : 25 = 7$

Ответ 7

Задача № 3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

Решение. Если все ребра увеличили в 3 раза, значит, площадь поверхности увеличится в 9 раз.

Ответ: 9

Задача №4 [Демонстрационный ЕГЭ 2011]

Бетонный шар весит 0,75 т. Сколько будет весить шар, изготовленный из того же материала, если его радиус в 2 раза больше?

Решение

Поскольку шары изготовлены из одного и того же материала, масса меняется по тому же закону, что и объем. Следовательно, работаем по формулам, приведенным выше.

$V_{старый} = 0,75$;

Растяжение в 2 раза по всем осям $n = 2$.

Почему растяжение по всем осям одинаково? Да очень просто: если растяжения будут разные, получится «приплюснутый» шар — в математике он называется эллипсоид. Чтобы такого не случилось, радиус меняется по всем осям.

Осталось найти ответ (по упрощенной формуле):

$V_{новый} = V_{старый} \cdot n^3 = 0,75 \cdot 2^3 = 6$

Ответ 6

Метод коэффициентов в задачах В11 применяется и в тех случаях, когда изменяется линейный размер в разное число раз, а найти надо как изменится объём или площадь поверхности.

Рассмотрим следующую теорему. (слайд)

Примеры: Задача№1 [ЕГЭ 2011]
Параллелепипед ABCDA1B1C1D1 имеет объем 35 см³. Ребро AB увеличили в 2 раза, ребро AC — в 5 раз, а ребро AA1 уменьшили в 7 раз. Найдите объем нового параллелепипеда.
Решение
Только не надо чертить параллелепипед! Эта задача словно создана для решения описанным выше методом. Имеем:
$V_{старый} = 35$;
Ось OX: растяжение в 2 раза, $a = 2$;
Ось OY: растяжение в 5 раз, $b = 5$;
Ось OZ: сжатие в 7 раз, $c = 1/7$.
Рассчитываем объем нового параллелепипеда:
$V_{новый} = V_{старый} \cdot a \cdot b \cdot c = 35 \cdot 2 \cdot 5 : 7 = 50$
Получили, что $V_{новый} = 50$ — *это и есть ответ*.

Задача№2 [Пробный ЕГЭ 2012]

Высоту кругового цилиндра увеличили в 4 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Найдите объем нового цилиндра, если объем исходного равен 45 м³.
Решение
По условию, нам известно:
$V_{старый} = 45$;
По оси OZ идет растяжение в 4 раза, поэтому $c = 4$;
По осям OX и OY идет сжатие в 3 раза,
поэтому $a = b = 1/3$.
Теперь можно найти объем:
$V_{новый} = V_{старый} \cdot a \cdot b \cdot c = 45 \cdot 4 : 3 : 3 = 20$

Задача№3: В сосуд , имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в два раза больше, чем у первого?
Решение.
Слова «в другой такой же сосуд» означают, что другой сосуд то же имеет форму правильной треугольной призмы. То есть – в его основании правильный треугольник, у которого все стороны в 2 раза больше, чем у первого. Значит, площадь этого треугольника будет в 4 раза больше. Объём воды остается неизменным, значит, высота уменьшится в 4 раза. Ответ: 3

Задача №4: ***Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсеченной треугольной призмы.***

Решение.
Высота меньшей призмы такая же, как у большой. А площадь основания уменьшится в 4 раза (свойство средней линии треугольника). Значит, объём отсеченной призмы будет равен 32 : 4 = 8

Задача№5: ***Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в два раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.***

Решение

Высота 2 кружки в 2 раза меньше первой, а радиус в 2 раза больше, значит, $V_{2куж.} = V_{1куж} : 2 \cdot 4 = V_{1куж} \cdot 2$. Получается, что объём второй кружки в 2 раза больше, чем первой.
Ответ: 2.

Следующий тип задач – такие, в которых надо найти объём части объемного тела. (Слайд)

Задача№1:
Объём параллелепипеда равен 9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABDA_1$.

Решение. Мы знаем, что $V_{пир.} = 1/3\ V_{пар.,}$ то есть объём пирамиды в три раза меньше объёма параллелепипеда. А у нашей пирамиды еще и площадь основания в два раза меньше, значит объем в 6 раз меньше, получим 9/6 = 1.5

Задача№2: *Объём куба равен 12. Найдите объём четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной – центр куба.*

Решение. В этой задаче высота в 2 раза меньше, а основание одинаковое. Объём так же в 6 раз меньше объёма куба.
Ответ:12 : 6 = 2

Задача**№3:** ***Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите*** V/π **.**
Решение.

Вырезан кусок с углом 60^0, а 60^0 – это 6 часть полного круга. Значит, от всего цилиндра отрезали1/6 часть, осталось 5/6 цилиндра. Находим объём всего цилиндра и умножаем на 5/6 и делим на π. $5/6\pi \cdot 144 \cdot 6 = 720\pi$. Ответ: 720

Четвертый тип задач - задачи, в которых надо найти объём многогранника, вписанного в многогранник. (слайд №)
Это самые сложные задачи, но для их решения существуют фишки.
Пример.
Задача№1: ***Объем тетраэдра равен 1,9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.***

Решение.
При решении этой задачи можно поступить так же как мы поступаем в задачах B_6, когда надо найти площадь неудобно расположенных фигур. Например, как на слайде, мы достраиваем до прямоугольника и затем вырезаем площади трех треугольников. В нашей задаче от исходного тетраэдра отрезали 4 маленьких тетраэдра, объём каждого из которых в 8 раз меньше, чем объём большого. Получим, $V – 4/8V = 1/2V$, т. е. $1{,}9 : 2 = 0{,}95$

Ответ: 0,95
Задача№2: ***Объём параллелепипеда равен 4,5. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1 .***

Решение. Решение этой задачи такое же как и предыдущей. Ведь пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрежем от параллелепипеда 4 пирамиды по углам – $ABCB_1$,
$D_1B_1CC_1$, $AA_1D_1B_1$, $ADCD_1$. А объём каждой из них легко посчитать – мы уже делали это.
Объём одной отсеченной пирамиды будет равен 1/6 объёма параллелепипеда.
Объём четырех всех пирамид будет равен 2/3 объёма параллелепипеда.
Значит, объём пирамиды AD_1CB_1 равен 1/3 объёма параллелепипеда.

Ответ: 1,5