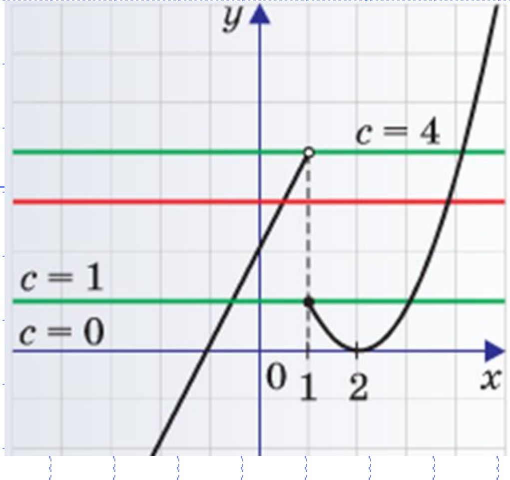
Задачи с параметром

Графический метод решения задач с параметром на ОГЭ
(типовые задачи №23 КИМ ОГЭ)

Подготовила:
учитель математики
МОУ «Гимназия №1»
г. Железногорска Курской области
Агашкова Н.А.



Задача №1. Найдите все значения k, при которых прямая y=kx пересекает в трех различных точках график функции:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7, \text{ если } x < -3 \\ -2, \text{ если } -3 \le x \le 3 \\ 3x - 11, \text{ если } x > 3 \end{cases}$$

Решение.

Построим график функции $f(x) = \begin{cases} 3x + 7, \text{ если } x < -3 \\ -2, \text{ если } -3 \le x \le 3 \\ 3x - 11, \text{ если } x > 3 \end{cases}$

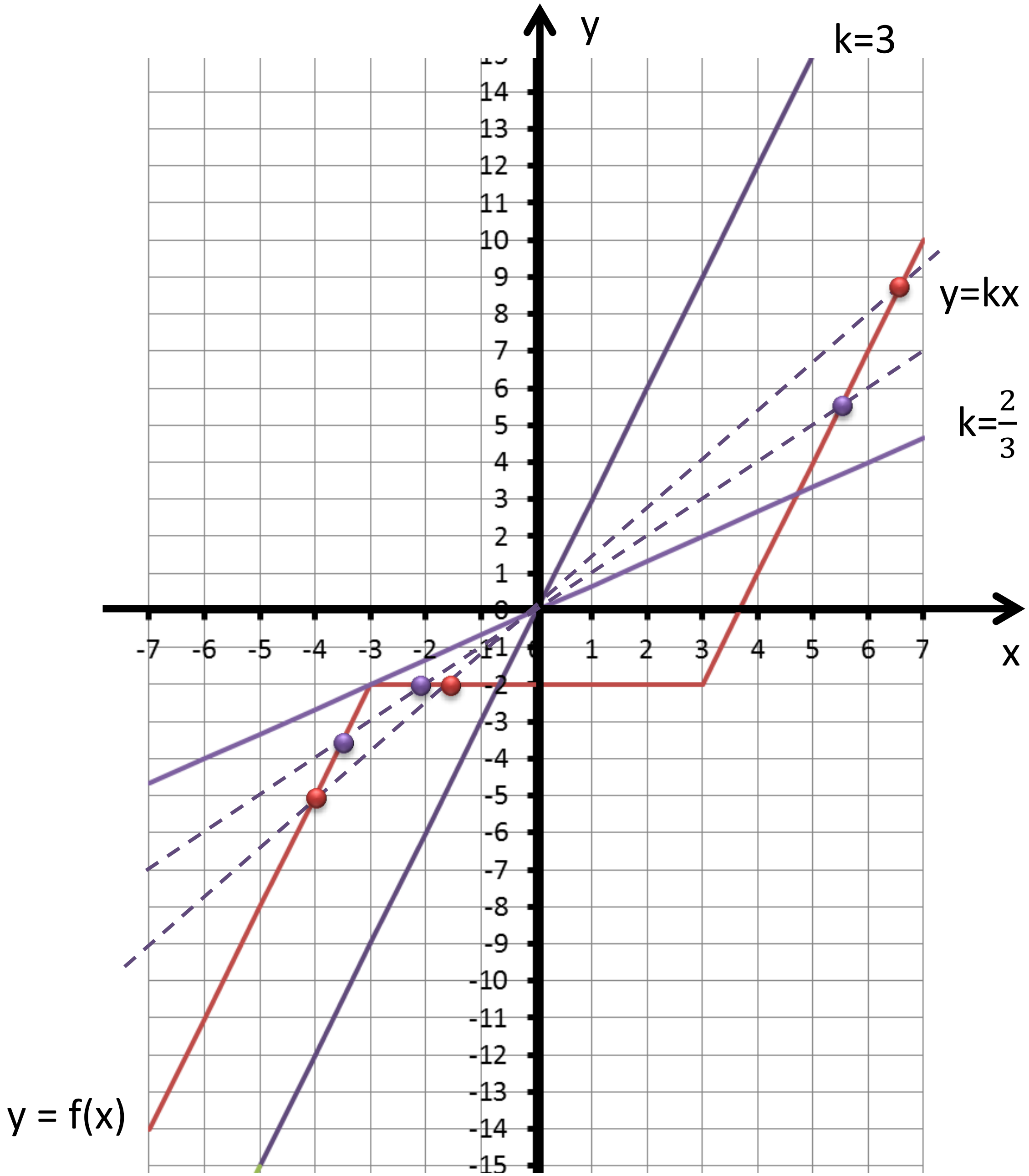
1) y=3x+7 , x< -3

x	-3	-5
y	-2	-8

2) y= -2, $-3 \le x \le 3$
3) y=3x-11 , $x > 3$

x	3	5
y	-2	4

4) y=kx – уравнение прямой, проходящей через начало координат


y
k=3
y=kx
k=2/3
x
y = f(x)

5) Прямая y=kx пересекает в трех различных точках этот график, если её угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку (-3;-2) и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямой y=3x+7 и y=3x-11

6) Найден угловой коэффициент прямой y=kx, проходящей через точку (-3;-2):

$$-3k = -2$$

$$k = \frac{2}{3}$$

7) Угловой коэффициент k прямой, параллельной прямой y=3x+7, равен 3.

Прямая y=kx имеет с графиком заданной функции три общие точки при $\frac{2}{3} < k < 3$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{2}{3} < k < 3}$

Задание для самостоятельного решения

Найдите все значения параметра k, при каждом из которых прямая *y=kx* пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условиями:

a) $$y = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x > 1, \\ 1, \text{ если } -2 \leq x \leq 1, \\ 2x + 5, \text{ если } x < -2. \end{cases}$$

Ответ: $k \in (1; 2)$

b) $$y = \begin{cases} 2x - 4, \text{если } x > 3, \\ 2, \text{если } -2 \leq x \leq 3, \\ 2x + 6, \text{если } x < -2\,. \end{cases}$$

Ответ: $k \in (\frac{2}{3}; 2)$

Задача №2 . При каких значениях р прямая у = р имеет три общие точки с графиком функции у = f(x),

$$где\ f(x) = \begin{cases} x(x-4), & \text{если } x \quad 0, \\ x(4-x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Решение.

Построим график функции

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4), & \text{если } x \geq 0, \\ x(4-x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

1) $y = x(x - 4) = x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) – 4 = (x – 2)^2 - 4$

$y = (x – 2)^2 - 4$, $x \geq 0$

(2; -4) - вершина параболы

x = 2 – ось симметрии параболы

2) $y = x(4 – x) = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x) = -[(x^2 - 4x + 4) – 4] = -[(x – 2)^2 - 4] =$

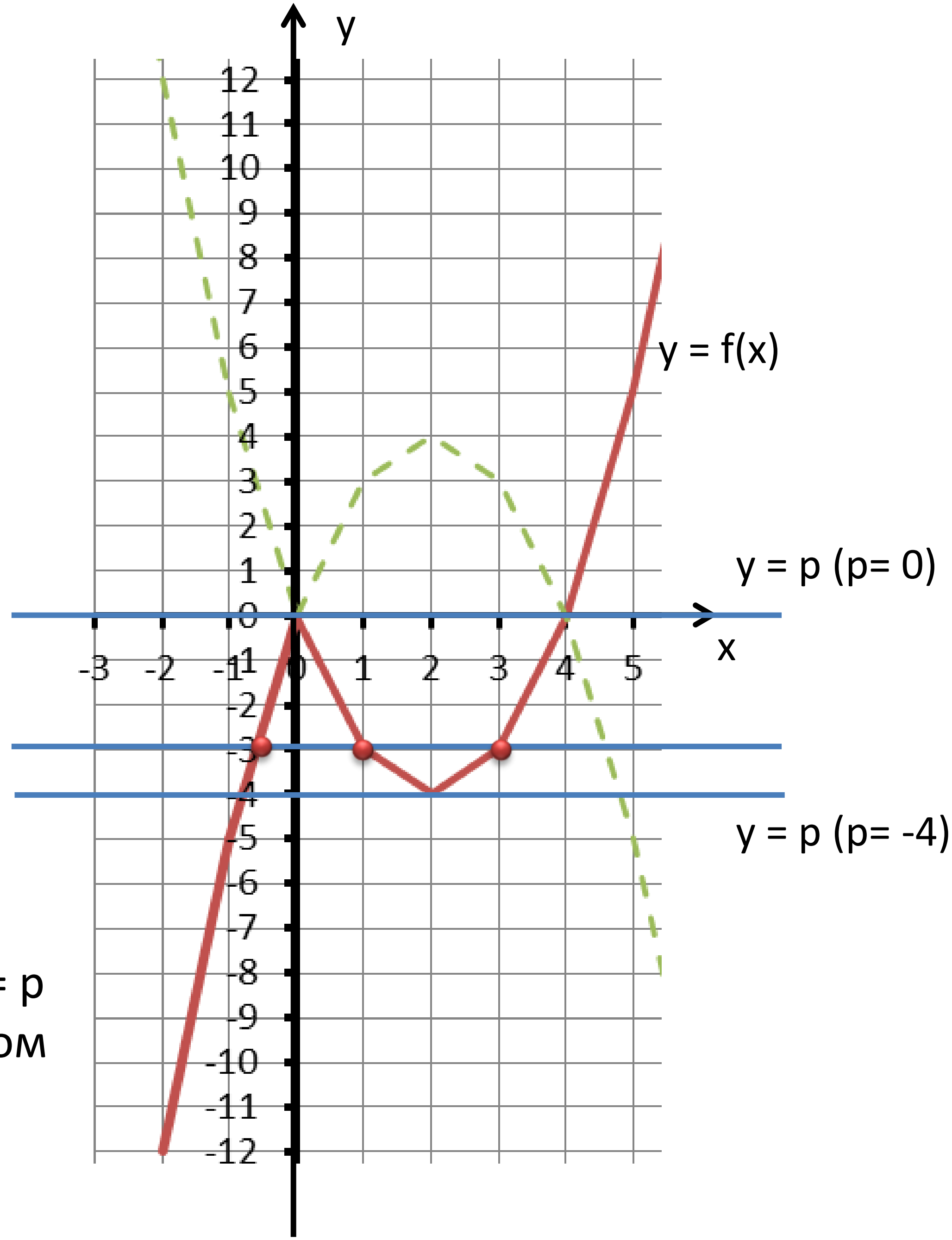
$= -(x - 2)^2 + 4$

$y = -(x - 2)^2 + 4$, $x < 0$

(2; 4) - вершина параболы

x = 2 – ось симметрии параболы

3) у = р - уравнение прямой, параллельной оси Ох



Из рисунка видно, что прямая y = p имеет три общие точки с графиком функции y = f(x) при -4 < p < 0

Ответ: **при -4 < p < 0**

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)(x+3), \text{если } x \leq 1, \\ (x-1)(x+3), \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции две общие точки.

Ответ: при $m = 0$; $m = 4$.

Задача №3. Сколько корней имеет уравнение

$|x^2-2x-3| = a$ в зависимости от значения параметра a?

Решение.

Решим графически. Построим график левой и правой части уравнения

$y = |x^2-2x-3|$ и $y = a$

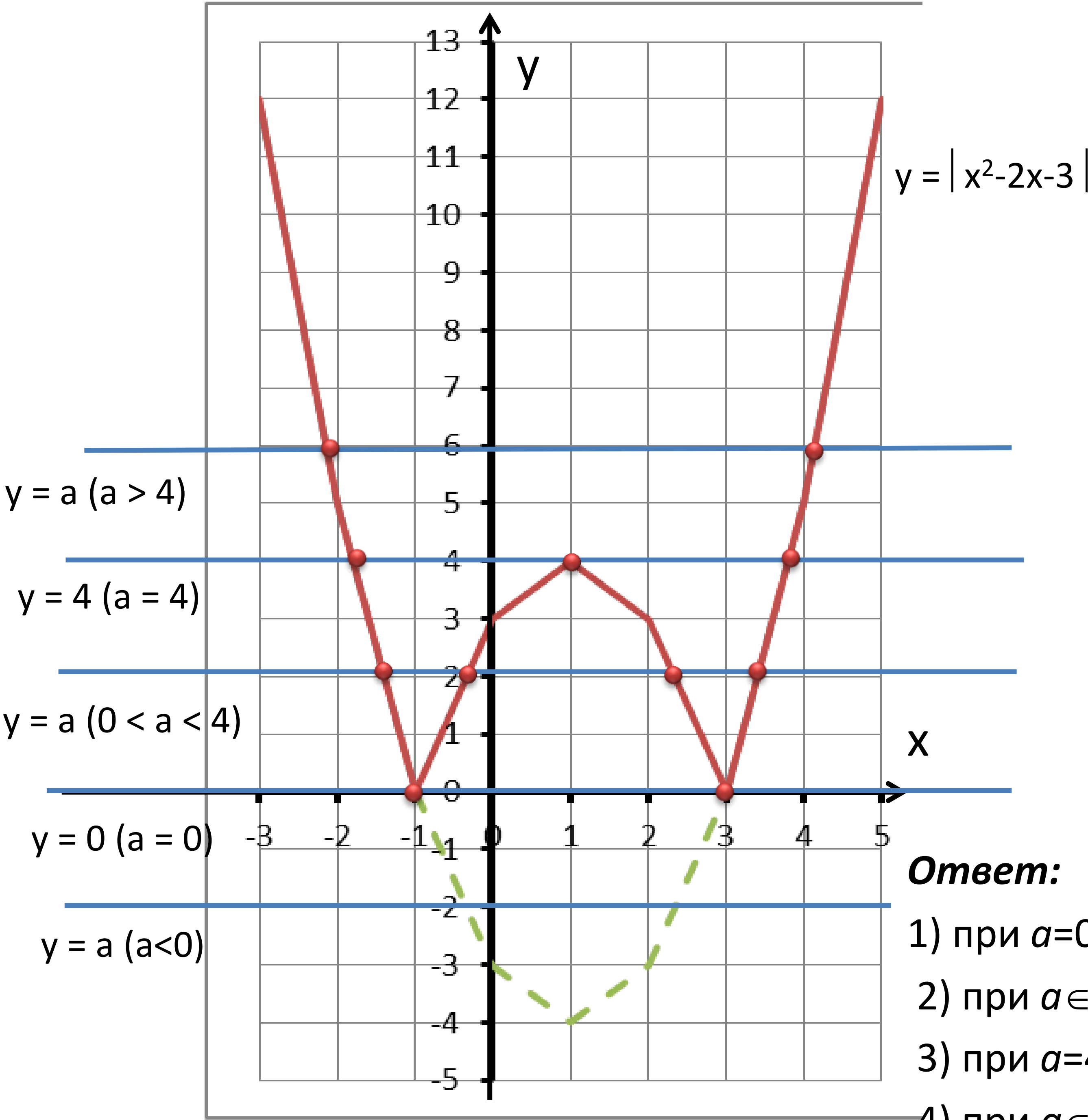
1) $y= x^2 - 2x-3=(x^2-2x+1)-1-3=(x-1)^2 -4$

$y = (x-1)^2 - 4$ –уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, так как $a=1>0$

(1;-4) – вершина параболы

2) Для того чтобы построить график функции **$y = |x^2-2x-3|$**, необходимо точки, лежащие на оси Ох и часть графика, находящуюся выше оси Ох, оставить без изменения, а часть графика находящуюся ниже оси Ох, симметрично отобразить в верхнюю полуплосктость.

3) **$y = a$** – уравнение прямой, параллельной оси Ох



Ответ:

1) при a=0, $a \in (4;+\infty)$ - два корня

2) при $a \in (0;4)$ - четыре корня

3) при a=4 - три корня

4) при $a \in (-\infty;0)$ - корней нет.

Задания для самостоятельного решения

1. Определите количество корней уравнения $|x^2 - 4x - 3| = a$ при всех положительных значениях параметра a .

Ответ: 4 корня при $0 < a < 7$;
3 корня при $a = 7$
2 корня при $a > 7$

2. Определите количество корней уравнения $|2x^2 + 4x - 7| = a$ при всех положительных значениях параметра a.

Ответ: 4 корня при $0 < a < 9$
3 корня при $a = 9$
2 корня при $a > 9$

Задача №4. Построить график функции $\boldsymbol{y=\frac{-x^2-6x-5}{x^2+8x+15}}$ и определите,

при каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ прямая $\boldsymbol{y=a}$ не имеет с графиком функции общих точек.

Решение.

Построим график функции

$$y=\frac{-x^2-6x-5}{x^2+8x+15}=-\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}=-\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}$$

1) $D(y)$: $x\neq-3$; $x\neq-5$;

2) $y=\frac{-x^2-6x-5}{x^2+8x+15}=-\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=-\frac{x+1}{x+3}=-\frac{x+3-2}{x+3}=$

$$=-\left(1-\frac{2}{x+3}\right)=\frac{2}{x+3}-1$$

3) $y = \frac{2}{x+3} - 1$

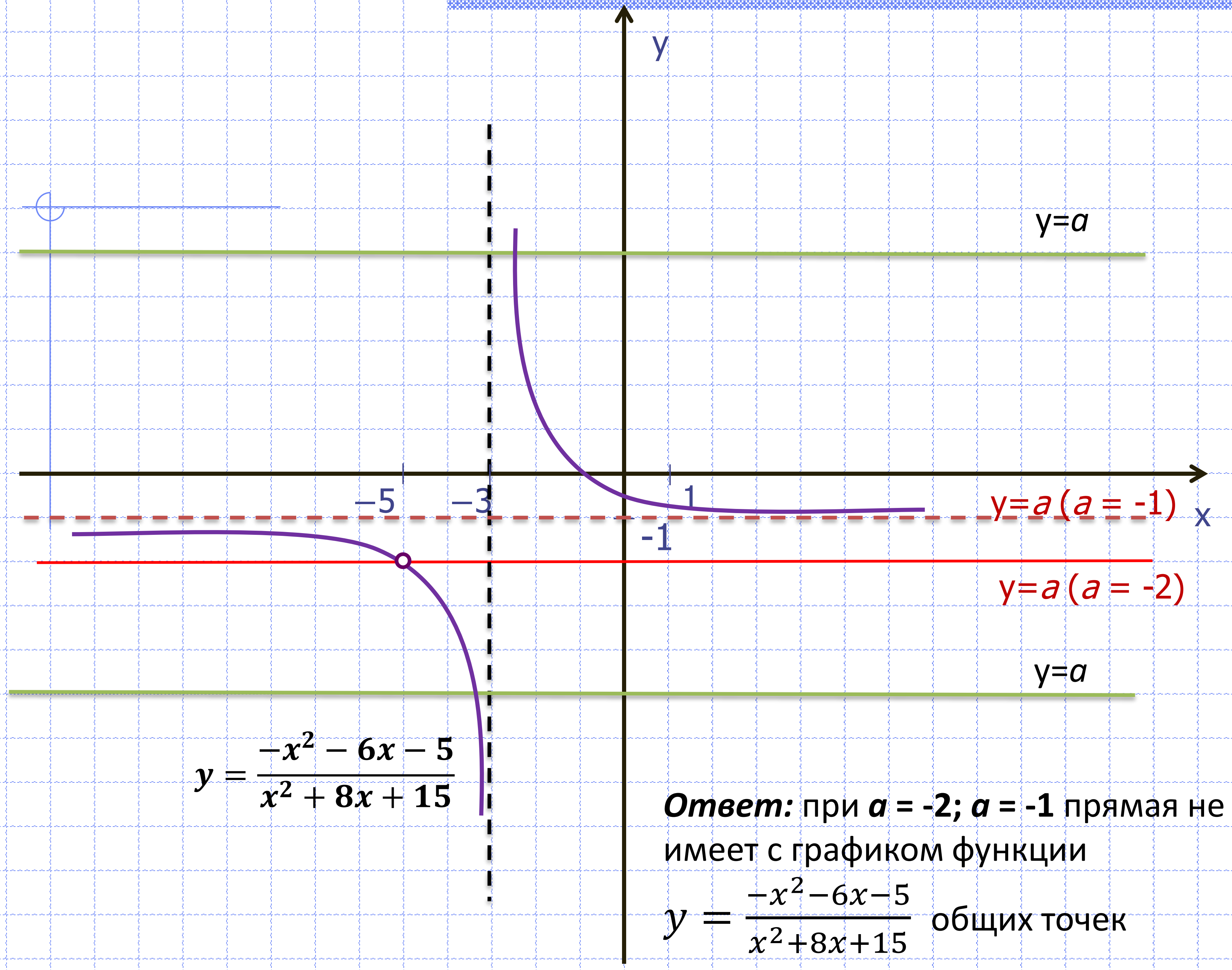
В новой системе координат с началом в точке $(-3; -1)$ построим гиперболу

$$y = \frac{2}{x}$$

Составим таблицу значений для графика функции $\boldsymbol{y = \frac{2}{x}}$ в новой системе координат

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4) y = *a* – уравнение прямой, параллельной оси Ox



Ответ: при ***a*** **= -2;** ***a*** **= -1** прямая не имеет с графиком функции

$$y = \frac{-x^2 - 6x - 5}{x^2 + 8x + 15}$$ общих точек

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции $y = \frac{-2x^2+17x-21}{x^2-5x-14}$

Найдите значения *b,* при которых прямая *y = b* не имеет с графиком данной функции общих точек

Ответ: при *b*= -2; *b*= -1$\frac{2}{9}$

2. Постройте график функции и определите, при каких значениях *a* прямая *y=a* не имеет с графиком ни одной общей точки

a) **y** = $\frac{4x^2-17x+4}{x^2-4x}$

Ответ: при *a* = 4; *a* =3$\frac{3}{4}$

b) **y** =$\frac{5x^2+14x-3}{x^2+3x}$

Ответ: при *a* = 5; *a* = 5$\frac{1}{3}$

Задача№5. Постройте график функции **y=** $\frac{3x+5}{3x^2+5x}$ и определите, при каких значениях ***k*** прямая ***y= kx*** имеет с графиком ровно одну общую точку

Решение.

Построим график функции $y = \frac{3x+5}{3x^2+5x} = \frac{3x+5}{x(3x+5)}$

1) $D(y)$: $x \neq 0$; $x \neq -\frac{5}{3}$

2) $y = \frac{3x+5}{3x^2+5x} = \frac{3x+5}{x(3x+5)} = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ – уравнение гиперболы

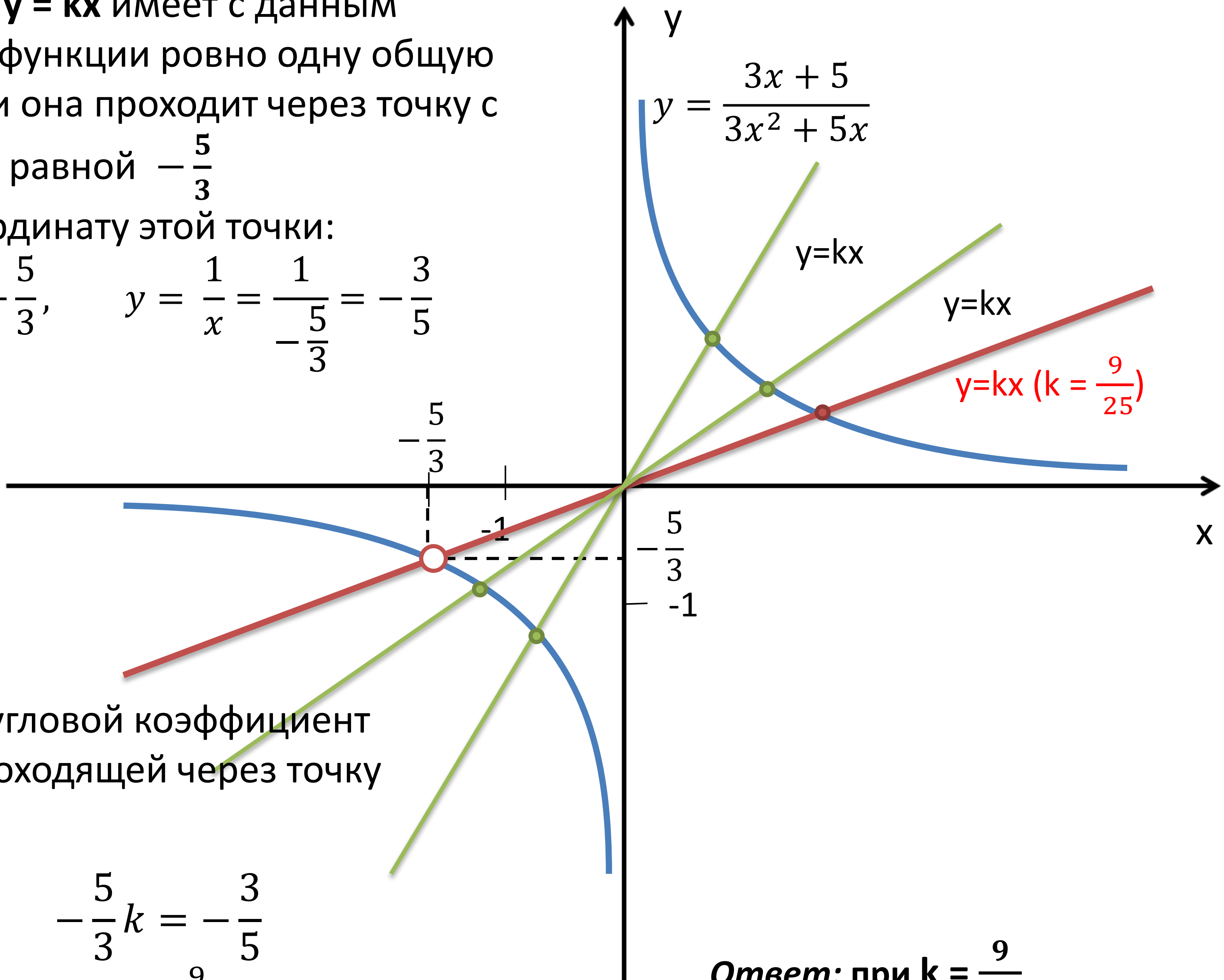
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3) $y=kx$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат

4) Прямая **y = kx** имеет с данным графиком функции ровно одну общую точку, если она проходит через точку с абсциссой равной $-\frac{5}{3}$

Найдем ординату этой точки:

$$x = -\frac{5}{3}, \qquad y = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$$



5) Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $(-\frac{5}{3}; -\frac{3}{5})$;

$$-\frac{5}{3}k = -\frac{3}{5}$$

k = $\frac{9}{25}$

Ответ: **при k =** $\frac{9}{25}$

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции и определите, при каких значениях ***k*** прямая ***y= kx*** имеет с графиком ровно одну общую точку

a) **y=** $\frac{9x+1}{9x^2+x}$

Ответ: при $k = 81$

b) **y=** $\frac{6x+7}{6x^2+7x}$

Ответ: при $k = \frac{36}{49}$

Задача №6. Постройте график функции у= $|x|(x+1)-5x$ и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение:

1. Построим график функции y=|x|(x+1)-5x

D(*y*)=R

Т.к функция содержит один знак модуля, то раскроем знак модуля по определению, получим:

$$y = \begin{cases} -x(x+1)-5x, \text{если } x < 0, \\ x(x+1)-5x, \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x^2-x-5x, \text{если } x < 0, \\ x^2+x-5x, \text{если } x \geq 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x^2-6x, \text{если } x < 0, \\ x^2-4x, \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

1) $y = -x^2 - 6x, x < 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad x_0 = \frac{6}{-2}; \quad x_0 = -3$$

$$y_0 = y(-3) = -9 + 6 \cdot 3 = 9$$

(-3;9) - вершина параболы $y = -x^2 - 6x$

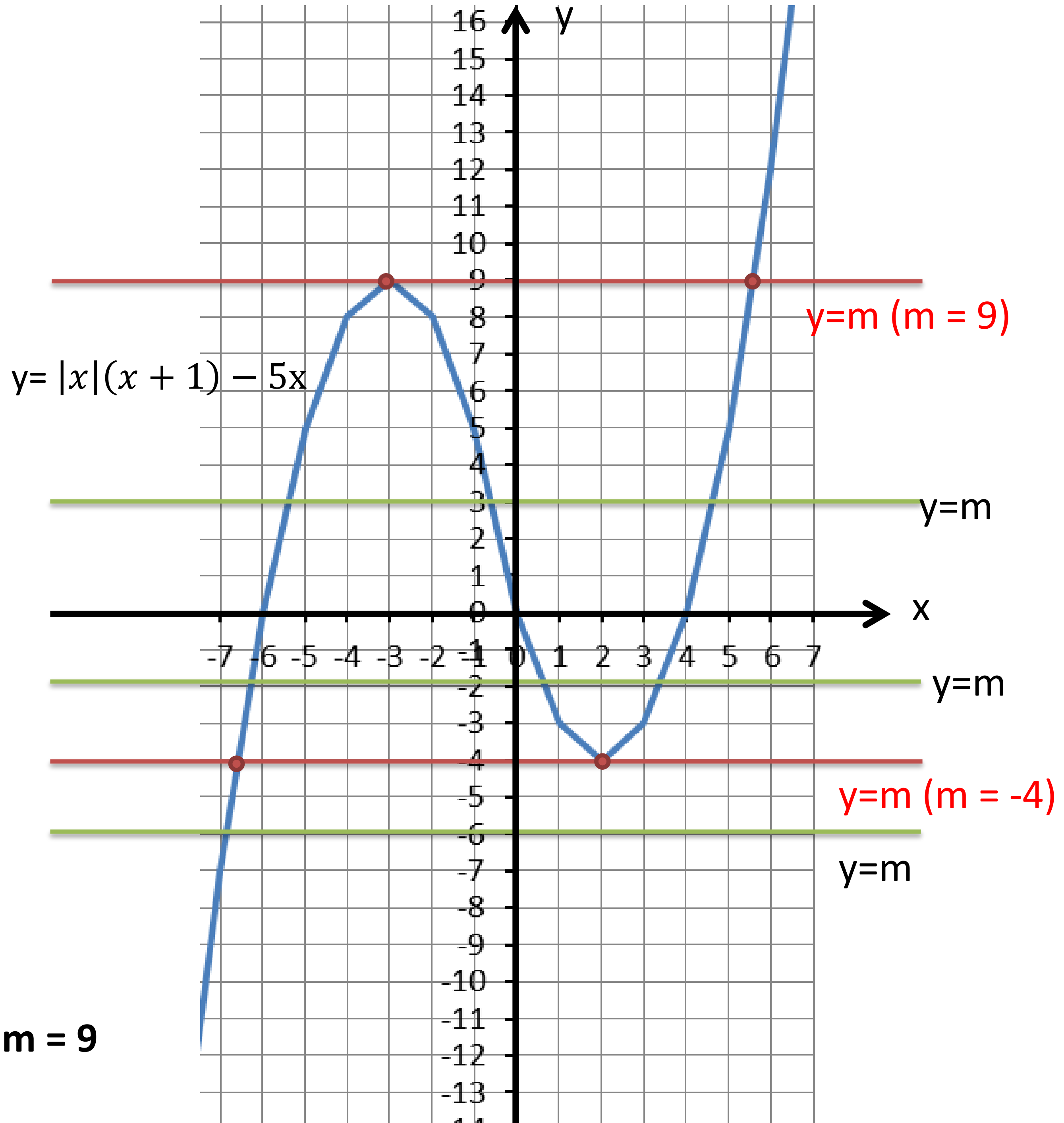
2) $y = x^2 - 4x, x \geq 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \qquad x_0 = \frac{4}{2}; \qquad x_0 = 2$$

$$y_0 = У(2) = 4 - 8 = -4$$

(2;-4) - вершина параболы $y = x^2 - 4x$

2. ***y = m*** - уравнение прямой, параллельной оси О*x*



Ответ: **при m = - 4; m = 9**

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции и определите, при каком значении **m** прямая **y=m** имеет с графиком ровно две общие точки

a) $y=|x|(x+1)-6x$

Ответ: при m = -6,25; m = 12,25

b) $y=|x|x-|x|-6x$

Ответ: при m = -12,25; m = 6,25

2. Постройте график функции $y=x^2-8x-4|x-3|+15$

и определите, при каких значениях **m** прямая **y=m** имеет с графиком ровно три общие точки

Ответ: при m=-1, m=0

Задача №7. Построить график функции $y = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек

Решение. $y = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2} = \frac{4|x|-1}{|x|-4|x|^2}$, т.к $x^2 = |x|^2$

1. D(y): $|x| - 4|x|^2 \neq 0$

$$|x|(1 - 4|x|) = 0$$

$$|x| \neq 0 \text{ или } 1 - 4|x| \neq 0$$

$$x \neq 0 \qquad 4|x| \neq 1$$

$$|x| \neq \frac{1}{4}$$

$$x \neq \pm\frac{1}{4}$$

2. y=$\frac{4|x|-1}{|x|-4|x|^2} = \frac{4|x|-1}{|x|(1-4|x|)} = -\frac{1}{|x|}$

y=$-\frac{1}{|x|}$

1) y= $-\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$- уравнение гиперболы

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

2) Для того чтобы построить график функции $y = -\frac{1}{|x|}$, необходимо точки, лежащие на оси Оу, и часть графика, лежащего правее на оси Оу, оставить без изменения, левую часть графика стереть. Для правой части графика построить симметричную относительно оси Оу.

3. $y = kx$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат.

4. Прямая y=kx не имеет с графиком функции общих точек, если она проходит через точки с абсциссами $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$. А так же когда совпадает с осью Ox, в этом случае k=0.

5. Найдем ординаты этих точек:

$x = -\frac{1}{4}$; $y = -\frac{1}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = -4$

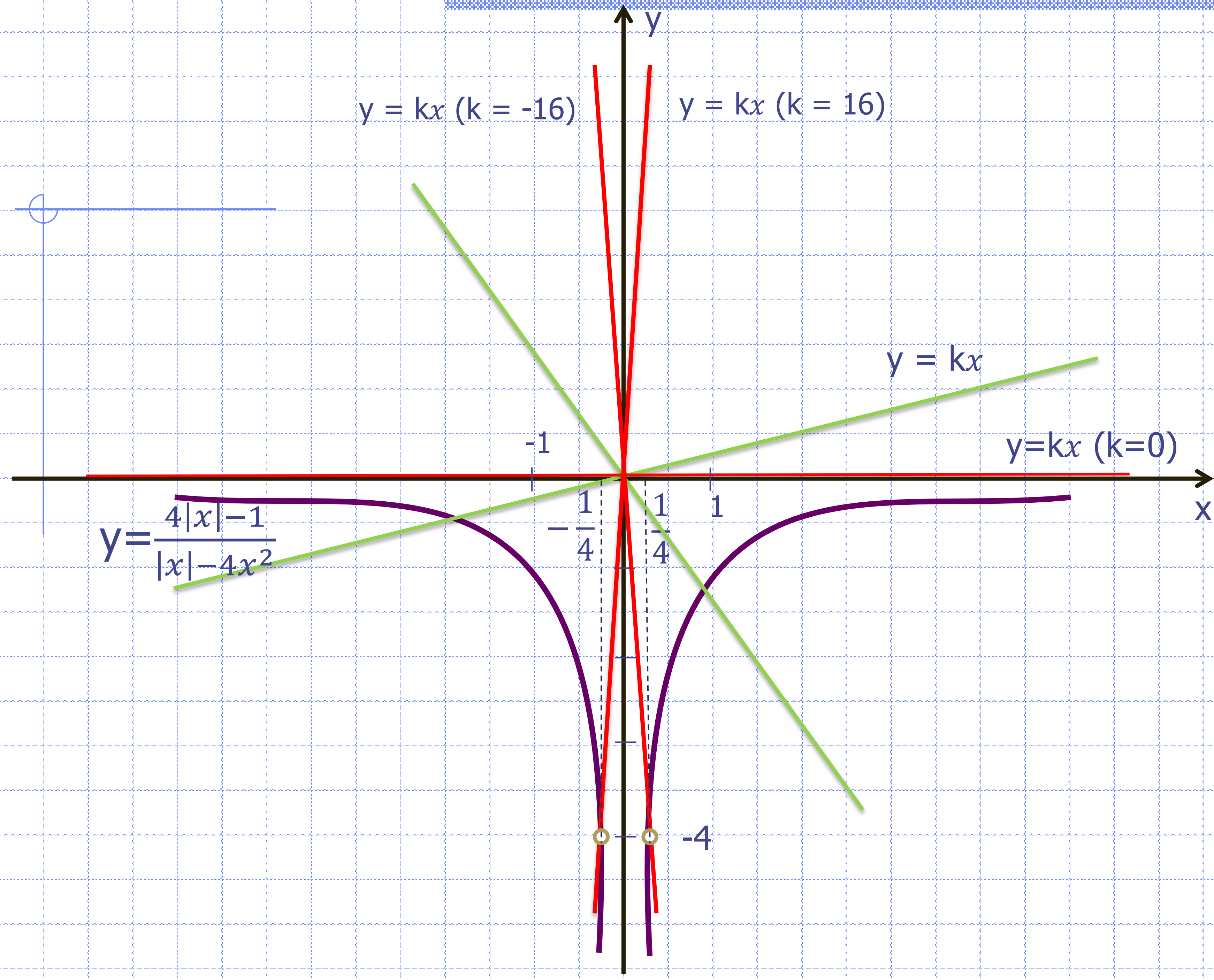
$x = \frac{1}{4}$; $y = -\frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} = -4$

6.Найдите угловой коэффициент прямой y=kx проходящий через точки $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; -4\right)$

$-\frac{1}{4}k = -4$ $\frac{1}{4}k = -4$

$k = 16$ $k = -16$

Ответ: **при k = -16; k = 0; k = 16**



y
$y = kx$ $(k = -16)$
$y = kx$ $(k = 16)$
$y = kx$
$y=kx$ $(k=0)$
-1
1
$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
x
$y=\frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$
-4

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте график функции $y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая y=kx не имеет с графиком общих точек

Ответ: при k = - 2,25; k = 0; k = 2,25

2. Постройте график функции $y = \frac{2{,}5|x|-1}{|x|-2{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая y=kx не имеет с графиком общих точек

Ответ: при k = - 6,25; k = 0; k = 6,25