муниципальное образовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №9

Проект по алгебре на тему: «Логарифмы с параметрами»

Авторы:

- Александрова Светлана Викторовна-учитель математики
- Учащийся 11 класса Герасимов Виталий.

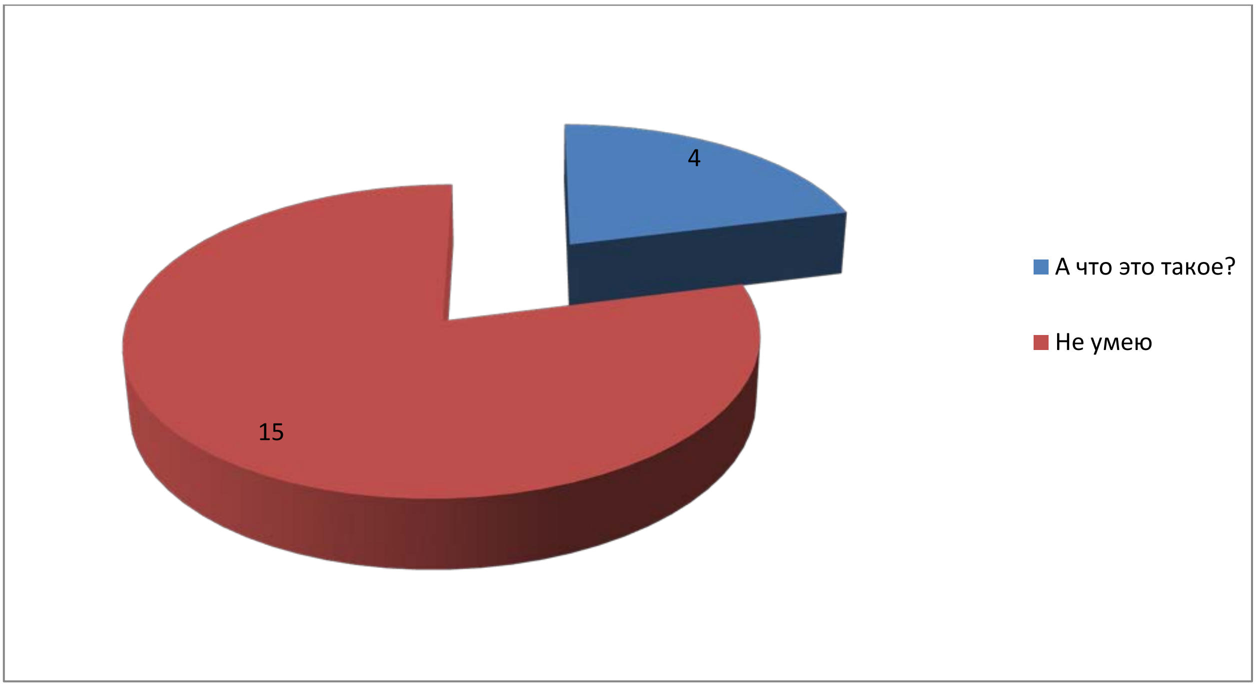
2013 год.

Введение.

- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Решение задач с параметрами вызывает большие трудности у учащихся, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. Между тем, параметрические уравнения, в том числе и логарифмические, входят в состав сборников ЕГЭ. А ЕГЭ сдавать придется каждому.
- Данный проект должен помочь в изучении таких интересных тем, как «Логарифмы» и «Параметры», а так же должен помочь при подготовке к единому государственному экзамену.

Анализ ситуации:

- Логарифмы, а тем более с параметрами – вещь очень сложная. Поэтому перед началом проекта был проведен опрос в нашем классе (22 человека, 6 не участвовали в опросе) : «Можете ли вы решать логарифмы с параметрами?».
- Результаты (представлены в диаграмме) оказались очень интересными:



Результаты опроса:

- Как мы видим из результатов опроса, логарифмические уравнения с параметрами особой популярностью не пользуются. Но это и не удивительно: чтобы их решать, нужно знать все о логарифмах.

Логарифмом положительного числа в по основанию а, где а>0,а≠1,называется показатель степени с, в которую нужно возвести число а ,чтобы получилось в.

$log_a b=c$, b>0, a>0, a≠1

$a^x=b$

Свойства логарифмов:

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

$$\log_a b^r=r\log_a b$$

$$\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$$

Параметры:

- С логарифмами и его свойствами разобрались, теперь приступим к *параметрам*.
- ***<u>Определение</u>***: *Параметрами называются переменные a, b, c, ..., k, которые при решении данного уравнения считаются постоянными.*
- *Решить уравнение, содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения*

Виды логарифмических уравнений с параметрами:

Логарифмические уравнения с параметрами можно разделить на три вида в зависимости от местоположения параметра:

- **Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении.**
- **Уравнения, содержащие параметры в основании.**
- **Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении.**

Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении:

1.Решить при всех a: $\mathbf{\log_{x+1}(x^2 + a) = 2}$.

Решение:

Из определения логарифма следует, что $x + 1 > 0$, $x + 1 \neq 1$ и $x^2 + a > 0$. Получаем уравнение $x^2 + a = (x + 1)^2$. Из ограничения $x + 1 > 0$ следует, что $x^2 + a > 0$. Следовательно, нужно найти решения уравнения $x^2+a= =(x+1)^2$, удовлетворяющие неравенствам $x + 1 > 0$ и $x \neq 0$.

Раскроем скобки в правой части уравнения: $x^2 + a = x^2 + 2x + 1$.
Вычитая $x^2 + 2x + a$ из обеих частей уравнения, находим $-2x = 1 - a$,откуда получаем: x=

Из ограничения $x + 1 > 0$ следует >0, откуда $a - 1 + 2 > 0$. Значит, $a > -1$. Из ограничения $x \neq 0$ находим ≠0 , что влечет $a \neq 1$.

Ответ: Если $a > -1$, $a \neq 1$, то одно решение x= .
Если $a \leq -1$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры в основании:

2.Решить при всех a: $\mathbf{\log_a(x^2+2x-8)=2}$

Решение:

Из определения логарифма следует, что

$a\neq1$, $a>0$, $x^2+2x-8>0$($x<-4$; $x>2$). Значит, требуется решить уравнение $a^2=x^2+2x-8$. Решая это уравнение, получаем x= или x= . Подкоренное выражение положительно при всех значениях a, поэтому дальнейших ограничений не последует.

Ответ: Если $a > 0$, $a \neq 1$, то x= .

Если $a \leq 0$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении:

3.Решить при всех *a* уравнение $\mathbf{\log_a(ax + 1) = 1}$.

Решение:

Из определения логарифма следует, что $a > 0$, $a \neq 1$, $ax + 1 > 0$. Получаем уравнение $ax + 1 = a$. Заметим, что так как $a > 0$, то $ax + 1 = a > 0$. Следовательно, надо решить уравнение $ax + 1 = a$ при ограничениях на параметр a: $a > 0$, $a \neq 1$. Вычитая из обеих частей уравнения единицу, получим $ax = a - 1$. Так как $a > 0$, то уравнение имеет единственное решение x= .

Ответ: При $a \leq 0$ и $a = 1$ решений нет.

При $a > 0$ и $a \neq 1$ одно решение x= .

С2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1) = 0$ не имеет корней.

Решение:

С2. $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} + 1) = 0$

Уравнение не имеет корней, если

$$\left[\begin{array}{l} \cos x - a < 0, \\ \cos x - a = 1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant \cos x, \\ a = \cos x \neq -1. \end{array}\right.$$

По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} + 1 = 1.$$

Найдём $\cos x$.

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}(\sin^2 x + \sin x + 1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}(2\sin^2 + \sin x) = 0,$$

$$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}\sin x(2\sin x + 1) = 0,$$

$$(2\sin x + 1)(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0,$$

1. $2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x = -\cos x$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдём значение a, решив систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right), \\ \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right).$

С5. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a+9)(y-1)^2 - 2ay, \\ (x^2+1)\lg(y-1) = x^3 + x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения

Решение:

$\lg(y-1) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}$, $y - 1 = 10^x$, $y = 10^x + 1$.

Подставим $y = 10^x + 1$ в первое уравнение системы

$2 \cdot 10^{3x} + 16 - a^2 - 2a = (2a+9) \cdot 10^{2x} - 2a(10^x + 1)$.

$a^2 + 2a - 16 - 2 \cdot 10^{3x} + 2a \cdot 10^{2x} + 9 \cdot 10^{2x} - 2a \cdot 10^x - 2a = 0$.

$a^2 - 2(10^x - 10^{2x})a - (2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16) = 0$.

$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm \sqrt{10^{2x} - 2 \cdot 10^{3x} + 10^{4x} + 2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16}$.

$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm (10^{2x} - 4)$, $10^{2x} - 4 \neq 0$, $10^x \neq 2$.

$a_1 = 10^x - 4$, $a_2 = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4$.

1. $10^x = a + 4$, $a + 4 > 0$, $a > -4$.

Так как $10^x \neq 2$, то $a \neq -2$.

Система имеет одно решение при $a > -4$, $a \neq -2$

2. $a = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4$ (1)

По условию система имеет ровно два различных решения. Найдём, при каких значениях a уравнение (1) имеет единственный корень. Рассмотрим функцию $y = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4$, $10^x = t$, $t > 0$.

$y = -2t^2 + t + 4$, $t_0 = -\dfrac{1}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{1}{4}$, $y\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + 4 = \dfrac{33}{8}$ (см. рис. 121).

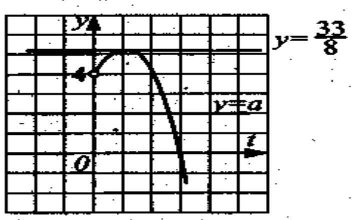


Рис. 121.

Уравнение (1) имеет единственный корень при $a = \dfrac{33}{8}$ и при $a \leqslant 4$.

Итак, исходная система имеет ровно два решения, если $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\dfrac{33}{8}\right\}$.

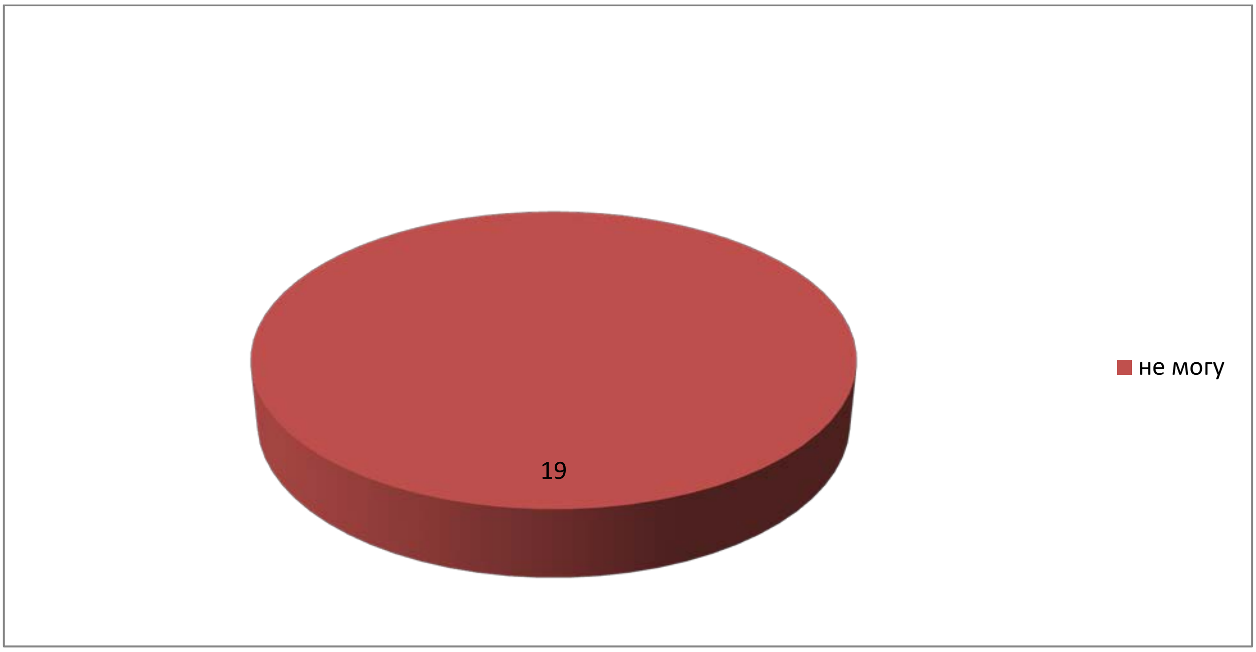
Ответ: $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\dfrac{33}{8}\right\}$.

Что дал этот проект?

В процессе работы мы овладели начальными навыками решений параметрических уравнений, научились решать логарифмические уравнения с параметрами. Эта работа позволила нам лучше изучить и запомнить все свойства логарифмов. А главное, мы окончательно убедились в том, что **есть вещи похуже проектной по технологии.**

Результаты повторного опроса:

По окончанию данного проекта был проведен повторный опрос на тему «Можете ли вы решать логарифмические уравнения с параметрами?». Результаты оказались намного лучше предыдущих: теперь все 100% (22 человек) ответили «не могу».



Используемая литература :

1. С.И.Колесникова «Решение сложных задач ЕГЭ» 300 задач с подробным решением. Издательство Москва Айрис пресс 2009 год.
2. Г.А.Воронина Практическое руководство для учителя «Элективные курсы»
   Издательство Москва Айрис пресс 2008 год
3. Ю.Н.Макаров, Н.Г.Миндюк «Дополнительные главы к школьному учебнику»
   9-11 класс, Москва Просвещение, 1997г.
4. КИМы ЕГЭ за 2012-2013 года.
5. А.Г. Мерзляк и др. «Алгебраический тренажер»., Москва «Илекс», 2005г.
6. А В Ефремов «Универсальные математические методы», Казань БФ КГТУ, 2010 год.
7. А.Г. Корянов 2012 задания $С_1$ – $С_5$ Методы решения (электронный ресурс)