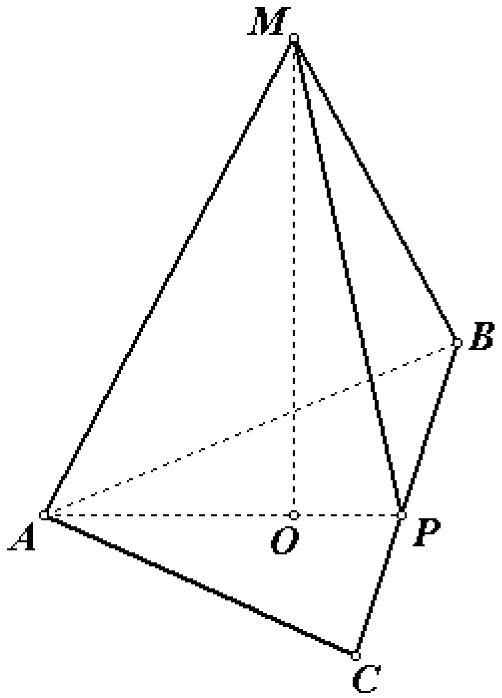
РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
(по материалам ЕГЭ)

Задача №1. Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной вокруг основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$.



Решение.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

1) найдем сторону основания правильной пирамиды по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

2) найдем площадь основания, как площадь правильного треугольника $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

3) вычислим объём пирамиды

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 9$.

Ответ. 9

Задача №2. Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, если радиус вписанной в основание окружности равен $\sqrt{3}$, а боковые ребра пирамиды равны 6.

Решение. $V = \frac{1}{3} S \cdot H$

1) радиус вписанной в правильный треугольник окружности в 2 раза меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности, т.е. $R = 2r$, тогда $R = 2\sqrt{3}$.

2) найдем сторону основания правильной пирамиды по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

3) найдем площадь основания, как площадь правильного треугольника $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{36\sqrt{3}}{4}$.

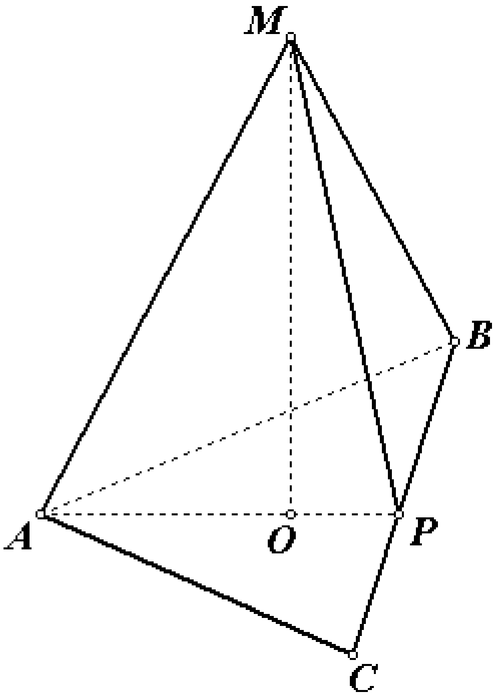
4) из прямоугольного треугольника AOM по теореме Пифагора находим высоту пирамиды: $H = \sqrt{AM^2 - AO^2}$, $H = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

5) вычислим объём пирамиды

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}$.

Ответ. $18\sqrt{2}$.

Задача №3. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной около основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равны 1.



Решение.

$$S = \frac{1}{2} P \cdot h$$

1) найдем сторону основания правильной пирамиды по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

2) найдем периметр основания Р = 3·a, Р = 9.

3) радиус вписанной в правильный треугольник окружности в 2 раза меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности, т.е. $R = 2r$, тогда $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) из прямоугольного треугольника MOP по теореме Пифагора находим апофему MP: $MP = \sqrt{MO^2 + OP^2}$,

$$MP = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

5) вычислим площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$S = \frac{1}{2} P \cdot h$, $S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Ответ. $\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Задача №4. Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а апофема пирамиды равна $\sqrt{15}$.

Решение. $V = \frac{1}{3} S \cdot H$,

1) найдем радиус описанной около основания и вписанной в основание окружностей: $a = R\sqrt{3}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{R}{2}$ то есть $R = \frac{6}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

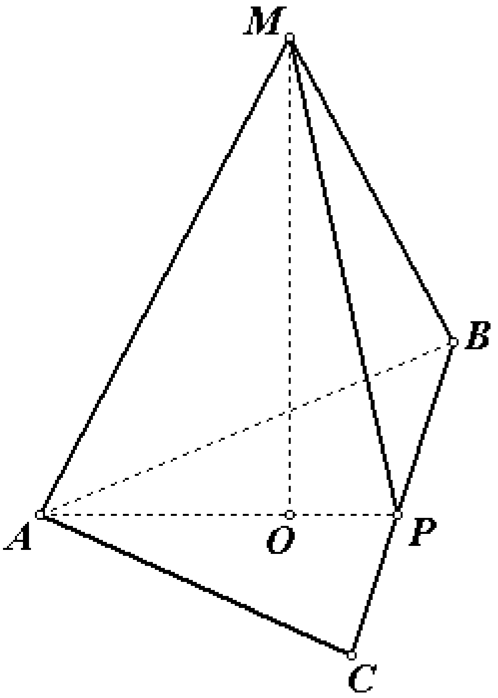
2) найдем площадь основания, как площадь правильного треугольника $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

3) из прямоугольного треугольника MOP по теореме Пифагора находим высоту: $MO = \sqrt{MP^2 - OP^2}$, МО = $\sqrt{15 - 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

4) вычислим объём правильной пирамиды: $V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$.

Ответ. 18.

Задача №5. Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, если радиус вписанной в основание окружности равен 2, а высота правильной пирамиды равна $3\sqrt{3}$.



Решение. $V = \frac{1}{3} S \cdot H$

1) радиус вписанной в правильный треугольник окружности в 2 раза меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности, т.е. $R = 2r$, тогда $R = 2 \cdot 2 = 4$.

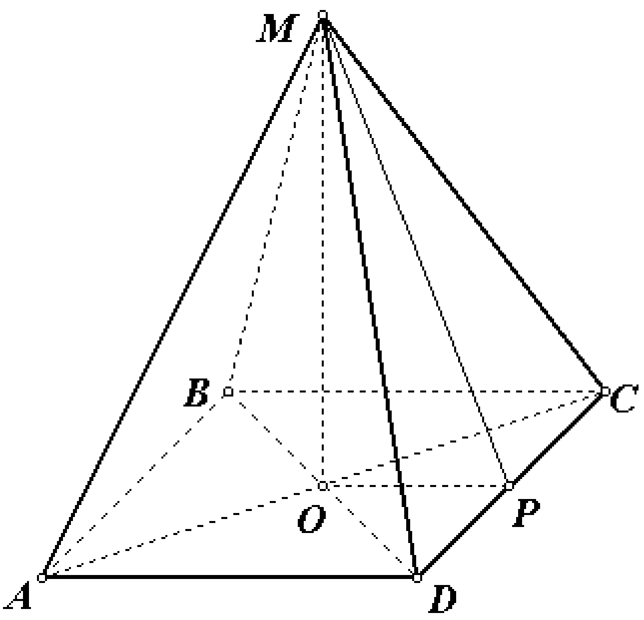
2) найдем сторону основания правильной пирамиды по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = 4\sqrt{3}$.

3) найдем площадь основания, как площадь правильного треугольника $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$.

4) вычислим объём правильной пирамиды: $V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 36$.

Ответ. 36.

Задача №6. Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если её ребра равны 5, а радиус окружности, описанной вокруг основания равен $3\sqrt{2}$.



Решение. $S = \frac{1}{2} P \cdot h$

1) найдем сторону основания по формуле $a = R\sqrt{2}$, т.е. $a = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$.

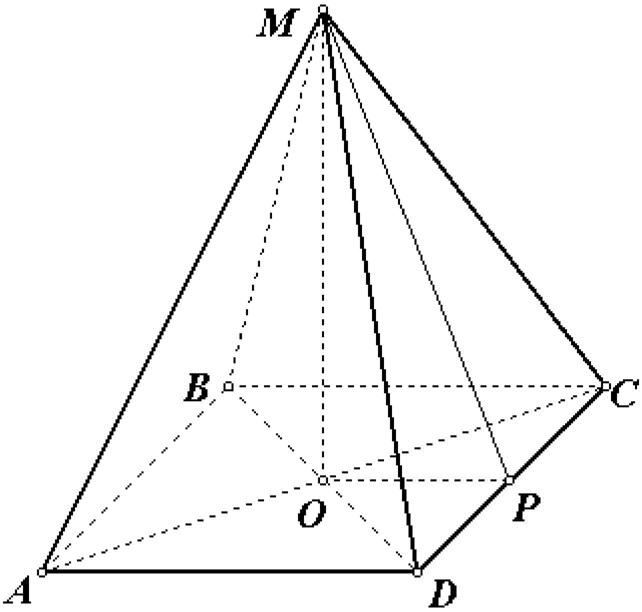
2) найдем периметр основания: $P = 4a$, P = 24.

3) из прямоугольного треугольника MDP по теореме Пифагора находим апофему MP: $MP = \sqrt{MD^2 - DP^2}$,$DP = \frac{a}{2}$ тогда: $MP = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

4) вычислим площадь боковой поверхности пирамиды: $S = \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 = 48$.

Ответ. 48.

Задача №7. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна $16\sqrt{2}$, а площадь основания 4. Найдите высоту пирамиды.



Решение.

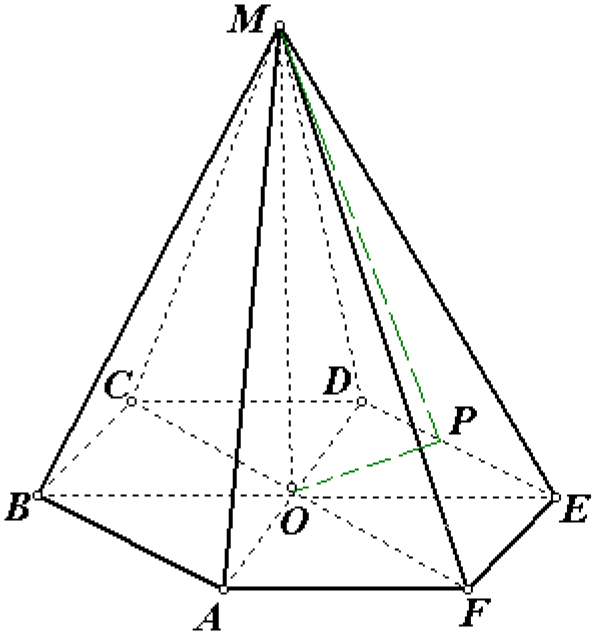
1) найдем сторону основания: так как в основании пирамиды квадрат с площадью равной 4, то сторона квадрата равна 2, а его периметр 8.

2) по условию $S = \frac{1}{2}P \cdot h = 16\sqrt{2}$ т.е. $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h = 16\sqrt{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$.

3) из прямоугольного треугольника MOP по теореме Пифагора находим высоту: $MO = \sqrt{MP^2 - OP^2}$, учитывая, что OP = $\frac{1}{2}a$ = 1, получаем: MO = $\sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{31}$.

Ответ. $\sqrt{31}$.

Задача №8. Вычислите объём правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 4, а боковые ребра пирамиды равны 5.



Решение. $V = \frac{1}{3}S \cdot H$

1) сторона основания правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности т.е. $a = R$, $R = 4$

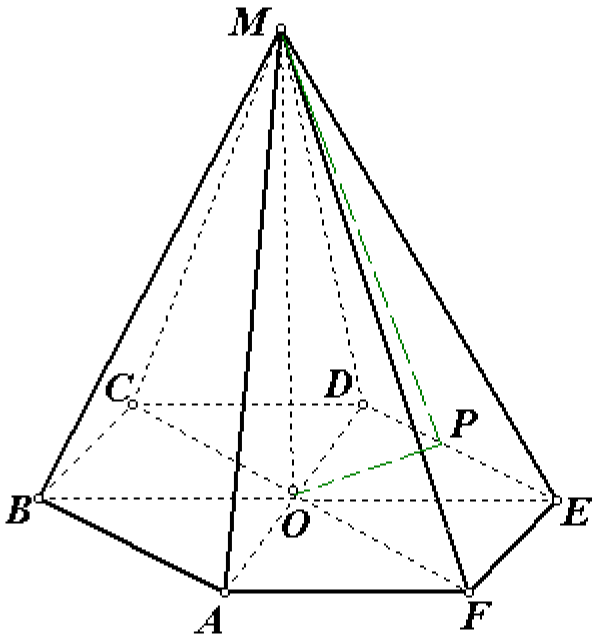
2) площадь правильного шестиугольника найдем по формуле $S = 6 \cdot S_\Delta$ или $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 24\sqrt{3}$.

3) из прямоугольного треугольника MOB найдем высоту MO:
$MO = \sqrt{BM^2 - BO^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.

4) вычисляем объём пирамиды: $V = \frac{1}{3}S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 3 = 24\sqrt{3}$.

Ответ. $24\sqrt{3}$.

Задача №9. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{2}$, а боковое ребро равно $2\sqrt{5}$. Найдите объём пирамиды.



Решение.

$V = \frac{1}{3} S \cdot H$

1) найдем площадь правильного шестиугольника по формуле $S = 6 \cdot S_{\Delta}$ или $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 12\sqrt{3}$.

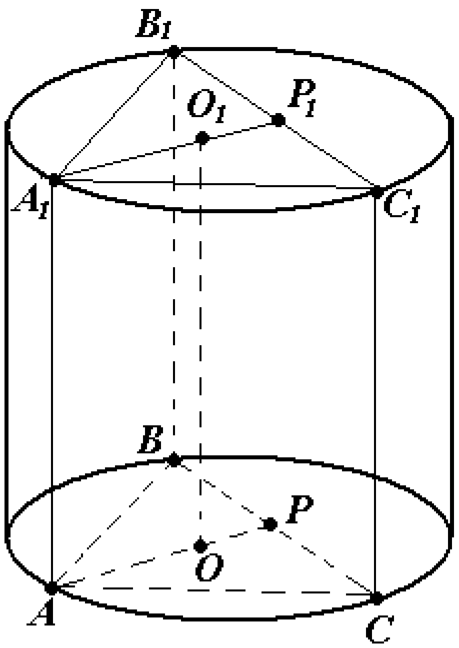
2) из прямоугольного треугольника MOB найдем высоту MO, учитывая, что в правильном шестиугольнике $a = R$: $MO = \sqrt{BM^2 - BO^2} = \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3) вычисляем объём пирамиды:

$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$.

Ответ: 24.

Задача № 10. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота цилиндра равна 5, а радиус его основания R удовлетворяет уравнению $R^2 + R - 6 = 0$. Найдите объём призмы. $3\sqrt{3}$



Решение. $V = S \cdot H$

1) так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание призмы вписано в основание цилиндра, $H = 5$.

2) по условию R удовлетворяет уравнению $R^2 + R - 6 = 0$, решая которое находим $R_1 = -3$, $R_2 = 2$, так как радиус величина положительная то -3 не удовлетворяет условию задачи.

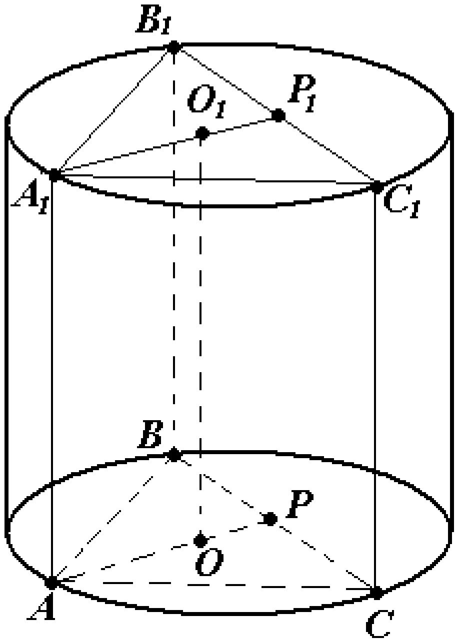
3) найдем сторону вписанного правильного треугольника по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3}$.

4) найдем площадь основания правильной призмы, как площадь правильного треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$

5) вычислим объём призмы: $V = S \cdot H = 3\sqrt{3} \cdot 5 = 15\sqrt{3}$.

Ответ. $15\sqrt{3}$.

Задача №11. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и стороной основания призмы равно $\sqrt{3}$. Высота цилиндра равна трем его радиусам. Найдите объём призмы.



Решение. $V = S \cdot H$

1) Так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание призмы вписано в основание цилиндра, по условию $H = 3R$..

2) Расстояние между осью цилиндра и стороной основания призмы равно радиусу вписанной в треугольник ABC окружности, т.е. $r = OP$, и по условию равно $\sqrt{3}$.

3) радиус вписанной в правильный треугольник окружности в 2 раза меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности, т.е. $R = 2r$, тогда $R = 2\sqrt{3}$.

4) найдем сторону вписанного правильного треугольника по формуле $a = R\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

5) найдем площадь основания правильной призмы, как площадь правильного треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

6) вычислим объём призмы: $V = S \cdot H = S \cdot 3 \cdot R = 9\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 162$.

Ответ. 162.

Задача №12. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16 π. Найдите объём призмы, если сторона её основания равна 5.

Решение. $V = S \cdot H$

1) Так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание призмы вписано в основание цилиндра.

2) Найдем площадь основания правильной призмы, как площадь правильного треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

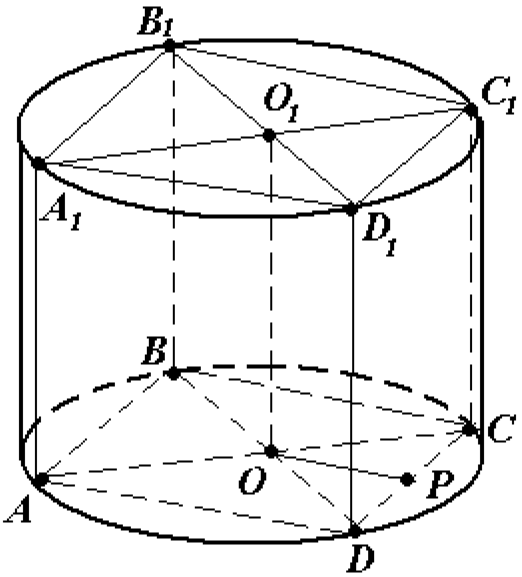
3) Сторона вписанного правильного треугольника находится по формуле $a = R\sqrt{3}$, тогда $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

4) По условию площадь боковой поверхности цилиндра равна $16 \cdot \pi$ т.е. $2\pi RH = 16\pi$, откуда $H = \dfrac{16\pi}{2\pi R} = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

5) Вычислим объём призмы: $V = S \cdot H = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{5} = 30$.

Ответ. 30.

Задача №13. Около правильной четырехугольной призмы описан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 20π. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение. $S = P \cdot H$

1) Так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание призмы вписано в основание цилиндра.

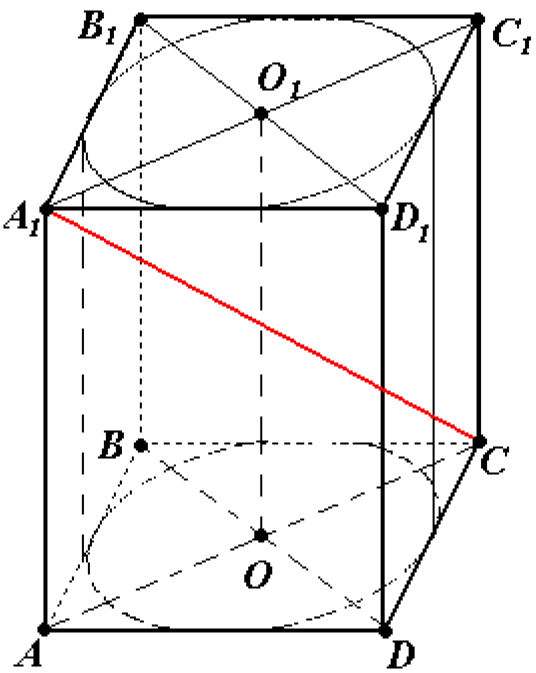
2) По условию площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π, т.е. $2\pi RH = 20\pi$, $RH = 10$.

3) так как призма правильная, то в её основании лежит квадрат, со стороной $a = R\sqrt{2}$, тогда периметр основания равен $4R\sqrt{2}$.

4) вычислим площадь боковой поверхности призмы $S = P \cdot H =$ $4R\sqrt{2} \cdot H = 4\sqrt{2} \cdot RH = 4\sqrt{2} \cdot 10 = 40\sqrt{2}$.

Ответ. $40\sqrt{2}$.

Задача №14. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Объем цилиндра равен $16\pi\sqrt{2}$, а радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, равен $2\sqrt{2}$. Найдите диагональ призмы.



Решение. 1) Так как цилиндр вписан в призму, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание цилиндра вписано в основание призмы.

2) Так как радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, равен $R = 2\sqrt{2}$, то сторона квадрата равна $a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$ а радиус цилиндра равен, радиусу вписанной в квадрат окружности и равен: $r = \frac{a}{2} = 2$

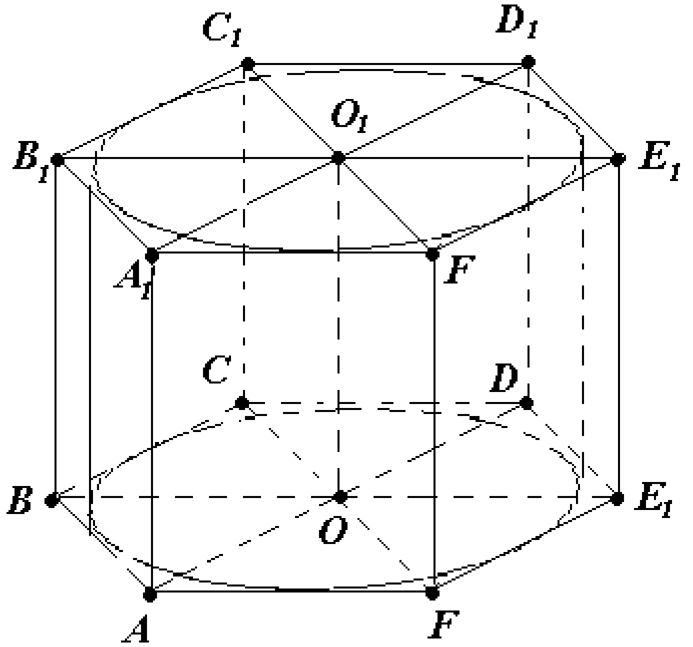
3) По условию объём цилиндра равен $16\pi\sqrt{2}$, т.е. $\pi r^2 H = 16\pi\sqrt{2}$, $H = \frac{16\sqrt{2}}{r^2} = 4\sqrt{2}$.

4) Из прямоугольного треугольника ACA_1 находим диагональ A_1C :

$A_1C = \sqrt{H^2 + (2R)^2} = \sqrt{32 + 32} = \sqrt{64} = 8$.

Ответ. 8.

Задача №15. В правильную шестиугольную призму вписан цилиндр. Найдите высоту призмы, если её площадь равна 54 $\sqrt{3}$, а радиус цилиндра равен 3.



Решение.

1) Так как цилиндр вписан в призму, то высота призмы равна высоте цилиндра, а основание цилиндра вписано в основание призмы.

2) по условию радиус цилиндра r равен 3, тогда $R = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$, $R = 2\sqrt{3}$.

3) сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности, т.е. $a = R = 2\sqrt{3}$.

4) по условию площадь призмы равна 54 $\sqrt{3}$, т.е.

$P_{осн.} \cdot H + 2\,S_{осн} = 54\sqrt{3}$.

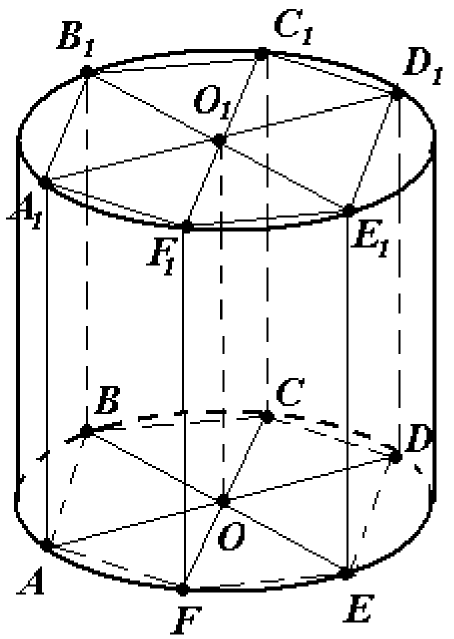
5) найдем периметр основания и его площадь: $P = 6 \cdot a = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

$S_{осн} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 18\sqrt{3}$.

6) подставим полученные значения в формулу $P_{осн.} \cdot H + 2\,S_{осн} = 54\sqrt{3}$ и получим $H = (54\sqrt{3} - 36\sqrt{3}) : 12\sqrt{3} = 1{,}5$.

Ответ. 1,5.

Задача № 16. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Объём цилиндра равен 16 π, высота цилиндра равна 4. Найдите объём призмы.



Решение. $V = S \cdot H$

1) Так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра, т.е. $H = 4$.

2) по условию $V = 16\pi$, т.е.

$\pi R^2 H = 16\pi \Rightarrow R^2 = \dfrac{16\pi}{\pi H}$, $R = 2$.

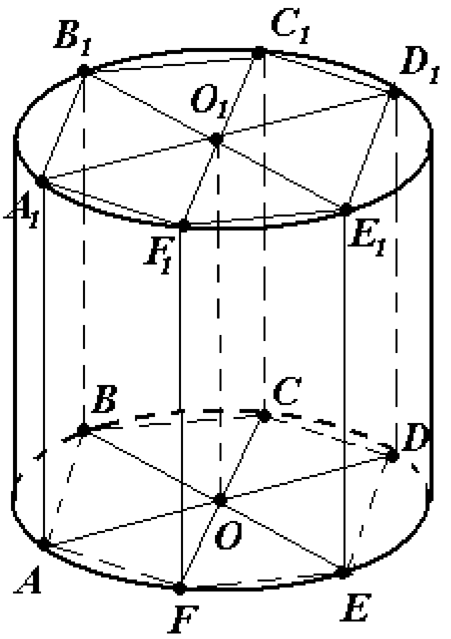
3) так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности, то $a = 2$.

4) Найдем площадь основания призмы по формуле: $S = \dfrac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

5) вычислим объём призмы: $V = 6\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

Ответ. $24\sqrt{3}$.

Задача №17. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Объём цилиндра равен 10 π. Найдите объём цилиндра, вписанного в эту же призму.



Решение. $V = S \cdot H$

1) Так как призма вписана в цилиндр, то высота призмы равна высоте цилиндра.

2) по условию $V = 10\pi$, т.е.
$\pi R^2 H = 10\pi \Rightarrow R^2 H = 10$.

3) так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности, то $R = a$.

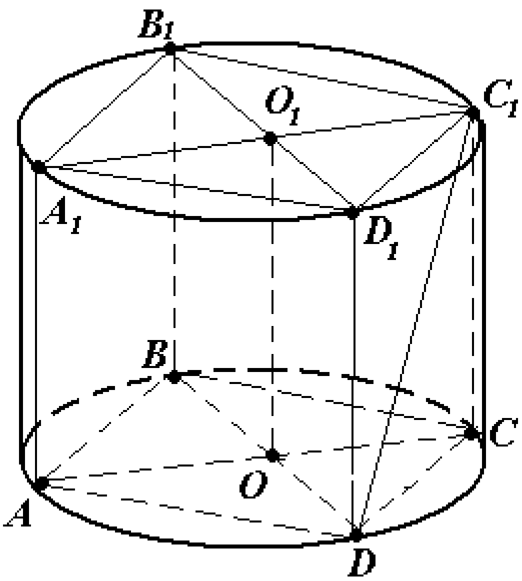
4) выразим радиус основания вписанного цилиндра r через радиус описанного цилиндра R: $r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

5) запишем формулу вычисления объёма вписанного в призму цилиндра: $V = S \cdot H$, т.е.:

$$V = \pi r^2 H = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{3}{4}\left(R^2 \cdot H\right) = \frac{3}{4}\pi \cdot 10 = 7{,}5\pi.$$

Ответ. 7,5π.

Задача №18. Около правильной четырехугольной призмы описан цилиндр. Объём цилиндра равен 24π. Найдите радиус цилиндра, если диагональ боковой грани призмы равна 5.



Решение.

1) Так как призма правильная, то в её основании лежит квадрат, и радиус описанной окружности R равен половине диагонали AC, или $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, где a – сторона квадрата.

2) по условию $V = 24\pi$, т.е. $\pi R^2 H = 24\pi$, или $R^2 \cdot H = 24$, или $\frac{a^2}{2}H = 24 \Rightarrow H = \frac{48}{a^2}$

3) из прямоугольного треугольника DCC_1 найдем $CC_1 = H$ по теореме Пифагора: $H = \sqrt{5^2 - a^2}$.

4) приравняем значения для H: $\frac{48}{a^2} = \sqrt{25 - a^2}$,