*Сл**о**болинская Татьяна Ивановна*
учитель математики ГБОУ СОШ № 29 г. Сызрани

Особенности подготовки учащихся к ЕГЭ при решении геометрических задач.

Преподавание геометрии на старшей ступени веду в рамках учебно-методического комплекса Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10-11 классы. - М.: Просвещение, 2009, а именно, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. Программа по геометрии (базовый и профильный уровни). Используется учебник тех же авторов, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. Геометрия. 10-11 классы. - М.: Просвещение, 2015.

Цель этой статьи – поделиться опытом обучения поиску решения геометрических задач различными методами и их реализации на уроках стереометрии.

Какому методу решения геометрических задач отдать предпочтение? Риторический вопрос.

Традиционный (геометрический) метод дается с большим трудом, так как он предполагает использование изученных теоретических сведений через привлечение большого количества вспомогательных теорем в каждом конкретном случае. Но, по-моему мнению, это скорее его преимущество, чем недостаток. Геометрический подход допускает изящное решение, требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений, для него нет алгоритмов.

Аналитическая геометрия решает геометрические задачи алгебраическими методами. Основной метод аналитической геометрии – метод координат. Изучение темы «Метод координат в пространстве» по используемому учебно-методического комплексу не предполагает изучение таких вопросов, как определение координат точки, которая делит отрезок в заданном отношении, уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, нахождение вектора нормали. Считаю, что их изучение необходимо, например, при решении задач на нахождение расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями и вообще при решении геометрических задач координатно – векторным методом.

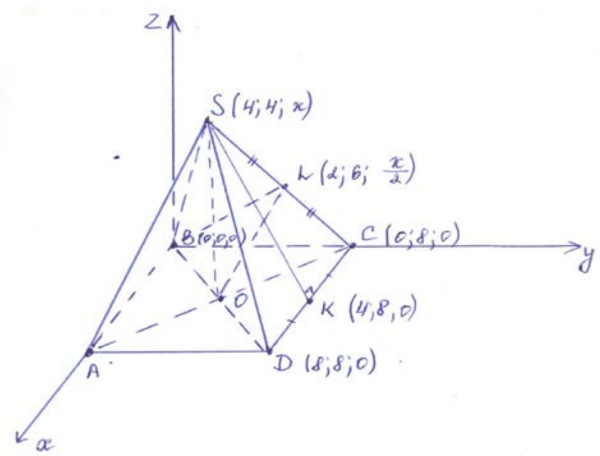
Координатно – векторный метод представлен практически во всех учебниках, но координатно – векторному методу решения задач в школьном курсе математики отведена незначительная роль и используется он достаточно ограниченно и неполно в рамках школьной программы. Координатный метод решения задач позволяет решать фактически все виды геометрических задач, он не требует сложных построений в проекциях. Для задач на нахождение угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями; расстояния между скрещивающимися прямыми, от точки до прямой, от точки до плоскости и т.п. можно выстроить алгоритм решения.

Рассмотрим одновременное применение геометрического метода и координатно – векторного метода при решении ряда стереометрических задач.

№ 1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L – середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды. [1, с.14, задача № 14]



Дано: SABCD - правильная четырёхугольная пирамида,

S – вершина пирамиды,

AB= BC=CD=AD=8,

SL= LC,

tg BL,^ SA = $2\sqrt{\frac{2}{5}}$,

O – центр основания пирамиды.

а) Доказать: BO $\perp$ LO.

Доказательство: Рассмотрим плоскость (ASC), докажем, что BO$\perp$(ASC). BO $\perp$AC, так как SABCD - правильная четырёхугольная пирамида$\Rightarrow$ABCD- квадрат, а диагонали квадрата взаимно перпендикулярны. BO $\perp$ SO, так как SO – высота правильной четырёхугольной пирамиды $\Rightarrow$SO$\perp$ (ABCD), BO $\in$ (ABCD) $\Rightarrow$SO$\perp$ BO (по определению прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой лежащей в этой плоскости). Следовательно, BO$\perp$(ASC), так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости (ASC). Но LO $\in$(ASC) $\Rightarrow$BO$\perp$ LO.

б) Найти S_{SABCD}.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой BA, ось Oy совпадала с прямой BC, точка B- с началом координат.

В данной прямоугольной системе координат определим координаты точек B(0; 0; 0), O(4; 4; 0), S (4; 4; x), C(0;8;0).

L(2; 6; $\frac{x}{2}$), как середины отрезка SC.

Найдем координаты векторов BO{ 4; 4; 0}, OL { -2; 2; $\frac{x}{2}$}. Их длины будут равны

$\left|BO\right| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$, $\left|OL\right| = \sqrt{4+4+\frac{x^2}{4}} = \sqrt{8+\frac{x^2}{4}}$.

По условию, tg BL,^ SA = $2\sqrt{\frac{2}{5}}$, но tg BL,^ SA= tg BL,^ LO, так как LO- средняя линия

Δ ASC$\Rightarrow$ SA$\parallel$ LO. Δ LBO- прямоугольный$\Rightarrow$ tg BL,^ LO= $\frac{BO}{LO}$, т.е.

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{\frac{32+x^2}{4}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{\frac{32+x^2}{4}}} = \sqrt{\frac{8}{5}},$$

$\sqrt{\frac{32+x^2}{4}\cdot 8}=\sqrt{160}$,

$\sqrt{64+2x^2}=\sqrt{160}$

$2x^2 = 96$,

$x^2 = 48$,

$x = 4\sqrt{3}$.

Пусть DK=KC, тогда K (4; 8; 0), координаты вектора SK$\{0;\ 4;\ -4\sqrt{3}\}$, а его длина будет равна $|SK| = \sqrt{0+16+48} = \sqrt{64} = 8$.

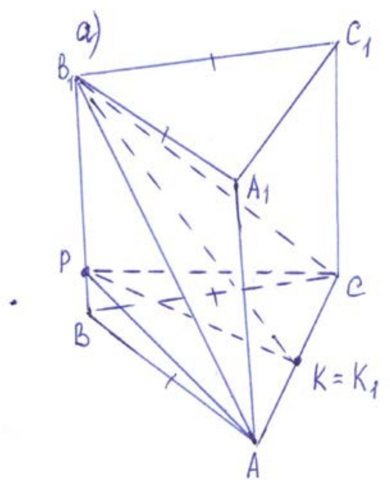
$S_{SABCD} = S_{ABCD} + \frac{1}{2} P_{ABCD} * SK = 8^2 + \frac{1}{2} * 32 * 8 = 64 + 128 = 192$.

Ответ: 192.

№ 2. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$- треугольник ABC, в котором AB= BC= 10, AC=16. Боковое ребро призмы равно 12. На ребре BB_1отмечена точка P так, что PB_1=3PB.

а) Докажите, что основания высот треугольников ACP и ACB_1, проведенных к стороне AC, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ACP и ACC_1. [2, с.33, задача № 14]



Дано: $ABCA_1B_1C_1$- прямая треугольная призма,

AB= BC= 10,

AC=16,

BB_1=12,

P € BB_1,

PB_1=3PB.

а) Доказать: $K=K_1$, где K, K_1- основания высот Δ ACP и Δ ACB_1 соответственно.

Доказательство:

Рассмотрим Δ ABP и Δ CBP.

1) ∟ABP= ∟CBP= 90°, так как призма прямая,
2) PB- общий катет,
3) AB= BC= 10 по условию.

Следовательно, Δ ABP = Δ CBP по двум катетам $\Rightarrow$ AP=CP$\Rightarrow$ Δ ACP- равнобедренный$\Rightarrow$ PK - высота, медиана Δ ACP$\Rightarrow$AK=KC.

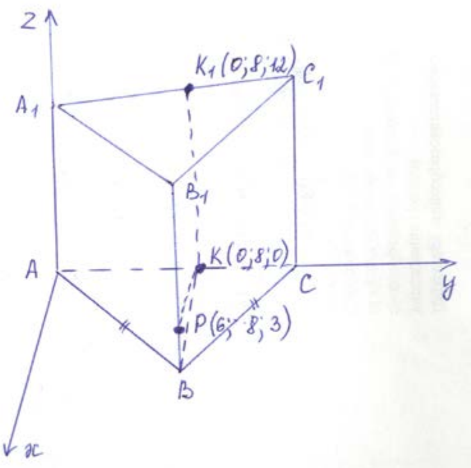
Рассмотрим Δ ABB_1 и Δ CBB_1.

1) ∟ABB_1=∟CBB_1= 90°, так как призма прямая,
2) B_1B- общий катет,
3) AB= BC= 10 по условию.

Следовательно, Δ ABB_1 = Δ CBB_1 по двум катетам $\Rightarrow$ $AB_1=CB_1 \Rightarrow$ Δ ACB_1- равнобедренный $\Rightarrow$ B_1K_1- высота, медиана Δ $ACB_1 \Rightarrow$ $AK_1=K_1C$.

Так как AK=KC, $AK_1=K_1C$, то $K=K_1$.

б) Найти tg (ACP),^(ACC_1).



Решение:

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Oy совпадала с прямой AC, ось Oz – с прямой AA_1, точка A- с началом координат. Пусть AK=KC, $A_1K_1=K_1C_1$. ∟PKK_1- линейный угол двугранного угла. PK$\perp$AC, так как прямая AC, проведенная в плоскости(ABC) через основание наклонной PK перпендикулярно к ее проекции BK на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной PK. $KK_1 \perp$ AC, так как $KK_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$и призма по условию прямая, т.е. AA_1, CC_1 $\perp$ плоскости(ABC).

Рассмотрим Δ АВК, по теореме Пифагора

$ВК^2 = АВ^2 - АК^2$,

$ВК^2 = 10^2 - 8^2$,

$ВК^2 = 36$,

$ВК = 6$.

В данной прямоугольной системе координат К(0; 8; 0), $К_1$(0; 8; 12), Р (6; 8; 3). Найдем координаты направляющих векторов КР{ 6; 0; 3}, $КК_1${ 0; 0; 12}.

Тогда cos (АСР),^($АСС_1$) = cos КР, ^$КК_1$= $\dfrac{|6*0+0*0+3*12|}{\sqrt{6^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+12^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

1+tg^2(АСР),^($АСС_1$) = $\dfrac{1}{\cos^2(ACP)(ACC_1)}$,

1+tg^2(АСР),^($АСС_1$) = 5,

tg^2(АСР),^($АСС_1$) = 4,

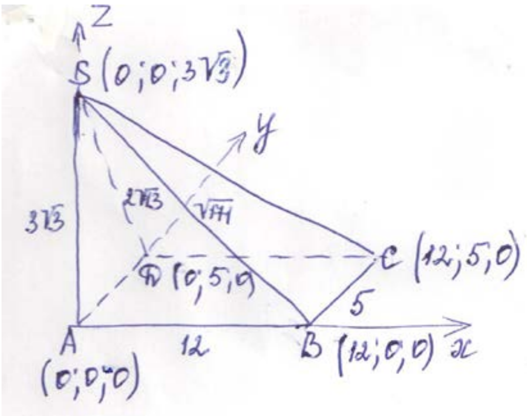
tg(АСР),^($АСС_1$) = 2.

Ответ: 2.

№ 3. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник со сторонами АВ=12, ВС=5. Боковые ребра SA=3 $\sqrt{3}$, SB=$\sqrt{171}$, SD=2 $\sqrt{13}$.

а) Докажите, что SA- высота пирамиды.

б) Найдите угол между SC и BD. [3, с.30, задача № 14]



Рассмотрим Δ ASB. Так как , $\left.\begin{array}{l} SB^2 = S\grave{A}^2 + AB^2 \\ (\sqrt{171})^2 = (3\sqrt{3})^2 + 12^2 \\ 171 = 27 + 144 \\ 171 = 171 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta$ SAB- прямоугольный,

по теореме обратной теореме Пифагора $\Rightarrow SA \perp AB$.

Рассмотрим Δ SAD. Проверим, что, $\left.\begin{array}{l} SD^2 = S\grave{A}^2 + AD^2 \\ (2\sqrt{13})^2 = (3\sqrt{3})^2 + 5^2 \\ 52 = 27 + 25 \\ 52 = 52 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta$ SAD- прямоугольный, по теореме обратной теореме Пифагора $\Rightarrow SA \perp AD$.

$\left.\begin{array}{l} SA \perp AB \\ SA \perp AD \\ AD, AB \in ABCD \\ AD \cap AB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SA \perp ABCD$, прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости $\Rightarrow$ SA- высота пирамиды.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, ось Oy- с прямой AD, Oz – с прямой AS, точка D- с началом координат.

В данной прямоугольной системе координат S (0; 0; $3\sqrt{3}$), C(12; 5; 0), B (12; 0; 0), D(0; 5; 0). Найдем координаты векторов SC{ 12; 5; -$3\sqrt{3}$}, BD{ -12; 5; 0}.

$$\cos (SC;\hat{}BD) = -\frac{SC \cdot BD}{|SC| \cdot |BD|} = \frac{|-144+25+0|}{\sqrt{144+25+27} \cdot \sqrt{144+25}} =$$

$$\frac{|-119|}{\sqrt{196} \cdot \sqrt{169}} = \frac{|-119|}{13 \cdot 14} = \frac{|-119|}{182} = \frac{119}{182} \Rightarrow SC;\hat{}BD = \arccos \frac{119}{182}.$$

№ 4. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2.

а) Постройте плоскость, проходящую через точку S и перпендикулярную ребру AF.

б) Найдите синус угла между прямой BC и плоскостью SAF. [2, с.44, задача № 14]

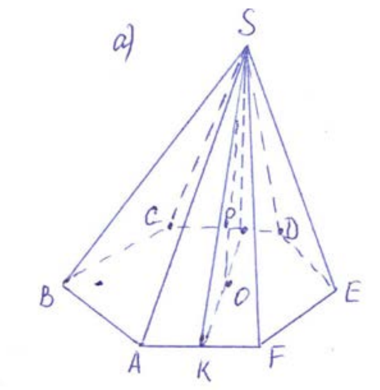
Дано: SABCDEF- правильная шестиугольная пирамида,

S – вершина пирамиды,

AB= BC=CD=DE=EF=FA=1,

SA= SB= SC=SD=SE=SF=2.

а) Построить (SKP) $\perp$ AF .



Построение: 1) Проведем высоту SK в ΔASF.

SK- медиана в ΔASF, так как ΔASF- равнобедренный, AS= SF, боковые ребра правильной пирамиды.

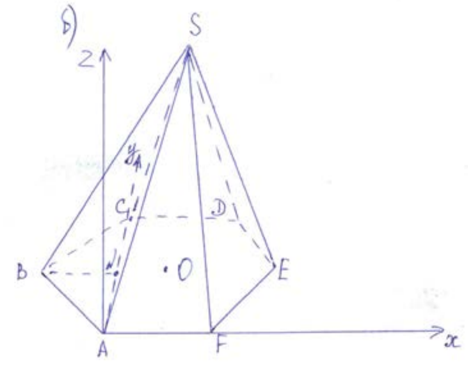
2) Пусть SO - высота пирамиды. Проведем прямую KO. KO$\perp$ AF (прямая AF, проведенная в плоскости через основание наклонной SK перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции KO).

3) KO$\cap$CD= P.

4) S, P$\in$(CSD). Проведем SP.

5) SKP – искомое сечение.

б) Найти: sin (BC,^(SAF).



Решение: Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AF, ось Oy- с прямой AC, точка A- с началом координат.

В данной прямоугольной системе координат A(0; 0; 0), F (1; 0; 0), S ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$),

C (0; $\sqrt{3}$; 0), B($\frac{-1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;0). Найдем координаты векторов BC{ $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0}.

Составим уравнение плоскости, проходящей через три S, A, F точки, не лежащие на одной прямой.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & \sqrt{3}-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot 0 - y \cdot \sqrt{3} + z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$\vec{n}$ {0; -$\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$}- направляющий вектор нормали.

BC{ $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0}.

sin BC, ^(SAF)= $\dfrac{\left|0 * \frac{1}{2} + \sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * 0\right|}{\sqrt{0^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2}} = \dfrac{1{,}5}{\sqrt{3 + \left(\frac{3}{4}\right)} * \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} =$

$\dfrac{1{,}5}{\sqrt{\frac{15}{4} * \sqrt{1}}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Общий уровень геометрической подготовки школьников в настоящее время остается достаточно низким и поэтому задача учителя математики научить не простому формальному применению знаний, а научить ученика
построению сложного стереометрического рисунка, так как чертеж помогает глубже понять условие задачи,
работе с основными компонентами учебной задачи,
умению находить необходимые аргументы обоснования решения,
приведению полных обоснований при решении задач,
использованию необходимой математической символики,
а все это возможно только при применении различных методов решения геометрических задач.

Литература:
1. ЕГЭ 2016. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий. Под. ред. И.В. Ященко.-М.: Издательство «Экзамен», 2016.-247с.
2. Тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по математике -2016. Учебное пособие. Сост. В.П. Кузнецов, В.В. Липилина. – Самара: ГОУ СИПКРО, 2016 – 146с.
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год. Под. ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 352с.