Реальные задания ЕГЭ-2017 по математике профильного уровня

$\boxed{1}$ На специальный курс «Дифференциальная геометрия» пришло 74 студента первого курса, что составляет 40% от всех первокурсников. Сколько всего студентов учится на первом курсе?

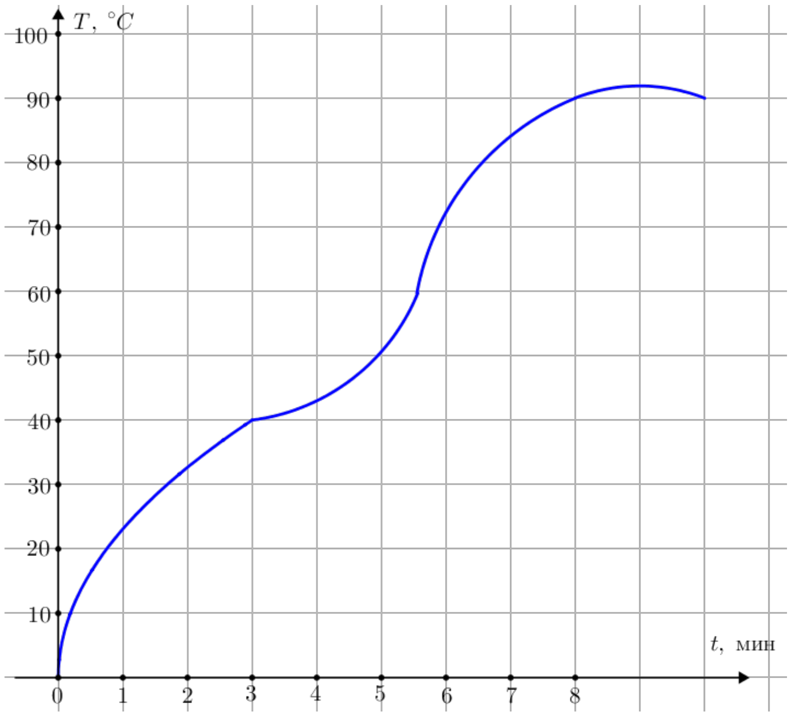
Решение.

Пусть x – искомое число всех первокурсников. Тогда получим уравнение

$$x \cdot 0{,}4 = 74, \qquad x = 185.$$

Ответ: 185.

$\boxed{2}$ На графике показана зависимость температуры воды, выраженная в градусах Цельсия, от времени, отсчитываемого с начала её нагревания. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат – температура. Определите по графику, на сколько градусов изменилась температура воды с 3 минут до 8 минут. Ответ дайте в градусах Цельсия.



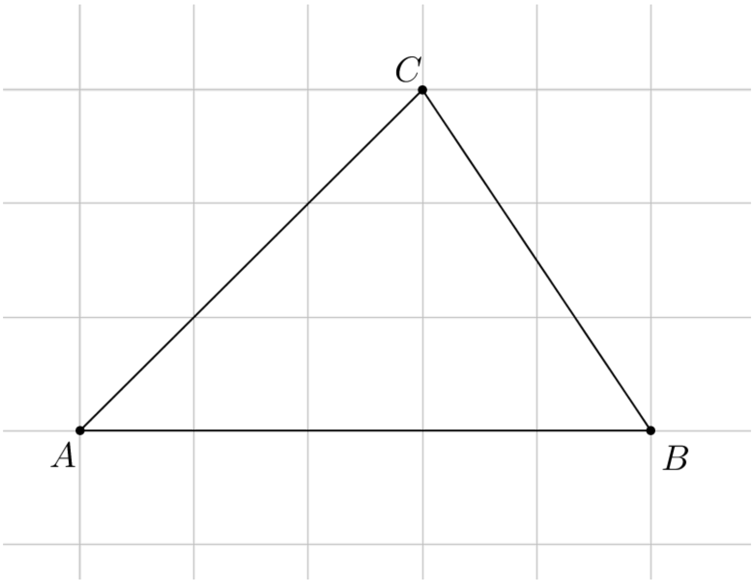
Решение.

Цена деления каждой из осей чётко видна, поэтому сразу прикладываем линейку к абсциссе 3 и видим, что соответствующая ей точка графика имеет ординату 40. Аналогично, точке графика с абсциссой 8 соответствует ордината 90.

Итак, с 3 минут до 8 вода нагрелась с 40 градусов Цельсия до 90 градусов Цельсия. Разность $90 - 40 = 50$ уходит в ответ. Никакие единицы измерения не пишутся.

Ответ: 50.

$\boxed{3}$ На клетчатой бумаге изображен треугольник ABC. Найдите среднюю линию этого треугольника, параллельную стороне AB.



Решение.

Известно, что средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Длина средней линии равна половине третьей стороны. Считая по клеточкам, нетрудно найти $AB = 5$, длина средней линии вдвое меньше, то есть 2,5.

Ответ: 2,5.

$\boxed{4}$ На олимпиаду по математике пришло 500 школьников. Их разместили в четырёх аудиториях: в трёх аудиториях по 150 человек, в четвертой – 50 человек. Найдите вероятность того, что случайно выбранный школьник будет писать олимпиаду в маленькой аудитории.

Решение.

Сразу отметим, что маленькая аудитория, очевидно, вмещает 50 человек, соответственно 50 мест. Вероятность того, что наугад выбранному школьнику достанется одно из этих пятидесяти мест, равна

$$\frac{50}{500} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

$\boxed{5}$ Решите уравнение $6^{x+6} = \frac{1}{36}$.

Решение.

Представим правую часть уравнения в виде степени числа 6.

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6^2} = 6^{-2}, \qquad 6^{x+6} = 6^{-2}.$$

Теперь можно перейти к равенству показателей:

$$x + 6 = -2, \qquad x = -8.$$

Ответ: –8.

$\boxed{6}$ Дан параллелограмм со сторонами 21 и 28. К меньшей стороне проведена высота, длина которой равна 20. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне.

Решение.

Вспоминая формулу площади параллелограмма, нетрудно составить уравнение:

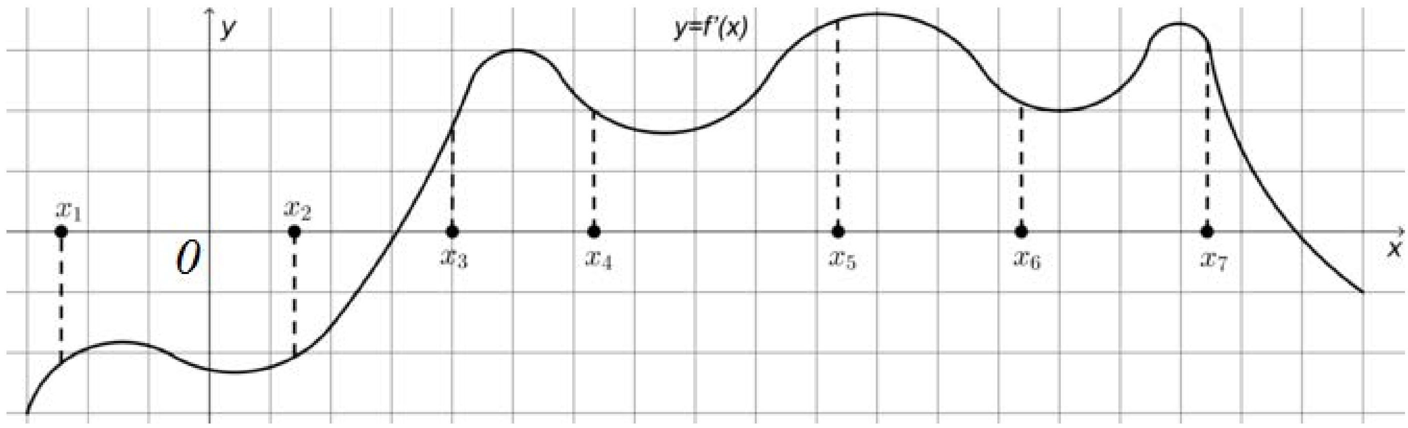
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b,$$

где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты параллелограмма, проведенные соответственно к сторонам a и b. По условию задачи, имеем:

$$21 \cdot 20 = 28 \cdot h_b, \qquad h_b = \frac{21 \cdot 20}{28} = 3 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15.

$\boxed{7}$ На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



Решение.

Знак производной отражает характер изменения функции. В тех точках, где производная отрицательна, функция убывает, а в тех точках, где производная положительна, функция возрастает.

Среди точек графика с отмеченными абсциссами только последние пять точек обладают положительными ординатами: x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Ответ: 5.

8 В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 32 см. Какого уровня достигнет вода, если перелить её в другой сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого в 4 раза больше радиуса основания первого сосуда.? Ответ дайте в см.

Решение.

Пусть R – радиус основания первого сосуда, тогда $4R$ – радиус основания второго сосуда. Высота столба воды в первом сосуде $h_1 = 32$. Считая объём воды при переливании неизменным, запишем дважды формулу объёма цилиндра:

$$\pi R^2 h_1 = \pi (4R)^2 h_2, \qquad h_2 = \frac{h_1}{16} = 2.$$

Ответ: 2.

9 Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12} - 2\sqrt{3}.$$

Решение.

Задача предполагает применение формулы понижения степени с тем, чтобы аргумент косинуса увеличился вдвое и тогда в знаменателе вместо 12 будет 6 – будет легче воспользоваться табличными значениями.

$$\cos^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2},$$

$$2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3.$$

Ответ: –3.

$\boxed{10}$ При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0=140$ Гц и определяется следующим выражением :

$$f=f_0\cdot\frac{c+u}{c-v}\ \text{(Гц)},$$

где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u=15$ м/с и $v=14$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 145 Гц?

Решение.

Вопрос задачи можно переформулировать: найдите наибольшее значение c, при котором выполнено неравенство

$$140\cdot\frac{c+15}{c-14}\geq 145,\qquad \frac{28c+420-29c+406}{c-14}\geq 0,\qquad \frac{c-826}{c-14}\leq 0,$$

$$14<c\leq 826.$$

Ответ: 826.

$\boxed{11}$ Теплоход, скорость которого в стоячей воде равна 27 км/ч, движется по течению из пункта А в пункт Б. По приезде в пункт Б теплоход сделал стоянку длительностью 5 часов, затем отправился обратно в пункт А. Известно, что теплоход вернулся в пункт А через 32 часа после отплытия из А. Сколько километров прошёл теплоход, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Решение.

Пусть x – расстояние между пунктами А и Б (в км). Уравнение относительно времени составляется достаточно просто:

$$\frac{x}{27+1}+5+\frac{x}{27-1}=32, \qquad \frac{13x+14x}{2\cdot 13\cdot 14}=27, \qquad x=364.$$

В ответ нужно указать удвоенное значение x, ведь теплоход прошел от А до Б, а затем вернулся из Б в А.

Ответ: 728.

$\boxed{12}$ Найдите точку минимума функции

$$y=7x-\ln(x+10)^7+5.$$

Решение.

Нечётную степень аргумента можно вынести за знак логарифма без ограничения ОДЗ.

$$y=7x-7\ln(x+10)+5.$$

ОДЗ: $x>-10$. Считаем производную:

$$y'=(7x-7\ln(x+10)+5)'=7-7(\ln(x+10))'=7-\frac{7}{x+10}=\frac{7x-63}{x+10}.$$

Приравниваем производную к нулю:

$$\frac{7x-63}{x+10}=0, \qquad \frac{x-9}{x+10}=0.$$

Используя метод интервалов, нетрудно заметить, что производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через $x=-9$, значит это и есть точка максимума.

Ответ: –9.

$\boxed{13}$ а) Решите уравнение

$$\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x\right)=x.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

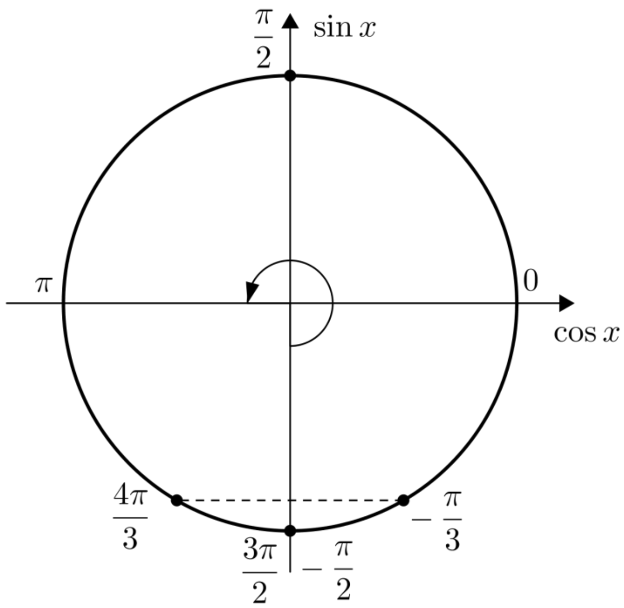
Без ограничения ОДЗ преобразуем уравнение (потому что $4^x>0$)

$$2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x.$$

$$2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Отбор корней можно осуществить с помощью тригонометрического круга, потому что длина отрезка не превосходит 2π.



Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z};$

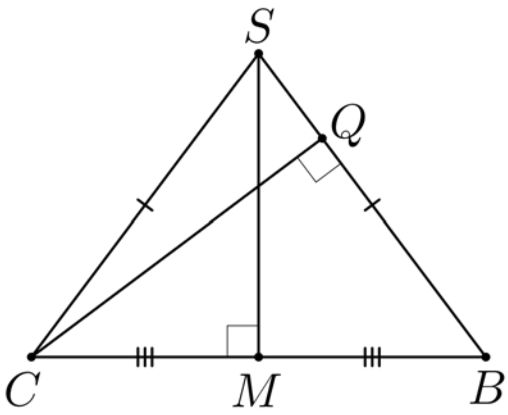
б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}.$

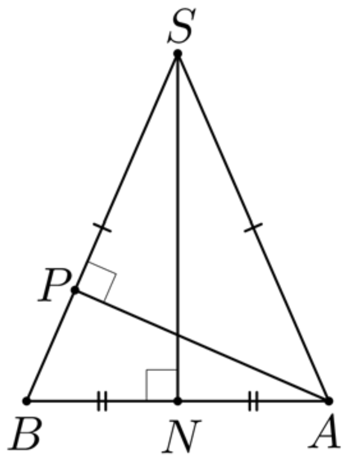
$\boxed{14}$ Основанием четырёхугольной пирамиды *SABCD* является прямоугольник *ABCD*, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин *A* и *C* опущены перпендикуляры *AP* и *CQ* на ребро *SB*.

а) Докажите, что *P* – середина отрезка *BQ*.

б) Найдите угол между гранями *SBA* и *SBC*, если $SD = 9$.

Решение.





а) Пусть M и N – середины CB и AB соответственно, $SA = SB = SC = SD = x$ (боковые рёбра равны по условию задачи).

Тогда

$$SM = \sqrt{x^2 - 9}, \qquad SN = \sqrt{x^2 - \frac{9}{2}},$$

$$CQ = \frac{SM \cdot CB}{SB} = \frac{6 \cdot \sqrt{x^2 - 9}}{x}, \qquad AP = \frac{SN \cdot AB}{SA} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - \frac{9}{2}}}{x}.$$

$$BQ^2 = 36 - \frac{36(x^2 - 9)}{x^2}, \qquad BQ = \frac{18}{x};$$

$$BP^2 = 18 - \frac{18\left(x^2 - \frac{9}{2}\right)}{x^2}, \qquad BP = \frac{9}{x}.$$

Таким образом, $BQ = 2BP$, что и требовалось доказать.

б) В плоскости SBC опустим перпендикуляр к SB в точку P. По теореме Фалеса, точка пересечения этого перпендикуляра с CB есть точка M. Тогда угол MPA и есть искомый.

$$MP = \frac{1}{2}CQ = \frac{3 \cdot \sqrt{x^2 - 9}}{x} = 2\sqrt{2},$$

$$AP = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - \frac{9}{2}}}{x} = \sqrt{17},$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 3\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов из треугольника MPA:

$$\cos \angle MPA = \frac{MP^2 + AP^2 - MA^2}{2 \cdot MP \cdot AP} = -\frac{\sqrt{34}}{68}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $\arccos\left(-\sqrt{34}/68\right)$.

$\boxed{15}$ Решите неравенство

$$\frac{2^x}{2^x-8}+\frac{2^x+8}{2^x-4}+\frac{66}{4^x-12\cdot 2^x+32}\leq 0.$$

Решение.

Пусть $2^x = t > 0$. Исходное неравенство перепишется в виде:

$$\frac{t}{t-8}+\frac{t+8}{t-4}+\frac{66}{(t-8)(t-4)}\leq 0.$$

$$\frac{t^2-4t+t^2-64+66}{(t-8)(t-4)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{(t-8)(t-4)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ 4<t<8. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

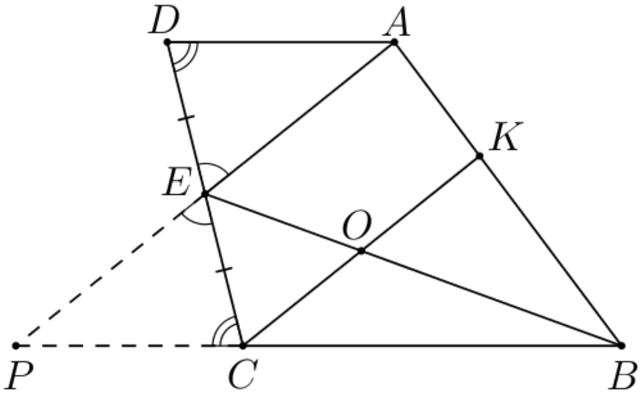
$$\left[\begin{array}{l} 2^x=1, \\ 4<2^x<8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (2;3)$.

$\boxed{16}$ Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На её стороне AB взята точка K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = OK$.

б) Найдите отношение оснований трапеции $BC:AD$, если площадь треугольника BCK составляет 9/64 площади всей трапеции $ABCD$.



Решение.

а) Пусть P – точка пересечения AE и BC. Треугольники ADE и PCE равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит $AE = PE$, а поскольку $AP \parallel CK$, то, по теореме Фалеса, $CO = OK$.

б) Поскольку $\Delta ADE = \Delta PCE$, то

$$S_{ABCD} = S_{ABP}, \qquad S_{BCK} : S_{ABP} = 9:64.$$

Из подобия треугольников ABP и KBC следует

$$\frac{BC}{BP} = \sqrt{\frac{S_{KBC}}{S_{ABP}}} = \frac{3}{8}.$$

Поскольку $PC = AD$, то

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BC}{PC} = \frac{BC}{BP - BC} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) 3:5.

$\boxed{17}$ В июле 2020 года планируется брать кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 156060 рублей?

Решение.

Пусть *x* руб. – искомая сумма кредита, *y* руб. – величина ежегодного платежа, *r*% – процентная ставка по кредиту.

В конце первого года долг составит: $rx - y$.

В конце второго года долг составит: $r(rx - y) - y$.

В конце третьего года долг составит: $r(r(rx - y) - y) - y = 0$.

По условию, $3y - x = 156060$. Получим уравнение

$$\frac{r^3x}{r^2 + r + 1} = \frac{156060 + x}{3}, \qquad x = 239400.$$

Ответ: 239400.

$\boxed{18}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

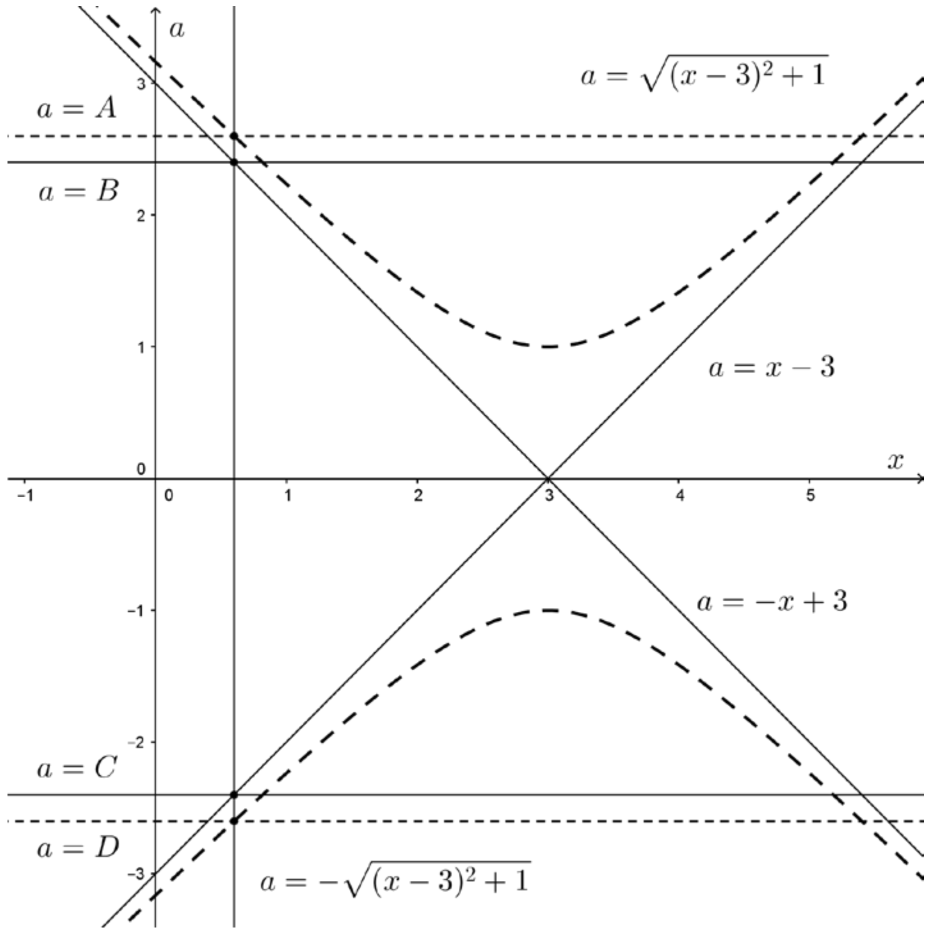
$$\sqrt{5x - 3} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$.

Решение.

$$\sqrt{5x - 3} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} 5x-3=0, \\ x^2-6x+10-a^2=1, \end{array}\right. \\ 5x-3 \geq 0, \\ x^2-6x+10-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x=\dfrac{3}{5}, \\ a=\pm(x-3), \end{array}\right. \\ x \geq \dfrac{3}{5}, \\ -\sqrt{(x-3)^2+1}<a<\sqrt{(x-3)^2+1}. \end{cases}$$



Изобразив систему графически, можно заметить, что задаче удовлетворяют все такие a, для которых выполнено

$$D<a \leq C, \qquad B \leq a<A.$$

A и D находятся подстановкой $x=3/5$ в $a=\sqrt{(x-3)^2+1}$ и $a=-\sqrt{(x-3)^2+1}$ соответственно, а B и C находятся при подстановке $x=3/5$ в $a=-x+3$ и $a=x-3$ соответственно.

Ответ: $\left(-\frac{13}{5};-\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{5};\frac{13}{5}\right)$.

$\boxed{19}$ На доске написано 100 различных натуральных чисел, причем известно, что сумма этих чисел равна 5120.

а) Может ли на доске быть написано число 230?

б) Может ли быть такое, что на доске не написано число 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, написано на доске?

Решение.

а) Заметим, что

$$1+2+\cdots+99=\frac{1+99}{2}\cdot 99=4950.$$

Мы взяли первые 99 чисел, чтобы сумма была наименьшей. Но даже в этом случае $4950+230=5180>5120$, поэтому число 230 не могло быть записано на доске.

б) Пусть на доске нет числа 14. Снова возьмем числа так, чтобы они обладали наименьшей суммой и посмотрим, что получится.

$$1+2+\cdots+13+15+16+\cdots+101=\frac{1+13}{2}\cdot 13+\frac{15+101}{2}\cdot 87=5137.$$

Получается, что при отсутствии числа 14 на доске, наименьшая возможная сумма чисел всё равно превосходит 5120, значит такого, что на доске не написано число 14, быть не может.

в) Приведем пример, когда среди записанных чисел есть четыре числа, кратные 14: 14, 28, 42 и 56. Подходящий набор таков:

$$1,2,\ldots,69, \qquad 71,72,\ldots,83, \qquad 85,86,\ldots,97, \qquad 100,101,\ldots,105.$$

Докажем, что меньше кратных 14 чисел быть не может. В наборе от 1 до 100, обладающем минимальной суммой, ровно 7 чисел, кратных 14: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98.

Будем последовательно убирать числа, кратные 14, заменяя их на следующие после 100 натуральные числа (чтобы сохранять минимальность суммы получившихся чисел). Замена 98 на 101 дает сумму 5053, замена 84 на 102 дает сумму 5071, замена 70 на 103 дает сумму 5104, замена 56 на 104 дает сумму $5152>5120$. Поэтому меньше четырех чисел, кратных 14, не может быть написано на доске.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.