13. а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$[\log_5 2\,;\log_5 20]$$

Решение.

$$2^{3x} - 18 \cdot 2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 0.$$

Замена $2^x = t > 0$. Умножим обе части на t:

$$t^4 - 18t^2 + 32 = 0, \qquad t_1^2 = 2, \qquad t_2^2 = 16.$$

Возвращаемся к старой переменной

$$2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2}, \qquad x = \frac{1}{2};$$

$$2^x = 4 = 2^2, \qquad x = 2.$$

Отбор корней:

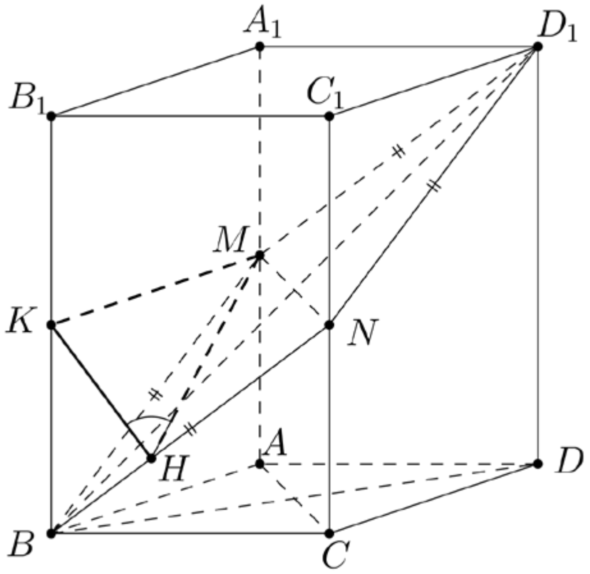
$$\log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2.$$

Ответ: а) 1/2, 2; б) 1/2.

14. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.



Решение.

а) Диагонали ромба перпендикулярны, проекциями этих диагоналей на плоскость $ABCD$ являются диагонали прямоугольника $ABCD$, которые также должны быть перпендикулярны. Значит $ABCD$ – квадрат.

б) Из доказанного следует, что треугольники BCN, BAM, D_1A_1M, D_1C_1N равны по катету и гипотенузе, откуда M и N являются серединами рёбер AA_1 и CC_1 соответственно.

Проведем перпендикуляр из M к плоскости BCC_1 – MK. Из точки K проведем перпендикуляр к BN, получим точку H. Угол MHK – искомый линейный угол между плоскостями.

Из треугольника BKN с катетами 3 и 4 находим высоту

$$KH = \frac{12}{5}.$$

По построению $KM = 4$, поэтому угол MHK найдется:

$$\angle MHK = \operatorname{arctg}\frac{MK}{KH} = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

15. Решите неравенство

$$\log_2^2(25 - x^2) - 7\log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0.$$

Решение.

Пусть $t = \log_2(25 - x^2)$.

$$t^2 - 7t + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 3, \\ t \geq 4. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к старой переменной. Исходное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(25 - x^2) \leq 3, \\ \log_2(25 - x^2) \geq 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 0 < 25 - x^2 \leq 8, \\ 25 - x^2 \geq 16; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -25 < -x^2 \leq -17, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 25 > x^2 \geq 17, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -5 < x \leq -\sqrt{17}, \\ \sqrt{17} < x < 5, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right).$$

Ответ: $\left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right)$.

16. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

Решение.

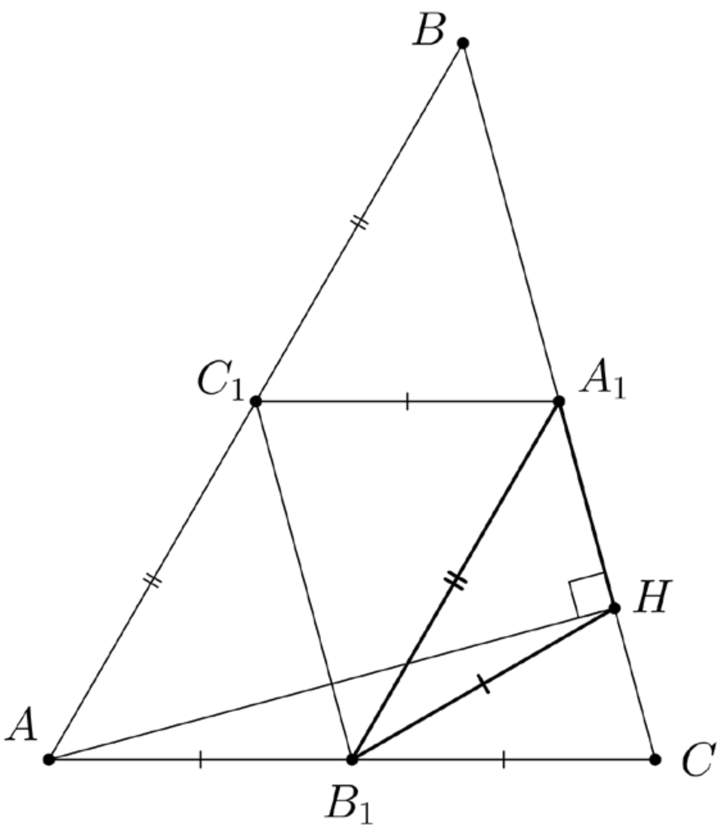
а) B_1H – медиана прямоугольного треугольника AHC, поэтому

$$AB_1 = B_1C = B_1H, \qquad \angle B_1CH = \angle CHB_1, \qquad \angle AHB_1 = 15°, \qquad \angle CB_1H = 30°.$$

Из равенства треугольников $A_1B_1C_1$, AC_1B_1, B_1A_1C, C_1BA_1 следует

$$\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1HB_1 = 75° + 90° + 15° = 180°.$$

Значит около четырехугольника $A_1HB_1C_1$ можно описать окружность.



б) По теореме синусов находим:

$$AC = \frac{BC}{\sin 60°}\sin 45° = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$AB = \frac{BC}{\sin 60°}\sin 75° = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Тогда

$$A_1B_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad B_1H = \sqrt{2}.$$

По теореме косинусов для треугольника A_1B_1H:

$$(A_1H)^2 = (B_1H)^2 + (A_1B_1)^2 - 2\cdot B_1H\cdot A_1B_1\cdot\cos\angle HB_1A_1,$$

$$(A_1H)^2 = 2 + 2 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 1, \qquad A_1H = 1.$$

Ответ: а) ч.т.д.; б) 1.

17. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

НЕПРАВИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ.

Выражение для суммы на счёте:

$$f = t^2(1+r)^{25-t}.$$

Считаем производную, ищем точку максимума:

$$f' = 2t(1+r)^{25-t} - t^2(1+r)^{25-t}\ln(1+r), \qquad f' = 0, \qquad t = \frac{2}{\ln(1+r)}.$$

По условию, максимум достигается в конце 21 года, поэтому составим двойное неравенство:

$$20 < \frac{2}{\ln(1+r)} < 22, \qquad \frac{1}{11} < \ln(1+r) < \frac{1}{10}, \qquad e^{1/11} - 1 < r < e^{1/10} - 1.$$

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ: $e^{1/11} - 1 < r < e^{1/10} - 1$.

ПРАВИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ.

За год ценные бумаги увеличиваются в цене в

$$\frac{t^2}{(t-1)^2} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^2 \text{ раз.}$$

Видно, что относительное увеличение стоимости замедляется с каждым годом. Продавать бумаги и класть деньги в банк имеет смысл в том случае, когда в банке прирост за год (а, значит, и за все последующие годы) станет больше.

По условию, продавать бумаги нужно в конце 21-го года, значит, за 21-ый год прирост стоимости ценных бумаг еще больше банковского процента, а в 22-м году – уже нет. Записываем:

21-ый год:

$$\frac{21^2}{20^2} > 1 + r,$$

22-й год:

$$\frac{22^2}{21^2} < 1 + r.$$

$$\frac{22^2}{21^2} < 1 + r < \frac{21^2}{20^2}, \qquad \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ: $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение.

Рассмотрим семейства следующих графиков:

$$y = ax - 2, \qquad g = \sqrt{x-1} - a, \qquad h = 3x - 2a - 11.$$

Неравенство $y \geq 0$ будет выполняться хотя бы для одного x из $[3; 4]$ в том случае, если прямая $y = ax - 2$ будет иметь общую точку с фигурой, ограниченной осью Ox и линиями $x = 3$, $x = 4$ для всех $y \geq 0$. Это достигается при всех $a \geq \frac{1}{2}$.

Из аналогичных рассуждений для g получаем $a < \sqrt{3}$.

Неравенство $h \leq 0$ будет выполняться хотя бы для одного x из $[3; 4]$ в том случае, если прямая $h = 3x - 2a - 11$ будет иметь общую точку с фигурой, ограниченной осью Ox и линиями $x = 3$, $x = 4$ для всех $y \leq 0$. Это достигается при всех $a \geq -1$.

Пересекая полученные неравенства, получаем ответ.

Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

19. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Решение.

а) Да, например 6, 7, 8, 9, 10.

б) Нет. Если попытаться добавить число к набору 6, 7, 8, 9, 10, которое будет меньше 6, то произведение этого числа и 6 будет меньше 40. А если к этому же набору прибавить число, большее 10, то произведение этого числа и 10 будет больше 100.

в) 35. Докажем, что четыре подходящих числа 7, 8, 9, 11 обладают наибольшей суммой среди всех подходящих четверок чисел. Этот набор можно изменить, заменив 7 на 6 – сумма будет меньше. Также можно заменить 11 на 10 – снова получим уменьшение. А вот заменять число из данного набора на число, которое будет больше 11 нельзя: произведение этого числа и 10 будет больше 100. Поэтому данная четверка обладает наибольшей суммой.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.