Задания высокого уровня сложности с развернутым ответом 19

Задания 19 (задания № С6) проверяют умение строить и исследовать простые математические модели. Выполнение этих заданий не требует знаний специальных разделов олимпиадной математики, однако по своему содержанию и уровню сложности эти задачи, безусловно, следует отнести к олимпиадным. Их невозможно систематизировать и выделить какие-либо общие приемы решения. Возможно, единственное, что их объединяет - практически все эти задачи в натуральных или целых числах.

Типовые задания 19.

1. (ЕГЭ 2010) Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких, что $k < n$ и $\left(n^2\right)^k = \left(k^2\right)^n$.

Решение

Преобразуем исходное равенство:

$\left(n^2\right)^k = \left(k^2\right)^n$; $k \cdot \ln n^2 = n \cdot \ln k^2$; $\dfrac{1}{n} \cdot \ln n = \dfrac{1}{k} \cdot \ln k$; $f(n) = f(k)$,

где $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln x$, $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}, \quad \begin{cases} f'(x) \le 0, x \ge e \\ f'(x) \ge 0, 0 < x \le e \end{cases}.$$

Следовательно, функция возрастает на промежутке $(0; e]$ и убывает на промежутке $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, то равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$. Отсюда следует, что $k = 1; 2$, причем для каждого k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.

В случае $k = 1$ из уравнения получаем: $\dfrac{1}{n} \cdot \ln n = \dfrac{1}{k} \cdot \ln k = 0$, откуда следует $n = 1$**,** что невозможно.

В случае $k = 2$ уравнению удовлетворяет значение $n = 4$:

$\dfrac{1}{4} \cdot \ln 4 = \dfrac{2}{4} \cdot \ln 2 = \dfrac{1}{2} \ln 2$, и это значение единственное.

Ответ: $k = 2$; $n = 4$.

2. Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди десяти данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди десяти данных чисел шесть нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди десяти данных чисел шесть нечётных. Значит, хотя бы из двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, которое делится на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (-4; 3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8); (10; -11); (-11;10).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

3. Число N равно произведению 10 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь число N?

Решение

Докажем, что у любого числа N, удовлетворяющего условию, заведомо есть 56 различных делителей. Действительно, пусть $N = a_1 a_2 ... a_{10}$, $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$. Тогда числа

$$1 < a_1 < a_2 < a_1a_2 < a_1a_3 < a_2a_3 < a_1a_2a_3 < a_1a_2a_4 < a_1a_3a_4 < a_2a_3a_4 < a_1a_2a_3a_4 < a_1a_2a_3a_5 <$$

$$< a_1a_2a_4a_5 < a_1a_3a_4a_5 < a_2a_3a_4a_5 < ... < a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 < ... < a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} <$$

$< a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}$ попарно различны и являются делителями числа N, а их количество равно $1+2+3+...+9+10+1=56$. Значит, меньше, чем 56 делителей у числа быть не может.

Приведем пример числа, удовлетворяющего условию, у которого ровно 56 различных делителей: $N = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 ... 2^{10} = 2^{55}$.

Ответ: 56.

4. На доске написано более 30, но менее 40 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше, положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение

Пусть среди написанных чисел k положительных, l - отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $5k - 10l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 5. По условию $30 < k + l + m < 40$, поэтому, $k + l + m = 35$. Таким образом, написано 35 чисел.

б) Приведем равенство $5k - 10l = -3(k + l + m)$ к виду $7l = 8k + 3m$. Так как $m \geq 0$, то получим, что $7l \geq 8k$. Следовательно, $l > k$, т.е. отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (оценка) Подставим $k + l + m = 35$ в правую часть равенства $5k - 10l = -3(k + l + m)$:

$5k - 10l = -105$, откуда $k = 2l - 21$. Так как $k + l \leq 35$, получаем: $3l - 21 \leq 35$, $3l \leq 56$, $l \leq 18$, $k = 2l - 21 \leq 15$. Таким образом, положительных чисел не более 15.

в) (пример) Приведем пример, когда положительных чисел ровно 15. Пусть на доске 15 раз написано число5, 18 раз написано число -10 и два раза написан 0.

Тогда $\frac{5\cdot 15-10\cdot 18}{35}=\frac{75-180}{35}=-3$. Указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 35; б) отрицательных; в) 15.

5. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 648, и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию.

Решение

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Действительно, пусть пять таких чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1, а знаменатель q. Тогда $648=b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2\cdot b_1q^3\cdot b_1q^4=b_1q^{10}=\left(b_1q^2\right)^5$, т.е. 648 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 648, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1, а знаменатель прогрессии $q=\frac{m}{n}>1$ (m и n - взаимно простые числа, причем $m>1$). Тогда произведение этих четырех чисел $\frac{b_1^4\cdot m^6}{n^6}$ будет являться делителем числа 648. Так как числа m и n взаимно простые, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4\cdot m^6$, то есть как минимум, в шестой степени. Однако $648=2^3\cdot 3^4$, то есть простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Пример пяти чисел, произведение которых равно 648 и среди которых есть три числа, образующих геометрическую прогрессию: 1, 3, 9, 6, 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

6. Набор состоит из тридцати одного натурального числа, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати шести чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно двенадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее двенадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 27.

Решение

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати шести чисел из набора, состоящего из пятерки, четверки, тройки, шестнадцати двоек и двенадцати единиц не больше, чем $5+4+3+2\cdot 16+7=51$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 26 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 52. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда $51\geq S\geq x+2(23-x)+3+4+5$; $x\geq 7$, то есть среди выбранных 26 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум, двенадцать единиц.

в) Используя двенадцать единиц и числа 3, 4, 5 можно составить все суммы от 1 до 24.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел есть число от 3 до 26, то его можно добавить и получить в сумме 27.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел нет чисел от 3 до 26, то каждое из них равно 1, или равно 2, или больше 26. Так как сумма этих шестнадцати чисел не больше 51, то только одно из чисел может быть больше 26. Значит, в этом случае как минимум пятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и двенадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 27.

Ответ: а) да; б) нет.

7. Совокупность А состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в А больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из А равно 210. Для любых двух чисел из А их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из А делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит А.

Решение.

Так как каждое из чисел, принадлежащих А, должно делить $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то все числа из А состоят только из простых сомножителей 2, 3, 5, 7, входящих в эти числа в степени не выше первой. По условию, произведение всех чисел делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Следовательно, среди чисел, составляющих А, должно не менее семи четных чисел. Всем указанным условиям удовлетворяют следующие восемь чисел:

2; $6 = 2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Если число 2 входит в А, то любой другой элемент А обязан делиться на 2, т.к. по условию любые два числа из А имеют общий делитель, отличный от 1. Значит в этом случае $A = \{2,6,10,14,30,42,,70,210\}$ (по условию число элементов в А не менее восьми). Однако в этом случае произведение всех выписанных чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ является полным квадратом, что противоречит условию. Следовательно, число 2 не входит в А. Числа 6; 10; 14; 30; 42; 70; 210 могут входить в множество А, но оно не может состоять только из этих чисел. Его необходимо дополнить хотя бы одним нечетным числом. Пусть N - одно из нечетных чисел, принадлежащих А. Так как наибольший общий делитель чисел 6 и N отличен от 1,то N должно делиться на 3 (на 2 оно не делится). Аналогично, N должно делиться на 5 и на 7. Значит, N должно делиться на $3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как простые числа 3, 5, 7 входят в N в степени, не выше первой, то $N = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и других нечетных чисел в А быть не может.

Ответ: $A = \{6,10,14,30,42,70,105,210\}$.

8. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Решение.

а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.
б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}>\frac{2}{11}$.
Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, так как $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$. Тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театр, ни кино, что противоречит условию. В пункте а) показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее число мальчиков в группе – 9.
в) Предположим, что какой-то мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой – только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится. По условию, $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{2}{11}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{2}{9}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе $\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{8}{9}+1}=\frac{9}{17}$.

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ: а)да; б) 9; в) $\frac{9}{17}$.

9. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть, по крайней мере, два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.
а) Может ли в сумме получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?
Решение.
Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4, а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что
$S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$.
а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел

$1+2+...+11+12=\frac{12\cdot 13}{2}=78$. С другой стороны, она равна $S_1+S_2+S_3+S_4=4S_1$, но 78 не делится на 4, Значит, $A\neq 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности S_i-S_j равнялась 0. Значит, $S_1<S_4$, но в этом случае каждая из сумм

S_2, S_3 не равны хотя бы одной из сумм S_1, S_4. Поэтому хотя бы три разности S_i-S_j не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A\neq 1$.

в) Выразим число A через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A=(S_2-S_1)+(S_3-S_1)+(S_4-S_1)+(S_3-S_2)+(S_4-S_2)+(S_4-S_3)=$$
$$=3S_4-3S_1-S_2+S_3=3(S_4-S_3)+4(S_3-S_2)+3(S_2-S_1)$$

Показано, что $A\geq 3$. Если $A=3$, то $S_1=S_2=S_3=S_4-1$ или $S_2=S_3=S_4=S_1+1$. В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1+1$ или $4S_4-1$, что неверно, т.к. 78 – четное число.

Можно привести следующий пример разбиения чисел на группы, при котором число $A=4$: $\{12;7\}$; $\{11;6;2\}$; $\{10;5;4;1\}$; $\{9;8;3\}$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

10. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 30 и имеют ровно 99 различных натуральных делителей (считая 1 и само это число).

Решение

Сначала докажем следующее утверждение.

Если разложение натурального числа n на простые множители имеет вид $n=p_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$, (где $p_1,...,p_k$ - различные простые числа, $\alpha_1,...,\alpha_k$ - натуральные числа, $k\geq 2$), то $d(n)$ - количество различных делителей числа n (считая 1 и само число n) находится по формуле: $d(n)=(1+\alpha_1)\cdot...\cdot(1+\alpha_k)$ $(*)$.

Доказательство

Пусть m - некоторый делитель числа n. Так как n делится на m, то в разложении числа m на простые множители не может быть простых чисел, отличных от чисел $p_1,...,p_k$, и при этом ни одно из чисел $p_1,...,p_k$ не может входить в разложение на множители числа m в степени большей, чем оно входит в разложение числа n. Следовательно, все делители числа m - это числа вида $p_1^{\beta_1}\cdot...\cdot p_k^{\beta_k}$, где $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ для всех $i\in[1,...,k]$.

Чтобы подсчитать количество чисел указанного вида, заметим, что этих чисел ровно столько, сколько различных наборов целых чисел $\beta_1,...,\beta_k$, где $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ для всех $i\in[1,...,k]$. Подсчитаем количество этих наборов: число β_1 можно выбрать $(1+\alpha_1)$ способами (т.к. $\beta_1\in[1,...,\alpha_1]$), число β_2 - $(1+\alpha_2)$ способами (т.к. $\beta_2\in[1,...,\alpha_2]$) и т.д. Поэтому все k чисел $\beta_1,...,\beta_k$ можно выбрать $(1+\alpha_1)\cdot...\cdot(1+\alpha_k)$ способами. Если $k=1$, то набор состоит из $(1+\alpha_1)$ чисел, т.к. $\beta_1\in[1,...,\alpha_1]$. Формула $(*)$ доказана.

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи.

Пусть n - одно из искомых натуральных чисел. Так как n делится на 30, а $30=2\cdot 3\cdot 5$, то в разложении числа n на простые множители обязательно присутствуют числа 2, 3, 5. Поэтому разложение числа n на простые множители одного из двух видов: либо $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in N$ (если других простых делителей, кроме чисел 2, 3, 5 у числа n нет); либо $n = 2^{\alpha} \cdot .3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot ... \cdot p_k^{\delta_k}$, где $k \geq 1$, $p_1, ..., p_k$ - различные простые числа, отличные от чисел 2, 3, 5 и $\alpha, \beta, \gamma, p_1, ..., p_k \in N$.

2) По условию, количество делителей числа n равно 99. По формуле $(*)$
$(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma) = 99$ или $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma)\cdot(1+\delta_1)\cdot ... \cdot(1+\delta_k) = 99$.
Последний случай невозможен. $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$- произведение трех простых чисел. Каждое из четырех чисел $(1+\alpha) \geq 2$, $(1+\beta) \geq 2$, $(1+\gamma) \geq 2$, $(1+\delta_1) \geq 2$ и каждое натуральное число $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1$, большее 1, либо само является простым, либо разлагается в произведение простых чисел. Таким образом, количество простых чисел не совпадает и $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma)\cdot(1+\delta_1) \neq 99$.

3) Из равенства $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot(1+\gamma) = 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ следует, что два из чисел $1+\alpha$, $1+\beta$, $1+\gamma$ равны 3, а одно – 11. Таким образом, возможны следующие три варианта:
а) $\alpha = 10$; $\beta = 2$; $\gamma = 2$; б) $\alpha = 2$; $\beta = 10$; $\gamma = 2$; с) $\alpha = 2$; $\beta = 2$; $\gamma = 10$.
Ответ: $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 3^{10} \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{10}$.

11. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если число a возвести в квадрат и к полученному числу приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b ровно в три раза.

Решение.

Пусть количество цифр в десятичной записи числа b равно n, т.е. $10^{n-1} \leq b < 10^n$. Тогда при возведении числа a в квадрат и приписывании к полученному числу справа десятичной записи числа b, получим число, равное $10^n \cdot a^2 + b$. Таким образом, получим уравнение $10^n \cdot a^2 + b = 3ab\ (*)$. Отсюда $10^n \cdot a^2 = (3a-1)b < (3a-1)\cdot 10^n$; $a^2 - 3a + 1 < 0$. Этому неравенству удовлетворяют лишь два натуральных числа: $a = 1$ и $a = 2$. Подставим эти значения в уравнение $(*)$, получим $a = 1$; $b = 5 \cdot 10^{n-1}$ и $a = 2$; $b = 8 \cdot 10^{n-1}$, где $n \in N$.

Ответ: $a = 1$; $b = 5 \cdot 10^{n-1}$ и $a = 2$; $b = 8 \cdot 10^{n-1}$, $n \in N$.

12. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a < b$ и выполняется равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$.

Решение.

Предположим, что числа a и b удовлетворяют условию задачи.

Поскольку $b \geq a > 0$, то $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$, и, значит, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{a}$.

Так как по условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$, то $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{a}$, $a \leq 20$.

При этом так как $\frac{1}{b} > 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{10} - \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$ и $a > 10$.

Таким образом, для числа a получена следующая оценка: $10 < a \leq 20$.

Из равенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$ выразим b через a: $b = \frac{10a}{a-10}$. Искомыми значениями a являются те натуральные числа из промежутка $[11;20]$, при которых число $\frac{10a}{a-10}$

является натуральным. Подставляя в выражение $\frac{10a}{a-10}$ все натуральные числа от 11 до 20, получаем все искомые значения a и соответствующие им значения b.
Ответ: $(11;110)$; $(12;60)$; $(14;35)$; $(15;30)$; $(20;20)$.

13. Найдите все пары натуральных чисел m и n, что каждое из чисел m^3+2m+n^3 и n^3+2n+m^3 делится на число m^2+n^2.

Решение

Если оба числа m^3+2m+n^3 и n^3+2n+m^3 делятся на число m^2+n^2, то и их разность $2(m-n)$ делится на m^2+n^2. Покажем, что $|2(m-n)|<m^2+n^2$. Обозначим через k наибольшее из чисел m и n, тогда $|2(m-n)|<2k\le k^2+1\le m^2+n^2$.

Так как $2(m-n)$ делится на m^2+n^2 и $|2(m-n)|<m^2+n^2$, то $2(m-n)=0$. Следовательно, $m=n$ и задача сводится к нахождению таких натуральных чисел n, что $2(n^3+n)$ делится на $2n^2$.

$2(n^3+n)=q\cdot 2n^2$; $n^2+1=qn$; $qn-n^2=1$; $n(q-n)=1$.

Из этого равенства следует, что n является делителем 1, поэтому единственно возможное значение n - это $n=1$.

Ответ: $m=n=1$.

14. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\frac{a^4+16a^2+7}{a^3+15a}$ можно сократить на b.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида.

Если целые числа a^4+16a^2+7 и $a(a^3+15a)$ делятся на b, то и их разность $(a^4+16a^2+7)-a(a^3+15a)=a^2+7$ делится на b.

Тогда число $(a^3+15a)-a(a^2+7)=8a$ делится на b.

Тогда число $8(a^2+7)-a\cdot 8a=56$ делится на b.

Таким образом, искомое число b - простой делитель числа 56, то есть 2 или 7.

Проверим, для каких из этих чисел существует число a.

Если a нечетное, то числитель и знаменатель данной дроби четные числа, поэтому дробь можно сократить на 2.

Если a кратно 7, то числитель и знаменатель данной дроби также кратно 7, поэтому дробь можно сократить на 7.

Ответ: 2; 7.

15. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе – это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел задуманного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть
22-1=21. Но этого числа в наборе нет, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 – наименьшее число в наборе – является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна 41-7-9-11=14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14.

16. Дана арифметическая прогрессия, первый член которой равен 501, а разность равна 17. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученным числом поступили так же и действовали так до тех пор, пока не получилось однозначное число.

а) Найдите 14-е число получившейся последовательности однозначных чисел.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему равна наибольшая возможная сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

17. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -3, -1, 2, 4, 6, 7, 9. Какие числа были задуманы?

Решение. Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число – наименьшее в число в наборе, т.е. -3. Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа -3, 2, 9.

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

Решение. Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей (k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся

как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль). Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечетное количество нулей.
Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля.
Пусть задумано пять или меньше ненулевых чисел. Среди них есть положительные и отрицательные. Нуль получается тогда и только тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака? Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь различных сумм, среди которых не более двух совпадают (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел); четыре различных задуманных числа одного знака дают пятнадцать различных сумм, среди которых не может быть трех одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырех.
Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырех нулей.
Если были задуманы числа -5; -2; -1; 1; 2; 3, то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел – 6.

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?
Решение. Для задуманных чисел -3; 1; 2 и -2; -1; 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Нет, не всегда.
Ответ: а) -3; 2; 7; б) 6; в) нет.

18. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасывается наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение. Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}$, $B=\frac{n}{5}$, где m и n - некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}$. Если $A-B=\frac{1}{30}$, то $5m-7n=\frac{35}{30}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{30}$.

б) Например, для оценок 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна $\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7}-$

$\frac{1+2+4+7+8}{5}=\frac{31}{7}-\frac{22}{5}=\frac{1}{35}$.

в) Пусть x - наименьшая, z - наибольшая, а y - сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\le\frac{5x+5z-2((x+1)+...+(x+5))}{35}=\frac{5z-5x-30}{35}\le$$

$$\le\frac{5\cdot10-5\cdot0-30}{35}=\frac{4}{7}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность $A-B=\frac{4}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна $\frac{4}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.

19. а) Можно ли представить число 2052 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли представить число 399 в виде суммы двух различных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы шести различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение.

а) Например, числа 2043 и 9 имеют одинаковую сумму цифр и в сумме дают 2052.

б) Предположим, что число 399 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Пусть одно из этих чисел состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда другое число состоит из $3-a$ сотен, $9-b$ десятков и $9-c$ единиц. Суммы цифр этих чисел равны $a+b+c$ и $21-a-b-c$ соответственно. Они имеют разную чётность и не могут быть одинаковыми.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы шести различных натуральных чисел с одинаковой фиксированной суммой цифр, равно сумме шести наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3, 4 и 5 имеем соответственно:

1+10+100+1000+10000+100000=111111,

2+11+20+101+110+200=444,

3+12+21+30+102+111=279,

4+13+22+31+40+103=213,

5+14+23+32+41+50=165.

Если сумма цифр равна 6 или больше, то обозначим ее через a. Тогда наименьшее из таких чисел – как минимум a. Числа с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому идут как минимум через 9. Значит, их сумма не меньше, чем

$a+(a+9)+(a+18)+(a+27)+(a+36)+(a+45)=6a+135\ge171$.

Получаем, что искомое число равно 165.
Ответ: а) да; б) нет; в) 165.

20. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причем и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.
а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в этой группе?

Решение. а) Пусть 14 юношей отправили по 4 письма и трое юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили 119 писем. Эти 119 писем можно распределить между 17 девушками так, чтобы каждая получила ровно 7 писем.

б) Пусть a юношей отправили по 4 письма и b юношей отправили по 21 письму. Эти письма можно поровну распределить между $a+b$ девушками, если суммарное количество писем $4a+21b$ делится на количество девушек. В этом случае число $17b=(4a+21b)-4(a+b)$ также делится на $a+b$. Если $a+b$ не делится на 17, то b делится на $a+b$, что противоречит условиям $a>1$, $b>1$. Значит, $a+b$ делится на 17. Наименьшее натуральное число, делящееся на 17, - это 17. Пример того, что девушек может быть ровно 17, приведен в предыдущем пункте.

в) Пусть a юношей отправили по 4 письма и $n-a$ юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили $4a+21(n-a)$ писем, а число полученных девушками писем не меньше $0+1+\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Получаем

$$4a+21(n-a)\geq\frac{n(n-1)}{2};\ n<43.$$

При $n=42$ имеем $882-17a\geq 861$; $17a\leq 21$, что противоречит условию $a\geq 2$. Если $n=41$, $a=2$, то суммарное количество отправленных писем равно $2\cdot 4+39\cdot 21=827$. Эти письма можно распределить между девушками следующим образом: 40 девушек получили от 0 до 39 писем и ещё одна – 47. Таким образом, наибольшее возможное количество девушек – это 41.

Ответ: а) да; б) 17; в) 41.

21. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 75 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 6 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.
а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 75 баллов, средний балл участников, сдавших тест, составил 85, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 60. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 89, а не сдавших тест – 61. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 94, 74 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест, составлял $\frac{74+2}{2}=38$ баллов. После добавления баллов у участников оказалось 100, 80 и 8 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 8 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников, сдавших тест, первоначально составлял 94 балла, а после добавления баллов составил $\frac{100+80}{2}=90$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Средний балл после добавления составил 81. Имеем два уравнения: $75N=60(N-a)+85a$ и $81N=61(N-b)+89b$, откуда $15N=25a$, то есть $3N=5a$, и $20N=28b$, то есть $5N=7b$. Поэтому, целое число N делится на 5 и на 7, то есть делится на 35. Таким образом, $N \geq 35$.

Покажем, что N могло равняться 35. Пусть изначально 10 участников набрали по 55 баллов, 2 участника – 72 балла, 2 участника – 73 балла и 21 участник по 85 баллов. Тогда средний балл был равен 75, средний балл участников, сдавших тест, был равен 85, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 60. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 89, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 61. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 35.