1. Решите уравнение $\left(ctgx - ctg^2 x\right) \cdot \sqrt{2\sin x} = 0.$

$$\left(ctgx - ctg^2 x\right) \cdot \sqrt{2\sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ctgx - ctg^2 x = 0, \\ \sqrt{2\sin x} = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $ctgx - ctg^2 x = 0.$

ОДЗ: $\left(-\infty; \pi n, n \in Z\right) \cup \left(\pi n, n \in Z; +\infty\right).$

$ctgx\left(1 - ctgx\right) = 0,\ \ ctgx = 0$ или $1 - ctgx = 0$

$ctgx = 0 \ \ \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$1 - ctgx = 0 \ \ \Rightarrow ctgx = 1 \ \ \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \ \ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x \neq \pi n, n \in Z \end{array}\right.$ -

решение уравнения $ctgx - ctg^2 x = 0.$

Решим второе уравнение $\sqrt{2\sin x} = 0.$

ОДЗ: $\left(2\pi n,\ \ \pi + 2\pi n, n \in Z\right).$

$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\ \ n \in Z.$

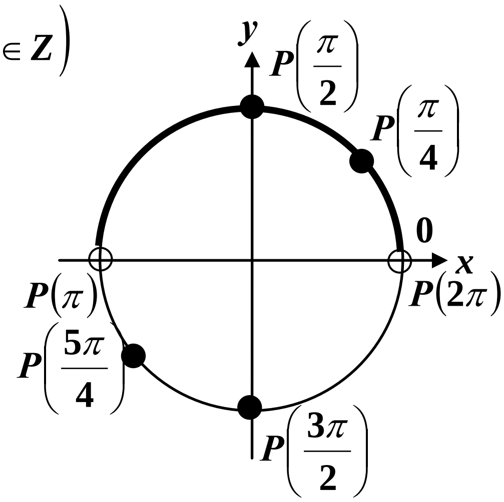
$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z; \\ x \in \left(2\pi n,\ \ \pi + 2\pi n, n \in Z\right) \end{array}\right.$ - решение уравнения $\sqrt{2\sin x} = 0.$

$$\left(ctgx - ctg^2 x\right) \cdot \sqrt{2\sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \ \ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x \neq \pi n, n \in Z \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z; \\ x \in \left(2\pi n,\ \ \pi + 2\pi n, n \in Z\right) \end{array}\right. \end{cases}$$

Отметим на $\left[0; 2\pi\right]$ множество решений системы:

При $n = 0$ $\ x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x = \dfrac{\pi}{4};\ \ x \neq 0;\ \ x \in \left(0; \pi\right)$

При $n = 1$ $\ x = \dfrac{3\pi}{2},\ \ x = \dfrac{5\pi}{4};\ \ x \neq \pi$



Т.о., $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$ – решения уравнения $\left(ctgx - ctg^2 x\right) \cdot \sqrt{2\sin x} = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

2. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{3}tgx-1}=0.$

$$\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{3}tgx-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x-3\sin x+1=0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}tgx-1\neq 0, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим первое уравнение: $2\sin^2 x-3\sin x+1=0.$

Пусть $\sin x=t,\ t\in[-1;1],\ 2t^2-3t+1=0,\ D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1,$

$t_1=\dfrac{3+1}{4}=1;\ \ t_2=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\sin x=1\ \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z;\qquad \sin x=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z$

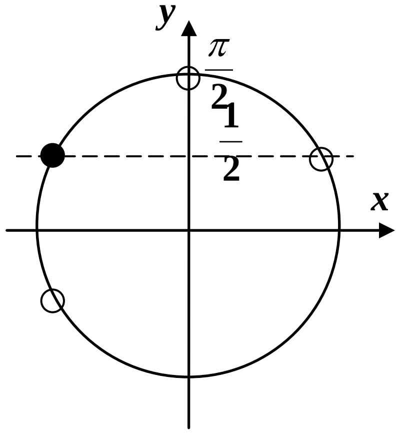
Решим второе уравнение:

$\sqrt{3}tgx-1\neq 0,\ \ tgx\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \ x\neq\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Т.о., $\begin{cases} 2\sin^2 x-3\sin x+1=0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}tgx-1\neq 0, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z;\ \ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z; \\ \left[\begin{array}{l} x\neq\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z, \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right. \end{cases}$

Отметим на единичной окружности множество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x-3\sin x+1=0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}tgx-1\neq 0, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \end{array}\right. \end{cases}$$



При $n=0$ $\ x=\dfrac{\pi}{2};\ \ x=\dfrac{\pi}{6};\ \ x\neq\dfrac{\pi}{6},\ \ x\neq\dfrac{\pi}{2}.$

При $n=1$ $\ x=\dfrac{5\pi}{2};\ \ x=\dfrac{5\pi}{6};\ \ x\neq\dfrac{7\pi}{6};\ \ x\neq\dfrac{3\pi}{2}.$

При $n=2$ $\ x=\dfrac{9\pi}{2};\ \ x=\dfrac{13\pi}{6};\ \ x\neq\dfrac{13\pi}{6}; x\neq\dfrac{5\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Т.о., $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z-$ решение уравнения $\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{3}tgx-1}=0.$

Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

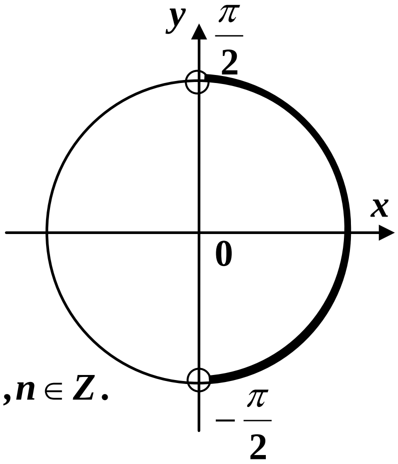
3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \left(2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\right)\left(5y + 6\right) = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \left(2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\right)\left(5y + 6\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sin x, \\ \left(2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\right)\left(5y + 6\right) = 0 \end{cases}$$

$y = -\sin x \Rightarrow y \in [-1;1]$.

Решим второе уравнение: $\left(2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\right)\left(5y + 6\right) = 0$

$\left(2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\right)\left(5y + 6\right) = 0$, если $2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3} = 0$ или $5y + 6 = 0$.



$\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \; n \in Z.$

$\sqrt{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \cos x = \frac{3}{4},$

$x = \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или

$x_1 = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z; \; x_2 = -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

$y = -\sin x \Rightarrow y^2 = \sin^2 x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$

$y_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}; \; y_2 = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right)$ $\sin x < 0 \Rightarrow y > 0,$ при $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $\sin x > 0 \Rightarrow y < 0.$

Т.о., $\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right), n \in Z; \; \left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; \frac{\sqrt{7}}{4}\right), n \in Z.$

Ответ: $\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right), n \in Z; \; \left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; \frac{\sqrt{7}}{4}\right), n \in Z.$

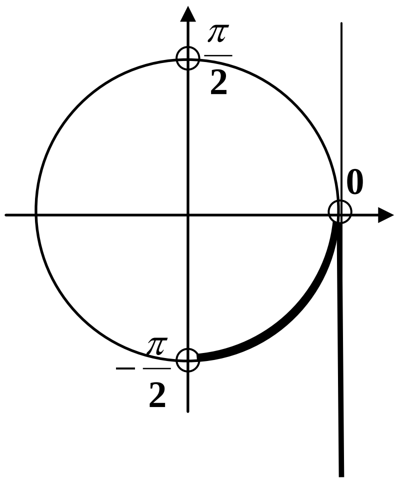
4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4^{\sin x}+2^{\sin x-0{,}5}=1, \\ \sqrt{y-8}+6tgx=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 4^{\sin x}+2^{\sin x-0{,}5}=1, \\ \sqrt{y-8}+6tgx=0. \end{cases}$$

Уравнение $\sqrt{y-8}=-6tgx,$ эквивалентно системе вида

$$\begin{cases} -6tgx>0, \\ y-8=36tg^2x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx<0, \\ y=36tg^2x+8; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right),\ \ n\in Z, \\ y=36tg^2x+8. \end{cases}$$



$4^{\sin x}+2^{\sin x-0{,}5}=1,\ \ 2^{2\sin x}+2^{\sin x-0{,}5}=1,$

$2^{2\sin x}+2^{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1.$

Пусть $2^{\sin x}=t,\ \ t>0.$

Т.к. $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right), n\in Z,$ то $\sin x<0,\Rightarrow$

$\Rightarrow t\in(0;1).$

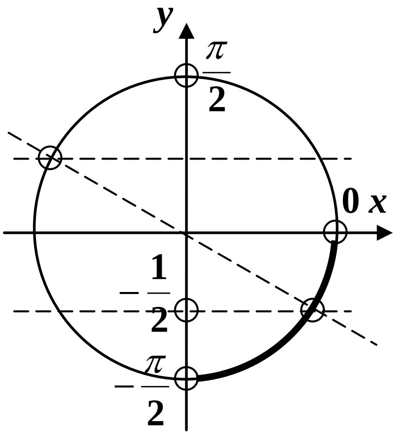
$$t^2+\frac{t}{\sqrt{2}}-1=0;\ \ D=\frac{1}{2}-4\cdot1\cdot(-1)=4{,}5=\frac{9}{2};$$

$$t_1=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ t_2=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{-\frac{4}{\sqrt{2}}}{2}=-\sqrt{2}\notin(0;1).$$

$2^{\sin x}=2^{-\frac{1}{2}},\ \ \sin x=-\frac{1}{2},$

$$\begin{cases} x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k, k\in Z, \\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right), n\in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z$$



$$\sqrt{y-8}=-6tgx,\ \ tg\left(-30^\circ\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt{y-8}=\frac{6}{\sqrt{3}},\ \ y-8=12,\ \ y=20$$

Ответ: $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z;\ \ 20\right).$

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 5^{y+1} - 5^{-y} = 3\cos x - 1, \\ 5^{-y} + 5^{y+1} = \cos x + 7. \end{cases}$

$\cos x = 5^{-y} + 5^{y+1} - 7 \Rightarrow \quad 5^{y+1} - 5^{-y} = 3\left(5^{-y} + 5^{y+1} - 7\right) - 1,$

$5^{y+1} - 5^{-y} - 3 \cdot 5^{-y} - 3 \cdot 5^{y+1} = -22, \quad -2 \cdot 5^{y+1} - 4 \cdot 5^{-y} = -22, \quad -10 \cdot 5^{y} - \dfrac{4}{5^{y}} = -22.$

Обозначим $5^{y} = t,$ где $t > 0,$ тогда $-10t - \dfrac{4}{t} = -22.$

$-10t - \dfrac{4}{t} = -22 \;\Big|\cdot t,$

$-10t^{2} + 22t - 4 = 0,$

$D = 484 - 160 = 324;$

$t_1 = \dfrac{-22 + 18}{-20} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}; \quad t_2 = \dfrac{-22 - 18}{-20} = 2 \Rightarrow$

$5^{y} = \dfrac{1}{5}, \quad y = -1;$

$\Rightarrow$

$5^{y} = 2, \quad y = \log_5 2$

$\cos x = 5^{-y} + 5^{y+1} - 7 = 5^{-(-1)} + 5^{-1+1} - 7 = 5 + 1 - 7 = -1,$

$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 5^{-y} + 5^{y+1} - 7 = 5^{-\log_5 2} + 5^{\log_5 2 + 1} - 7 = \left(5^{\log_5 2}\right)^{-1} + 5 \cdot 5^{\log_5 2} = 2^{-1} + 5 \cdot 2 = 9{,}5,$

$\cos x = 9{,}5,$ т.к. $9{,}5 \notin [-1;1],$ то уравнение $\cos x = 9{,}5$ не имеет корней.

Т.о., $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, $y = -1$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 5^{y+1} - 5^{-y} = 3\cos x - 1, \\ 5^{-y} + 5^{y+1} = \cos x + 7. \end{cases}$

Ответ: $(\pi + 2\pi n; -1), n \in Z.$

6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4), \\ 2\sqrt{2}\cos y = x. \end{cases}$

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4)$$
$$x^2+3-1{,}5(x+4)=\sqrt{2x^2-3x+2}$$
$$x^2+3-1{,}5x-6=\sqrt{2x^2-3x+2}$$
$$x^2-1{,}5x-3=\sqrt{2x^2-3x+2}$$

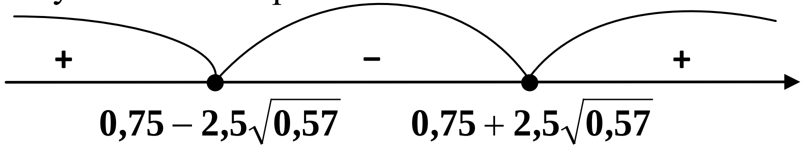
$$\begin{cases} x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4), \\ 2\sqrt{2}\cos y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1{,}5x-3=\sqrt{2x^2-3x+2}, \\ 2\sqrt{2}\cos y = x \end{cases}$$
$$x^2-1{,}5x-3=\sqrt{2x^2-3x+2}$$

$$x^2-1{,}5x-3=\sqrt{2x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2x^2-3x-6=2\sqrt{2x^2-3x+2} \Leftrightarrow$$
$$\left(2x^2-3x-6\right)^2=4\left(2x^2-3x+2\right)$$
Уравнение $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4)$ эквивалентно системе вида
$$\begin{cases} x^2-1{,}5x-3\ge 0, \\ \left(2x^2-3x-6\right)^2=4\left(2x^2-3x+2\right). \end{cases}$$
Решим неравенство $x^2-1{,}5x-3\ge 0$ методом интервалов.

Пусть $f(x)=x^2-1{,}5x-3,\ \ D(f(x))=(-\infty;+\infty).$

Найдем, когда $f(x)=0$

$$x^2-1{,}5x-3=0,\quad D=2{,}25+12=14{,}25;$$
$$x_1=\frac{1{,}5+5\sqrt{0{,}57}}{2}=0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};\quad x_2=\frac{1{,}5-5\sqrt{0{,}57}}{2}=0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}$$
$$f(x)=\left(x-0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right)\left(x-0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57}\right).$$
На $D(f(x))$ отметим нули функции и определим знаки функции на каждом из полученных интервалов.



Определим знак функции на крайнем правом интервале:
$$f(5)=\left(5-0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right)\left(5-0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57}\right)=\left(4{,}25-\sqrt{3{,}5625}\right)\left(4{,}25+\sqrt{3{,}5625}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{18{,}0625}-\sqrt{3{,}5625}\right)\left(4{,}25+\sqrt{356{,}25}\right)>0;$$
Т.к. $f(x)=\left(x-0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right)\left(x-0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57}\right)$ не содержит множителей в квадрате, то знаки функции на других интервалах будут меняться.

Т.о., $f(x)>0$, при $x\in\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right]\cup\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};+\infty\right).$

Обозначим $2x^2-3x=t$, тогда $(t-6)^2=4(t+2)$.

$$t^2-12t+36=4t+8,$$

$$t^2-16t+28=0,$$
$$D=256-112=144,$$
$$t_1=\frac{16+12}{2}=14,\quad t_2=\frac{16-12}{2}=2$$

$2x^2-3x=14$ или $2x^2-3x=2$

$$2x^2-3x-14=0,\qquad 2x^2-3x-2=0,$$
$$D=9-4\cdot 2\cdot(-14)=9+112=121,\qquad D=9-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25,$$
$$x_1=\frac{3+11}{4}=\frac{7}{2}=3{,}5;\ \ x_2=\frac{3-11}{4}=-2;\qquad x_1=\frac{3+5}{4}=2,\ \ x_2=\frac{3-5}{4}=-0{,}5.$$

$$\begin{cases}x^2-1{,}5x-3\ge 0,\\ \left(2x^2-3x-6\right)^2=4\left(2x^2-3x+2\right);\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{57}\right]\cup\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{57};+\infty\right)\\ x_1=3{,}5;x_2=-2;x_3=2;x_4=-0{,}5\end{cases}\Rightarrow$$

$$0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\approx 0{,}75-2{,}5\cdot 0{,}755\approx 0{,}75-1{,}8875\approx -1{,}1375;$$
$$0{,}75+2{,}5\sqrt{57}\approx 0{,}75+2{,}5\cdot 0{,}755\approx 0{,}75+1{,}8875\approx 2{,}6375.$$
$$x\in\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right]\cup\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};+\infty\right).$$
$$3{,}5\in\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};+\infty\right);-2\in\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right];$$
$$2\notin\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right]\cup\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};+\infty\right);\qquad\Rightarrow$$
$$-0{,}5\notin\left(-\infty;0{,}75-2{,}5\sqrt{0{,}57}\right]\cup\left[0{,}75+2{,}5\sqrt{0{,}57};+\infty\right)$$

3,5 и **−2** - корни уравнения $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4).$

Решим второе уравнение системы:

$$2\sqrt{2}\cos y=x.$$

Подставим найденные значения переменной x:

$$2\sqrt{2}\cos y=3{,}5$$

$\cos y=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{32}}=\sqrt{1\dfrac{17}{32}}\notin[-1;1]\Rightarrow$ уравнение $2\sqrt{2}\cos y=3{,}5$ не имеет решений.

$$2\sqrt{2}\cos y=-2$$
$$\cos y=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$$

Т.о., $x=-2$, $y=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ – решение системы

уравнений

$$\begin{cases}x^2-1{,}5x-3\ge 0,\\ \left(2x^2-3x-6\right)^2=4\left(2x^2-3x+2\right)\end{cases}\Rightarrow\left(-2;\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\right);\left(-2;-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\right).$$

Ответ: $\left(-2;\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\right);\left(-2;-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\right).$