ЗАНЯТИЕ ФАКУЛЬТАТИВА В 11 КЛАССЕ Подготовка к ЕГЭ.

ТЕМА : «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Н.В.Лукашова,
учитель математики
первой квалификационной категории
МОУ «Каслинская СОШ №27»

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При решении логарифмических уравнений нужно хорошо знать определение логарифма и логарифмические тождества.

Логарифмом числа *b* по основанию *a* (*a*>0; *a*N1) называется показатель степени *n*, в которую надо возвысить это основание, чтобы получить число *b* (*b*>0). Запись $\log_a b = n$ означает, что $a^n = b$. Из этого определения следует основное тождество :

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (1)$$

Надо помнить, что:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c; \qquad (2)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c; \qquad (3)$$

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b; \qquad (4)$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b; \qquad (5)$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}; \qquad (6)$$

$$\log_a a = 1; \qquad (7)$$

$$\log_a 1 = 0; \qquad (8)$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$ (*a*>0; *b*>0; *c*>0, *c*N1). (9)

Логарифмирование по основанию *c*>0 ; *c*N1 представляет собой переход от равенства

$$a = b \qquad (10)$$

к равенству

$$\log_c a = \log_c b \qquad (11)$$

где a и b могут обозначать числа или выражения, содержащие переменные.

Потенцированием по основанию $c>0$; cN1 назовем переход от равенства (11) к равенству (10).

Замечание: Отметим важную особенность формул с 1 по 4-ю. Их правые и левые части, взятые по отдельности, определены на разных множествах значений переменных (b и c). Например, в формуле (1) левая часть определена для $b>0$, а правая - для всех b. В формулах (2) и (3) левые части определены для всех пар bи с одного знака (т.е. при $bc>0$), а правые - лишь для $b>0$, $c>0$. В формуле (4) при $k=2n$, где n - целое; nN0 левая часть определена для всех bN0, правая же только для $b>0$.

Поэтому преобразуя $\log_a [f(x)]^{2n}$ нужно рассмотреть два случая:

если f(x)>0, то $\log_a [f(x)]^{2n} = 2n \cdot \log_a f(x)$

если f(x)<0, то $\log_a [f(x)]^{2n} = 2n \cdot \log(-f(x))$

Пример 1. Вычислить: $100^{1-\lg 2,5}$.

Решение.

$$100^{1-\lg 2,5} = \frac{100}{10^{2\lg 2,5}} = \frac{100}{10^{\lg 6,25}} = \frac{100}{6,25} = 16.$$

$$100^{1-\lg 2,5} = \frac{100}{10^{2\lg 2,5}} = \frac{100}{10^{\lg 6,25}} = \frac{100}{6,25} = 16.$$

$$100^{1-\lg 2,5} = \frac{100}{10^{2\lg 2,5}} = \frac{100}{10^{\lg 6,25}} = \frac{100}{6,25} = 16.$$

Ответ: 16

Типы уравнений и методы их решения

Уравнения, решаемые с использованием определения логарифма

$\log_a f(x) = g(x)$. Данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$.

Пример 2. Решить уравнение: $\log_x(x^2 - 3x + 6) = 2$.

Решение. Из определения логарифма следует, что $x^2 - 3x + 6 = x^2$, откуда 3x = 6, *x*=2.

Ответ: 2

Уравнения, решаемые с помощью операции потенцирования

Если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то f(*x*)=g(*x*). ОДЗ второго уравнения шире, чем первого, следовательно, в результате преобразования могут появиться посторонние корни. Поэтому, решив уравнение f(*x*)=g(*x*), следует выполнить проверку, подставляя корни в исходное уравнение, помня при этом, что логарифм отрицательного числа и нуля не существует.

Пример 3. Решить уравнение: $\log_2(x^2 - 17) = \log_2(x + 3)$.

Решение. Потенцируя, получим $x^2 - 17 = x + 3$, $x^2 - x - 20 = 0$.

Решив квадратное уравнение, найдем, что $x_1 = -4; x_2 = 5$. Проверка корней показывает, что корень *x*= -4 является посторонним, поскольку не входит в О.Д.З. переменной *x* исходного уравнения.

Ответ: 5

Сведение логарифмического уравнения к алгебраическому

Пример 4. Решить уравнение: $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$. В ответе указать больший корень уравнения.

Решение. Пусть $\log_3 x = t$, тогда $t^2 - 3t - 10 = 0$ или $t_1 = -2;\ t_2 = 5$.

Подставляя найденные значения t_1 и t_2 в формулу $\log_3 x = t$, получим

$$x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}; \; x_2 = 3^5 = 243.$$

Оба корня входят в область допустимых значений.

Ответ: 243

Показательное уравнение вида $[f(x)]^{\log_a g(x)} = b$.

При решении показательных уравнений данного вида успех часто достигается путем преобразования исходного уравнения в логарифмическое. С этой целью обе части исходного уравнения надо прологарифмировать по одному и тому же основанию.

Пример 5. Решить уравнение: $x^{\lg x - 1} = 100$. В ответе указать корень уравнения, или, если корней несколько, их сумму.

Решение. Прологарифмировав, получаем $(\lg x - 1)\lg x = 2$. Пусть $t = \lg x$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$ или $t_1 = 2$, $t_2 = -1$, откуда $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}1$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Находим их сумму.

Ответ: 100,1

Переход к новому основанию

Пример 6. Решить уравнение: $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$.

Решение. По формуле (9) $x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$, кроме того, $25^{\lg x} = 5^{2\lg x}$. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $5^{2\lg x} - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$.

Сделав замену $t = 5^{\lg x}$, получим квадратное уравнение $t^2 - 4t - 5 = 0$, корни которого равны $t_1 = -1, \; t_2 = 5$. Корень $t_1 = -1$ - посторонний, поскольку $5^{\lg x} > 0$. Подставляя $t=5$ в формулу замены, получим $5^{\lg x} = 5$, или $\lg x=1$, или $x=10$.

Ответ: 10

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

1. $\log_6 3 + \log_6 12$ *Ответ: 2*
2. $\log_3 9 - \log_2 16$ *Ответ: -2*
3. $\log_{0,5} 32$ *Ответ: -5*
4. $2\lg 0{,}001 - 6\lg \sqrt[3]{100}$ *Ответ:-10*
5. $\log_{27} 3 - \log_{1/9} (3\sqrt[3]{3})$ *Ответ: 1*
6. $10^{0,5\lg 4}$ *Ответ: 2*
7. $12\lg \sqrt[3]{0{,}01}$ *Ответ: -8*
8. $\lg 30 + \lg 6 - \lg 18$ *Ответ: 1*
9. $\log_4 (\log_3 \sqrt[4]{3})$ *Ответ: -1*
10. $\lg \sqrt[4]{100} - \lg 0{,}1$ *Ответ: 1,5*
11. $\log_3 5 + \log_3 \frac{81}{5}$ <> *Ответ: 4*
12. $4^{\log_2 \sqrt{3}}$ *Ответ: 3*
13. $2^{3\log_2 4}$ *Ответ: 64*
14. $5^{1-\log_5 10}$ *Ответ: 0,5*
15. $\dfrac{\log_3 12}{2 + \log_3 16}$ *Ответ: 0,5*
16. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2 \frac{1}{13}}$ *Ответ: 169*
17. $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$ *Ответ: 5*
18. $3^{\lg 25 - \lg 5 - \lg 0.5 + \lg 10}$ *Ответ: 9*

Решить уравнения:

19. $\log_{x-1} (x^2 - 5x + 7) = 1$ *Ответ: 4*
20. $0{,}5\lg(2x - 1) = 1 - \lg \sqrt{x - 9}$ *Ответ: 13*
21. $0{,}1 \cdot x^{\lg x - 2} = 100$ *Ответ: 100*

    Найти произведение корней

22. $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$ *Ответ: 3*

23. $\log_2(5^x + 2x + 6) = x \cdot \log_2 20 - 2x$ *Ответ: -3*

24. $(\sqrt[4]{x})^{\log_2 x + 4} = 0{,}5$ *Ответ: 0,25*

Найти наибольший корень в следующих уравнениях:

25. $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x - 1} = \frac{26}{5}$ *Ответ: 1*

26. $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$ *Ответ: -1*

27. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$ *Ответ: 9*

28. $\lg(x^3 + 8) - 0{,}5 \cdot \lg(x^2 + 4x + 4) = \lg 7$ *Ответ: 3*

Решить уравнение:

29. $\frac{2\lg x}{\lg x - 1} = \frac{2}{\lg x - 1} - \lg x$ *Ответ: 0,01*

Решите уравнение. В ответе укажите наибольший корень уравнения

30. $(x-3)^2 \log_2(x-1) + 2\log_{(x-1)} \sqrt{2} = (x-3)^2 \log_{(x-1)} 2 + 2\log_2 \sqrt{x-1}$ *Ответ: 1,5*

Решить уравнения:

31. $\log_3\left(2^x - 1\right) - \log_3\left(2^x - 2^{-x}\right) = x\log_3 2 - 2$ *Ответ: 3*

32. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ *Ответ: 27*

Решите неравенство. В ответе укажите наименьшее решение неравенства

33. $\log_2 \frac{x}{x-1} \le \log_9 \frac{1}{9}$ *Ответ: -1;* $x \in [-1;0)$

Решите неравенство. В ответе укажите наибольшее решение неравенств

34. $\log_{0,5} \frac{3x+1}{x+1} \ge \log_2 9 - \log_2 18$ *Ответ: 1*

Решите неравенство. В ответе укажите наименьшее положительное значение х, удовлетворяющее неравенству.

35. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \geq \cos\frac{2\pi}{3}$ $x \in (-\infty;-9] \cup (3;+\infty)$ *Ответ: 4*

36. $\log_2\left(\frac{7x+1}{x+2}\right) \leq \log_3 27$ *Ответ: 1*

Решите неравенство. В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства

37. $\log_{16}\frac{5x-}{2x+16} < \frac{1}{4}$ *Ответ: 1*