

# ПОДГОТОВКА К ОГЭ.

## Справочные материалы для учащихся 9 класса.

### Алгебра

#### Натуральные числа и действия над ними

Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не определяется через другие, более простые понятия. Натуральные числа возникли в результате счета предметов. Их можно записывать как ряд чисел: 1, 2, 3, ... Обозначается множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

Для натуральных чисел определены действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, причем сложение и умножение выполняются всегда.

Результат сложения двух или нескольких чисел называется их суммой, а сами числа – слагаемыми:  $a + b + c + \dots + k = p$ , где  $p$  – сумма;  $a, b, c, \dots, k$  – слагаемые.

*Законы:*

1)  $a + b = b + a$  – переместительный, коммутативный;

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  – сочетательный, ассоциативный;

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  – распределительный, дистрибутивный.

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

*Вычесть из числа  $a$  число  $b$*  – значит найти такое число  $x$ , которое в сумме с числом  $b$  дает число  $a$ , т.е.  $a - b = x$ , если  $b + x = a$ , где  $x$  – разность  $a$  и  $b$  и обозначается  $a - b$ ,  $a$  – уменьшаемое,  $b$  – вычитаемое.

*Разделить число  $a$  на число  $b$*  – значит найти  $x$ , при умножении которого на число  $b$  получается  $a$ , т.е.  $a : b = x$ , если  $x \cdot b = a$ , где  $a$  – делимое,  $b$  – делитель числа  $a$ ,  $x$  – частное.

Число, которое делится на 2, называется *четным*.

Число, которое не делится на 2, называется *нечетным*.

*Признаки делимости чисел.*

1. На 2 делятся все те, и только те числа, у которых в разряде единиц четное число.
2. На 5 делятся все те, и только те числа, у которых цифра единиц 0 или 5.
3. На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.
4. На 3 (9) делятся те, и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (9).
5. На 4 (25) делятся те, и только те числа, у которых две последние цифры – нули, или выражают число, делящееся на 4 (25).
6. На 6 делятся те, и только те числа, которые делятся и на 2, и на 3.
7. Если каждое слагаемое делится без остатка на данное число, то и сумма разделится без остатка на данное число.
8. Если делятся на данное число все слагаемые, кроме одного слагаемого, которое не делится на данное число, то и сумма не разделится на данное число.
9. Если хотя бы один из сомножителей делится на данное число, то и все произведение разделится на данное число.

### **Простые и составные натуральные числа**

Если одно из натуральных чисел делится на другое без остатка, то первое число называется *кратным* второго, а второе – *делителем* первого.

*Например:*  $14 : 7 = 2$ , 14 – кратное числа 7, а 7 – делитель числа 14;

14 – кратное числа 2, а 2 – делитель числа 14.

Число  $a$  называется *простым*, если его делителями является только 1 и само число  $a$ . Например: 2, 3, 5, 13, 29,...

Число  $a$ , имеющее более двух натуральных делителей (кроме 1 и  $a$ ) называется *составным*. Например: 4, 6, 15,...

Число 1 – ни простое, ни составное.

*Основная теорема арифметики.* Любое составное натуральное число можно представить единственным образом в виде произведения простых чисел или их степеней

*Например:*  $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ ;

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3;$$

$$525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

### **Наибольший общий делитель (НОД)**

Число, на которое делится каждое из данных чисел, называется *общим делителем* этих чисел.

Самый большой из общих делителей данных чисел называется их *наибольшим общим делителем*.

*Например:* найти НОД чисел 126; 540; 630.

Разложим эти числа на простые множители:

$$126 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7; \quad 540 = 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5; \quad 630 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5 \cdot 7.$$

Найдем наибольший общий делитель  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ .

$$\text{НОД}(126, 540, 630) = 18.$$

Таким образом, чтобы *найти НОД* нескольких чисел, нужно разложить их на простые множители, выписать их общие простые множители и перемножить.

Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называются *взаимно простыми*.

*Например:* 16 и 25;  $\text{НОД}(16; 25) = 1$ , т.к.  $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ,  $25 = 5 \cdot 5$ .

### **Наименьшее общее кратное (НОК)**

Число, которое делится на каждое из данных чисел, называется *общим кратным* этих чисел.

Самое меньшее из общих кратных данных чисел называется их *наименьшим общим делителем*.

*Например:* найти НОК чисел 63; 280; 150.

Разложим эти числа на простые множители:

$$63 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7; 280 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot 7; 150 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}.$$

Найдем наименьшее общее кратное  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 12600$ .

$$\text{НОК}(63; 280; 150) = 12600.$$

Таким образом, чтобы *найти НОК* нескольких чисел, необходимо разложить их на простые множители, из большего числа выписывают все множители и к ним приписывают недостающие множители из разложений остальных чисел.

Если числа взаимно простые, то их произведение и есть НОК.

### Дроби обыкновенные и десятичные

Одна или несколько равных частей единицы называются *обыкновенной дробью*.

Записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Число, стоящее под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называется *знаменателем дроби*. Число, стоящее над чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называется *числителем дроби*.

Дробную черту можно рассматривать как знак деления:  $\frac{2}{7} = 2 : 7$

Дробь, у которой числитель равен знаменателю, равна единице:  $\frac{5}{5} = 1$

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной*:  $\frac{3}{8}; \frac{7}{15}; \dots$

Дробь, в которой числитель равен знаменателю или больше его, называется *неправильной*:  $\frac{3}{3}; \frac{8}{5}; \dots$

Дроби  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  называются *равными*, если  $a \cdot d = b \cdot c$ .

*Основное свойство дроби*. Если оба члена дроби увеличить в одно и то же число раз или уменьшить в одно и то же число раз, то величина дроби не изменится.

Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен 10,100,1000 и т.д. называют *десятичной дробью*:  $\frac{3}{10} = 0,3$ ;  $\frac{29}{100} = 0,29$ .

### Периодические дроби

Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется *периодической*:  $0,3333\dots = 0,(3)$ ;  $2,6555\dots = 2,6(5)$ .

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

*Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную.*

Надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, а после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

$$\text{Например: } 0,(45) = \frac{45 - 0}{99} = \frac{5}{11}; \quad 3,1(73) = \frac{3173 - 31}{990} = \frac{3142}{990} = \frac{1571}{495}.$$

*Правило перевода обыкновенной дроби в бесконечную периодическую дробь.*

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

$$\text{Например: } \frac{7}{25} = 7 : 25 = 7,0 : 25 = 0,28.$$

### Отношение. Проценты. Пропорции

*Отношением* числа  $x$  к числу  $y$  называется частное чисел  $x$  и  $y$ , то есть  $\frac{x}{y}$  или  $x : y$ . Отношение  $\frac{x}{y}$  означает во сколько раз  $x$  больше  $y$ , или какую часть числа  $y$  составляет число  $x$ .

*Пропорцией* называется равенство двух отношений, то есть  $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ .

$a$  и  $y$  называются *крайними членами*,  $x$  и  $b$  называются *средними членами* пропорции.

*Свойства пропорции.*

- произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов, то есть если  $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ , то  $ay = bx$ .

- обратно: числа  $a, b, x, y$  составляют пропорцию  $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ , если  $ay = bx$ .

- из пропорции  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  вытекают пропорции

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

то есть в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

- чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{ac}{b};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow x = \frac{ad}{c}.$$

*Процентом* называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %.

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на сто.

*Например:*  $125\% = 1,25$ ;  $2,3\% = 0,023$ .

*Нахождение процентов данного числа.* Чтобы найти  $a\%$  от числа  $b$ , надо  $b$  умножить на  $a$  и разделить на 100.

*Например:*  $30\%$  от 60 составляют  $\frac{60 \cdot 30}{100} = 18$ .

*Нахождение числа по его процентам.* Чтобы найти процентное отношение двух чисел  $a$  и  $b$ , надо отношение чисел умножить на  $100\%$ , то есть  $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ .

*Например:* при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпускает 66 автомобилей. На сколько процентов выполнен план?

Решение:  $\frac{66}{60} \cdot 100\% = 110\%$ .

### **Целые числа**

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются *противоположными числами*: 1 и -1, 2 и -2, 15 и -15,...

Числа натуральные, им противоположные, а так же число нуль составляют множество *целых чисел*  $Z$ .

Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называется множеством *целых неотрицательных чисел*.

Для целых чисел определены действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, причем сложение, вычитание и умножение выполняются всегда.

### **Рациональные числа**

Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет *множество рациональных чисел*  $Q$ . Любое рациональное число  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in Z, q \in N$  может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

На множестве рациональных чисел можно производить действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на нуль).

### **Иррациональные числа**

*Иррациональным числом* называют бесконечную десятичную непериодическую дробь. Множество таких дробей составляет множество *иррациональных чисел*  $I$ .

*Например:* 0,131331333125...;

$$\pi \approx 3,14;$$

$$e \approx 2,7;$$

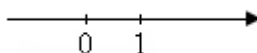
$$\frac{2}{3}, \text{ и т.д.}$$
$$\frac{1}{6},$$

## Действительные числа

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел даёт множество *действительных чисел*, которое обозначается  $R$ .

## Числовая прямая, числовые промежутки

Прямую линию с выбранными на ней началом отсчёта, единичным отрезком и направлением называют *координатной прямой*.



Каждому числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой.

Для числовых промежутков вводят обозначения:

- $[a; b]$  или  $a \leq x \leq b$  – замкнутый промежуток (или отрезок) с началом  $a$  и концом  $b$ ;
- $(a; b)$  или  $a < x < b$  – открытый промежуток (интервал);
- $(a; b]$  или  $a < x \leq b$ ;  $[a; b)$  или  $a \leq x < b$  – полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);
- $[a; +\infty)$  или  $x \geq a$ ;  $(-\infty; b]$  или  $x \leq b$  – лучи;
- $(a; +\infty)$  или  $x > a$ ;  $(-\infty; b)$  или  $x < b$  – открытые лучи;
- $(-\infty; +\infty) = R$  – координатная прямая.

## Модуль числа

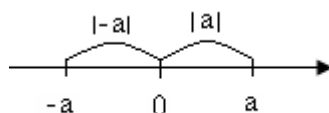
*Модулем (абсолютной величиной)* действительного числа  $a$  называется само это число, если  $a \geq 0$ , и противоположное число  $-a$ , если  $a < 0$ . Модуль  $a$  обозначается  $|a|$ . Итак,



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически  $|a|$  означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число  $a$ , до начала отсчёта.

Если  $a \neq 0$ , то на координатной прямой существуют две точки  $a$  и  $-a$ , равноудалённые от нуля, модули которых равны:



*Свойства.*

$$\begin{array}{ll} 1. |a| \geq 0 & 4. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \\ 2. |a| = |-a| & 5. |a + b| \leq |a| + |b| \\ 3. |ab| = |a||b| & 6. |a| = \sqrt{a^2} \end{array}$$

### Степень с натуральным показателем. Понятие. Свойства

Степенью числа  $a$  с показателем  $n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ :  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ .

Число  $a$  называется *основанием степени*,  $n$  – *показателем степени*.

*Свойства:*

- при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остаётся прежним

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m, n \in \mathbb{N}$$

- при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остаётся прежним

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, m, n \in \mathbb{N}$$

- при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остаётся прежним

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, m, n \in \mathbb{N}$$

- степень произведения равна произведению степеней множителей  
 $(ab)^k = a^k b^k, k \in \mathbb{N}$

- степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}, b \neq 0, k \in \mathbb{N}$$

- $0^n = 0, \quad 1^n = 1$
- $|a^n| = |a|^n$
- если  $0 \leq a < b$ , то  $a^n < b^n$
- если  $a > 1$ , то  $a^m > a^n$ , при  $m > n$ .
- если  $0 < a < 1$ , то  $a^m < a^n$  при  $m > n$ .
- если  $a < 0$ , то  $a^n > 0$  при четном  $n$  и  $a^n < 0$  при нечетном  $n$ .

*Утверждения:*

- чётная степень отрицательного числа есть число положительное;
- нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное;
- любая степень положительного числа есть число положительное;
- при возведении нуля в любую натуральную степень получается нуль;
- при возведении 1 в любую натуральную степень получается единица.

### **Степень с целым и дробным (рациональным) показателем.**

1. Рассмотрим степень  $a^p$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ .

Если  $p=0$ , то  $a^0 = 1$ , при  $a \neq 0$ .

Если  $p < 0$ , то  $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$ , при  $a \neq 0$ .

2. Рассмотрим степень  $a^{\frac{p}{q}}$ , где  $\frac{p}{q}$  - рациональное число. Выражение  $a^{\frac{p}{q}}$

имеет в общем виде смысл только при  $a > 0$ . Если  $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ , то

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

3. Степень с целым и рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(ab \dots c)^n = a^n b^n \dots c^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$$

### Квадратный корень и его свойства

*Квадратным корнем из числа  $a$*  называется такое число, квадрат которого равен  $a$ .

Нахождение квадратного корня из числа  $a$  называется *извлечением квадратного корня*.

*Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  ( $a \geq 0$ )* называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .

Для арифметического квадратного корня из числа  $a$  принято обозначение:  $\sqrt{a}$ . Знак  $\sqrt{\quad}$  называют *знаком арифметического квадратного корня*, а число  $a$  - *подкоренным выражением*.

Оба равенства для арифметических корней:  $\sqrt{a^2} = a$  при  $a \geq 0$  и  $\sqrt{a^2} = -a$  при  $a < 0$  можно объединить в одно:  $\sqrt{a^2} = |a|$  при любом действительном  $a$ .

*Свойства:*

1.  $(\sqrt{a})^2 = a$ , где  $a \geq 0$ .

2.  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , где  $a \geq 0, b \geq 0$ .

3.  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , где  $a \geq 0, b > 0$ .

## Числовые выражения

Из чисел, знаков действий и скобок можно составить различные *числовые выражения*:  $\frac{25-16}{15}$ ;  $5-(3+8\cdot 4):3$ .

Выполняя указанные в выражении действия, получим число, которое называется *числовым значением* или *значением выражения*.

Если в выражении встречается деление на ноль, то выражение не имеет смысла.

Два выражения называются *тождественно равными*, если при всех значениях, входящих в них переменных, принадлежащих общей области определений, соответственные значения этих выражений равны.

## Одночлены. Многочлены

Алгебраическое выражение, представляющее собой произведение чисел переменных и их степеней, называется *одночленом*:  $3ax^4$ ;  $-2b$ ;  $0,5c^3(-3b^2)$ .

*Стандартным видом одночлена* называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных:  $-2$ ;  $a$ ;  $5^3$ ;  $-9a^5x^3$ .

*Степенью одночлена стандартного вида* называется сумма показателей степеней переменных.

*Например*:  $8x^3y^5$  – степень одночлена равна  $3+5=8$ ;

число  $7$  имеет нулевую степень, т.к.  $7=7x^0$ .

Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются *подобными*. Сумму подобных членов можно заменить одним членом, сложив их коэффициенты и оставив ту же буквенную часть. Такое тождественное преобразование многочленов называют *приведение подобных членов*.

Алгебраическая сумма одночленов называется *многочленом*.

*Например*:  $2a^2-3ax^5-6$  – многочлен;

$$\frac{y}{x - xy^2 + x + 3} - \text{не многочлен.}$$

Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется *многочленом стандартного вида*:  $2x^3y^3 + 1,8xy^4 - 3y + 7$ .

*Степенью многочлена стандартного вида* называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен. Степень многочлена стандартного вида, рассмотренного ранее равна  $3+3=6$ .

### Формулы сокращённого умножения

1. Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
2. Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
3. Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .
4. Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .
5. Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго числа:  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .
6. Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел:  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ .
7. Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел:  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ .

## Разложение многочленов на множители

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется *разложением многочлена на множители*.

**1 способ.** Вынесение общего множителя за скобки.

*Например:*  $3ax^4 - 6a^7x^7 + 12ax^3 = 3ax^3(x - 2a^6x^4 + 4)$ .

**2 способ.** Группировка.

Если члены многочлена не имеют общего множителя, отличного от 1, то следует попытаться разложить такой многочлен способом группировки. Для этого надо объединить в группу те члены, которые имеют общие множители, и вынести за скобки общий множитель каждой группы. Если после такого преобразования окажется общий множитель у всех получившихся групп, то его выносят за скобки. Этот способ называется *способом группировки*.

*Например:*  $3(x - 2y)^2 - 3x + 6y = 3(x - 2y)^2 - 3(x - 2y) = 3(x - 2y)(x - 2y - 1)$ .

**3 способ.** Использование формул сокращенного умножения.

*Например:*

$$1) (x + 3)^2 - 16 = (x + 3)^2 - 4^2 = (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = (x - 1)(x + 7);$$

$$2) x^6 - 2^6 = (x^3)^2 - (2^3)^2 = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 4).$$

## Уравнения с одним неизвестным. Корень уравнения. Линейные уравнения

*Уравнением* называется равенство, содержащее неизвестные переменные.

*Уравнение с одним неизвестным  $x$*  записывается в виде  $f(x) = g(x)$ .

*Корнем уравнения* называется всякое число, при подстановке которого вместо неизвестной в обе части уравнения получается верное числовое равенство.

*Решить уравнение* – значит найти все его корни, или доказать, что их нет.

Областью определения (ОО) уравнения или областью допустимых значений уравнения (ОДЗ) называется множество всех тех значений переменных  $x$ , при которых оба выражения  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют смысл.

Два уравнения называются *равносильными* на данном числовом множестве, если они имеют одни и те же корни или оба не имеют корней.

*Линейным уравнением с одним неизвестным* называется уравнение вида  $ax + b = 0$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $x$  – неизвестная величина.

При решении линейного уравнения возможны случаи:

- если  $a \neq 0$ , то  $ax + b = 0$ ,  $x = -\frac{b}{a} \Rightarrow$  один корень;
- если  $a = b = 0$ , то  $0 \cdot x + 0 = 0$ ,  $x \in R \Rightarrow$  бесконечное множество решений;
- если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $0 \cdot x + b = 0$ ,  $0 \cdot x = -b \Rightarrow$  корней нет.

### Квадратные уравнения. Теорема Виета

Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  – переменная,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – некоторые числа, причем,  $a \neq 0$ , называется *квадратным*.

$a$  – первый коэффициент;

$b$  – второй коэффициент;

$c$  – свободный член.

Квадратные уравнения, в которых хотя бы один из коэффициентов  $b$  или  $c$  равен нулю, называются *неполными*.

$ax^2 + c = 0$ ( $b = 0$ )	$ax^2 + bx = 0$ ( $c = 0$ )	$ax^2 = 0$ ( $b = c = 0$ )
$ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ 1) Если $ac > 0$ – корней нет 2) Если $ac < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$x = 0$

Выведем формулу корней квадратного уравнения. Для этого решим уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ . Разделим все его члены на  $a$ . Получим равносильное уравнение:  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  (2).

Выделим полный квадрат:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$

или  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  (3).

Число корней зависит от знака дроби  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ , т.к.  $a \neq 0$ , то  $4a^2 > 0 \Rightarrow$

знак определяется выражением  $b^2 - 4ac$ . Обозначим его  $D = b^2 - 4ac$  и назовем *дискриминантом*. Тогда уравнение (3) переписется в виде:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$  (4). Рассмотрим случаи:

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$\frac{D}{4a^2} < 0$ , но $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ для любого действительного $x$ . Значит, корней нет.	$\frac{D}{4a^2} = 0$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ $x + \frac{b}{2a} = 0$ $x = -\frac{b}{2a}$ Значит, два равных корня $x_1 = x_2$ .	$\frac{D}{4a^2} > 0$ , то $\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$ $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$ $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ или $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ или $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ Значит, два различных корня $x_1 \neq x_2$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ , где $D = b^2 - 4ac$



При решении квадратного уравнения, в котором второй коэффициент  $b$  – четное число, используют следующую формулу:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называется *приведенным*:  $x^2 + px + q = 0$ . Корни приведенного квадратного

уравнения можно найти по формулам: 1)  $D > 0 \Rightarrow x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$ ;

$$2) D = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2}.$$

**Теорема Виета:** Сумма корней квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  равна  $-\frac{b}{a}$ , произведение корней равно  $\frac{c}{a}$ .

*Доказательство:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a};$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема доказана.

**Следствие:** Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

**Обратная теорема:** Если числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ;  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , то они являются корнями квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

*Определение знаков корней квадратного уравнения.*

Оба положительны	Оба отрицательны	Одного знака	Разных знаков
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \\ D = b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases}$

Уравнение 4-ой степени вида  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , где  $a \neq 0$ , называется *биквадратным*.

**Разложение квадратного трехчлена на множители**

*Квадратным трехчленом* называется многочлен вида  $ax^2 + bx + c$ , где  $x$  – переменная,  $a, b, c$  – числа, причем  $a \neq 0$ .

*Корнем квадратного трехчлена* называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю.

Квадратный трехчлен имеет те же корни, что и квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ . Так же применима теорема Виета.

**Теорема:** Если  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ , его можно разложить на множители:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

*Доказательство:*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \text{ По теореме Виета } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) = a\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

## Уравнения с несколькими неизвестными. Системы уравнений

Уравнение вида  $f(x; y)=0$  называется *уравнением с двумя переменными*.

*Решением уравнения с двумя переменными* называется пара значений переменных, обращающих уравнение в верное равенство. Обычно решение записывают в виде пары чисел  $(x_0; y_0)$ .

*Графиком уравнения с двумя переменными* называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное числовое равенство.

Уравнение вида  $ax+by+c=0$ , где  $x, y$  – переменные,  $a, b, c$  – действительные числа, называется *линейным*.

Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо *решить систему уравнений*.

*Решением системы уравнений с двумя переменными* называется пара значений переменных, удовлетворяющих каждому из уравнений.

*Решить систему уравнений* – значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Две системы уравнений называют *равносильными*, если они имеют одни и те же решения.

*Система линейных уравнений с двумя переменными* имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Не решая систему линейных уравнений, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных.

1. Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , т.е. коэффициенты при  $x$  и  $y$  не пропорциональны, то система имеет одно решение. Графически – прямые пересекаются.

2. Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , т.е. коэффициенты при  $x$  и  $y$  пропорциональны, а свободные члены нет, то система не имеет решений. Графически – прямые параллельны.

3. Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , т.е. все коэффициенты пропорциональны, то

система имеет множество решений. Графически – прямые совпадают.

*Методы решения систем уравнений:*

1. Метод подстановки.
2. Метод алгебраического сложения.
3. Графический метод.
4. Метод введения новых переменных.

### **Неравенства и их свойства**

Запись, в которой два числа или два выражения, содержащие переменные, соединены знаком  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  называется *неравенством*.

Неравенства, составленные с помощью знаков  $>$ ,  $<$  называются *строгими*; неравенства, составленные с помощью знаков  $\geq$ ,  $\leq$ , называются *нестрогими*.

Два неравенства вида  $a > b$  и  $c > d$  называются *неравенствами одинакового смысла*; а вида  $a > b$ ,  $c < d$  *неравенствами противоположного смысла*.

Вместо двух неравенств  $x < a$ ,  $a < y$  используется запись  $x < a < y$  – *двойное неравенство*.

Неравенства, содержащие только числа, называются *числовыми неравенствами*.

*Решить неравенство*, содержащее переменную, это значит найти множество значений переменной, при котором это неравенство является верным. Элементы этого множества называются *решением неравенства*.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

*Свойства:*

1. Если  $a > b$ , то  $b < a$ .
2. Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .

3. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное неравенство:  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ .
4. Если из одной части верного неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, переменяв его знак на противоположный, то получим верное неравенство:  $a + b > c \Rightarrow a - c > -b$ .
5. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство:  $a > b, n > 0 \Rightarrow na > nb$  ( $\frac{1}{n}a > \frac{1}{n}b$ ).
6. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство:  $a > b, n < 0 \Rightarrow na < nb$  ( $\frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b$ ).
7. Неравенства одного смысла можно почленно складывать:  $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$
8. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать:  
 $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$
9. Если  $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ .
10. Обе части неравенства можно возводить в одну и ту же натуральную степень:  $a > b > 0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a^m > b^m$ .
11. Из каждой части неравенства можно извлекать корень одной и той же натуральной степени:  $a > b > 0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ .

### Решение линейных неравенств

*Линейным неравенством* называется неравенство вида  $ax + b > 0$  ( $ax + b < 0$ ).

Если  $a > 0$ , то неравенство  $ax + b > 0$  равносильно неравенству  $x > -\frac{b}{a}$ .

Если  $a < 0$ , то неравенство  $ax + b > 0$  равносильно неравенству  $x < -\frac{b}{a}$ .

Например:

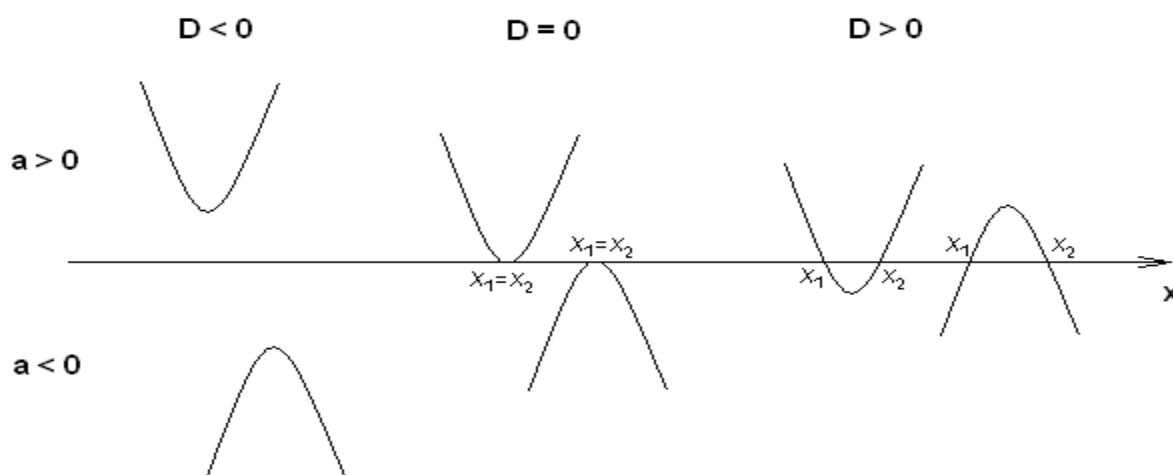
- |    |  |    |   |    |   |
|----|--|----|---|----|---|
| 1. | $12 - 3x > 0$<br>$-3x > -12$<br>$x < 4$<br>Ответ: $(-\infty; 4)$ | 2. | $2(x+8) - 5x < 4 - 3x$<br>$2x + 16 - 5x - 4 + 3x < 0$<br>$0 < -12$ неверно<br>Ответ: корней нет | 3. | $5(x-12) < 12(x-1) - 7x$<br>$5x - 60 < 12x - 12 - 7x$<br>$5x - 12x + 7x < -12 + 60$<br>$0 < 48$ верно<br>Ответ: $x$ – любое число |
|----|--|----|---|----|---|

### Решение квадратных неравенств

Квадратным неравенством называется неравенство вида  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $ax^2 + bx + c < 0$ ), где  $a \neq 0$ . Возможны так же знаки нестрогих неравенств  $\geq, \leq$ .

Решение неравенства такого типа можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых квадратичная функция  $y = ax^2 + bx + c$  принимает положительные или отрицательные значения.

С помощью графика квадратного трехчлена можно указать те значения  $x$ , при которых будет выполняться нужное неравенство  $ax^2 + bx + c > 0$  или  $ax^2 + bx + c < 0$ . Все возможные случаи расположения параболы  $y = ax^2 + bx + c$  относительно оси  $x$  представлены на рисунке.



Квадратные неравенства можно решать методом интервалов.

## Решение рациональных неравенств методом промежутков

Неравенство имеет вид  $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – многочлены. Вместо

знака  $>$  может быть любой знак неравенства.

Решение рациональных неравенств методом промежутков (методом интервалов) основано на следующем свойстве функций вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – рациональные выражения: если такая функция обращается в нуль в точках  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) и между этими точками не имеет других нулей или точек разрыва, то в промежутке  $(x_1; x_2)$  функция сохраняет знак.

Для нахождения таких промежутков знакопостоянства функции  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  на числовой прямой отмечают все точки, в которых функция обращается в нуль или не существует (терпит разрыв). Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция  $f(x)$  сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке данного промежутка.

Изменение знаков функции  $f(x)$  удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которую чертят справа налево. На тех промежутках, где кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство  $f(x) > 0$ ; на тех промежутках, где кривая проходит ниже, – неравенство  $f(x) < 0$ .

### Понятие функции, график функции, область определения, множество значений

Зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$  называется *функцией*, если каждому значению  $x$  соответствует единственное значение  $y$ . При этом используют запись:  $y=f(x)$ . Переменную  $x$  называют *независимой переменной (аргументом)*;  $y$  называют *зависимой переменной (функцией)*. Значение  $y$ , соответствующее заданному значению  $x$ , называют *значением функции*.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*  $D(f)$ .

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений функции*  $E(f)$ .

Элементы множества  $D(f)$  так же называют *значениями аргумента*, а соответствующие им элементы множества  $E(f)$  - *значениями функции*.

*Графиком функции*  $y = f(x)$  называется множество всех точек  $(x; y)$  координатной плоскости, таких, что  $x \in D(f)$ , а  $y = f(x)$ , причем  $x$  называется абсциссой,  $y$  – ординатой.

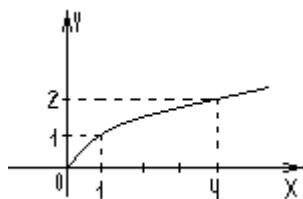
Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси  $Oy$ , пересекалась с указанным графиком не более чем в одной точке.

*Способы задания функции:*

1. Аналитический – с помощью формулы:  $y = 5x^2 - 7$ .
2. Табличный – с помощью таблицы:

x	0	3,5	7,3	15
y	1	4	1,8	9,2

3. Описательный.
4. Графический – с помощью графика:



### Свойства функции

1. Областью определения функции называются все значения переменной  $x$ , при которых функция имеет смысл (выполнимы указанные действия).

2. Множеством значений функции называются все значения переменной  $y$ .



3. Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если для любого значения  $x$  из области определения функции значение  $-x$  так же принадлежит области определения (область определения симметрична относительно начала отсчета) и выполняется равенство:  $f(-x) = f(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси  $Oy$ ).

Функция  $y = f(x)$  называется *нечетной*, если для любого значения  $x$  из области определения функции значение  $-x$  так же принадлежит области определения и выполняется равенство:  $f(-x) = -f(x)$ . График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

4. *Нулем функции* называется такое значение аргумента  $x$  из области определения функции, при котором значение функции равно  $0$ . Для того, чтобы найти нули функции необходимо решить уравнение  $f(x) = 0$ .

5. Промежутки, на которых функция либо положительна, либо отрицательна, т.е. имеет один и тот же знак, называются *промежутками знакопостоянства*.

6. Функция называется *периодической*, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого значения аргумента  $x$  из области определения значения  $x+T$  и  $x-T$  так же принадлежат области определения функции и выполняется равенство  $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$ .

7. Функция называется *возрастающей на промежутке  $X$* , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка, таких что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ , т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей на промежутке  $X$* , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка, таких что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ , т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастающая или убывающая на некотором промежутке функция называется *монотонной*.

Промежутки, на которых функция возрастает или убывает, называются *промежутками монотонности*.

8. Функция называется *ограниченной снизу* на некотором множестве  $X$ , если существует такое действительное число  $M$ , что для каждого  $x \in X$ ,  $f(x) \geq M$ .

Функция называется *ограниченной сверху* на некотором множестве  $X$ , если существует такое действительное число  $M$ , что для каждого  $x \in X$ ,  $f(x) \leq M$ .

Функция называется *ограниченной* на некотором множестве  $X$ , если она ограничена и снизу, и сверху.

9. *Наибольшим значением функции* называется самое большое значение, которое принимает переменная  $y$ ; *наименьшим значением функции* называется самое маленькое значение, которое принимает переменная  $y$ .

### **Линейная функция, ее свойства и график**

Функция, заданная формулой  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  - некоторые числа, называется *линейной*.

Коэффициент  $k = \operatorname{tg} \alpha$  характеризует угол  $\alpha$ , который образует прямая  $y = kx + b$  с положительным направлением оси  $Ox$ , и называется *угловым коэффициентом*. Если  $k > 0$ , то угол острый; если  $k < 0$ , то угол тупой; если  $k = 0$ , то прямая совпадает с осью  $Ox$  или ей параллельна.

*Свойства:*

1.  $D(y) = \mathbb{R}$ .
2.  $E(y) = \mathbb{R}$ .
3. Функция ни четная, ни нечетная, т.к.  $y(-x) = -kx + b \neq y(x) \Rightarrow$  не является четной;  $y(-x) = -(kx - b) \neq -y(x) \Rightarrow$  не является нечетной.
4.  $y = 0$  при  $x = -\frac{b}{k}$  (нули функции).
5. Промежутки знакопостоянства:

- если  $k > 0$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\infty; -\frac{b}{k})$ ;  $y > 0$  при  $x \in (-\frac{b}{k}; +\infty)$ ;
- если  $k < 0$ ,  $y < 0$  при  $x \in (-\frac{b}{k}; +\infty)$ ;  $y > 0$  при  $x \in (-\infty; -\frac{b}{k})$ .

6. Функция возрастает при  $k > 0$  и убывает при  $k < 0$  на  $\mathbb{R}$ .

7. Функция неограниченна, непрерывна.

Графиком функции является прямая. Для ее построения можно найти точки пересечения с осями координат:

- с осью  $OX$ :  $y = 0$ ,  $x = -\frac{b}{k} \Rightarrow A(-\frac{b}{k}; 0)$ ;
- с осью  $OY$ :  $x = 0$ ,  $y = b \Rightarrow B(0; b)$ .

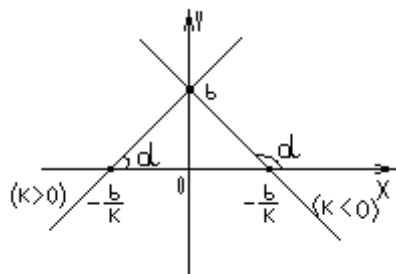
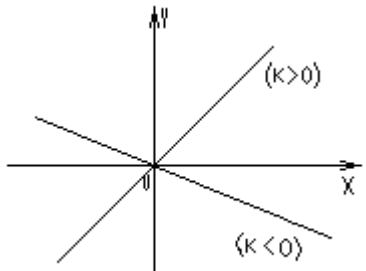
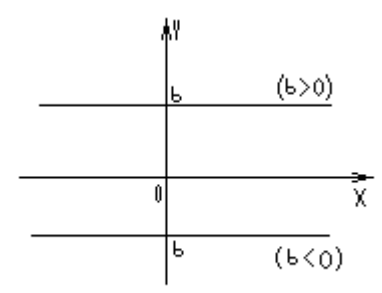


График функции  $y = kx + b$  может быть построен с помощью параллельного переноса на  $|b|$  единиц вверх ( $b > 0$ ), или вниз ( $b < 0$ ) графика функции  $y = kx$ . Зависимость  $y = kx$  называется *прямой пропорциональностью*.

Рассмотрим частные случаи линейной функции.

Если $b = 0$ , то $y = kx$ .	Если $k = 0$ , то $y = b$ .
<p><i>Свойства:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>3. Функция нечетная, т.к. <math>y(-x) = -kx = -y(x)</math>.</li> <li>4. <math>y = 0</math> при <math>x = 0</math>.</li> <li>5. Промежутки знакопостоянства: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ если <math>k &gt; 0</math>, <math>y &lt; 0</math> при <math>x \in (-\infty; 0)</math>;</li> </ul> </li> </ol>	<p><i>Свойства:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = b</math>.</li> <li>3. Функция четная, т.к. <math>y(-x) = b = y(x)</math>.</li> <li>4. <math>y \neq 0</math>.</li> <li>5. Промежутки знакопостоянства: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ если <math>b &gt; 0</math>, <math>y &gt; 0</math>;</li> </ul> </li> </ol>

<p style="text-align: center;"><math>y &gt; 0</math> при <math>x \in (0; +\infty)</math>;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ если <math>k &lt; 0</math>, <math>y &lt; 0</math> при <math>x \in (0; +\infty)</math>;</li> </ul> <p style="text-align: center;"><math>y &gt; 0</math> при <math>x \in (-\infty; 0)</math>.</p> <p>6. Функция возрастает при <math>k &gt; 0</math> и убывает при <math>k &lt; 0</math> на <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>7. Функция неограниченна, непрерывна.</p> <p>Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат.</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ если <math>b &lt; 0</math>, <math>y &lt; 0</math>.</li> </ul> <p>6. Функция постоянна на <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>7. Функция непрерывна.</p> <p>Графиком функции является прямая, параллельная оси <math>Ox</math>.</p> 
---	---

### Функция $y = \frac{k}{x}$ , ее свойства и график

Если переменная  $y$  обратно пропорциональна переменной  $x$ , то эта зависимость выражается формулой  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k \neq 0$  - коэффициент обратной пропорциональности.

*Свойства:*

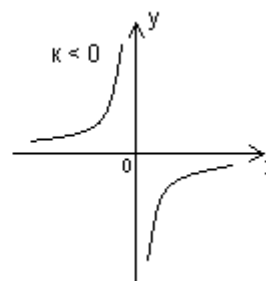
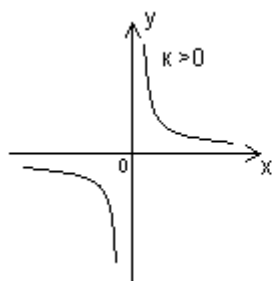
1.  $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
2.  $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
3. Нечетная, т.к.  $y(-x) = -\frac{k}{x} = -y(x)$ .
4. Промежутки знакопостоянства:
  - если  $k > 0$ , то  $y > 0$  при  $x \in (0; +\infty)$ ;
  - $y < 0$  при  $x \in (-\infty; 0)$ ;

- если  $k < 0$ , то  $y > 0$  при  $x \in (-\infty; 0)$ ;  
 $y < 0$  при  $x \in (0; +\infty)$ .

### 5. Монотонность:

- при  $k < 0$  функция возрастает на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ ;
- при  $k > 0$  функция убывает на  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ .

Графиком обратной пропорциональности  $y = \frac{k}{x}$  является кривая, состоящая из 2-х ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется *гиперболой*.



### Функция $y = ax^2$ ее свойства и график

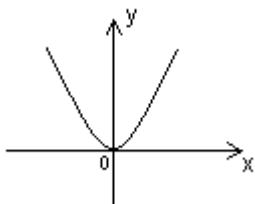
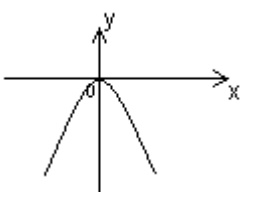
Функция вида  $y = ax^2$ , где  $a$  — некоторое число,  $a \neq 0$ , называется *квадратичной*.

График функции  $y = ax^2$  может быть получен с помощью графика функции  $y = x^2$ :

- если  $a > 1$ , то растяжение вдоль оси  $Oy$  в  $a$  раз;
- если  $0 < a < 1$ , то сжатие вдоль оси  $Oy$  в  $\frac{1}{a}$  раз;
- если  $a < 0$ , то симметрично относительно оси  $Ox$ .

Рассмотрим свойства и график функции  $y = ax^2$  в зависимости от знака  $a$ .

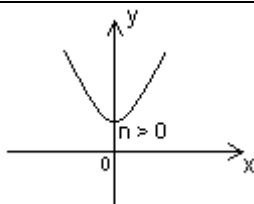
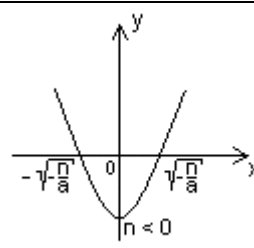
$a > 0$	$a < 0$
1. Д (y) = R.	1. Д (y) = R.
2. E (y) = [0; +∞).	2. E (y) = (-∞; 0].
3. Функция четная, т.к.	3. Функция четная, т.к.

$y(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = y(x)$ . 4. $y = 0$ при $x = 0$ . 5. $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . 6. Монотонность: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ функция возрастает на <math>[0; +\infty)</math>;</li> <li>▪ функция убывает на <math>(-\infty; 0]</math>.</li> </ul> 7. $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$ . 8. Функция ограничена снизу нулем, непрерывна.	$y(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = y(x)$ . 4. $y = 0$ при $x = 0$ . 5. $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . 6. Монотонность: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ функция возрастает на <math>(-\infty; 0]</math>;</li> <li>▪ функция убывает на <math>[0; +\infty)</math>.</li> </ul> 7. $y_{\text{наиб}} = 0$ при $x = 0$ . 8. Функция ограничена сверху нулем, непрерывна.
	

### Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ . Преобразование графика

Графиком функции  $y = ax^2 + n$  является парабола, которая может быть получена из графика функции  $y = ax^2$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $Oy$  на  $|n|$  единиц вверх, если  $n > 0$ ; или на  $|n|$  единиц вниз, если  $n < 0$ .

Рассмотрим графики функции  $y = ax^2 + n$  при  $a > 0$ .

$n > 0$	$n < 0$
	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = [n; +\infty)</math>.</li> <li>3. Четная.</li> <li>4. Нулей нет.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = [n; +\infty)</math>.</li> <li>3. Четная.</li> <li>4. <math>y = 0</math> при <math>x = \pm \sqrt{-\frac{n}{a}}</math>.</li> </ol>

<p>5. <math>y &gt; 0</math> при <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>6. Возрастает на <math>[0; +\infty)</math>; убывает на <math>(-\infty; 0]</math>.</p> <p>7. <math>y_{\text{наим}} = n</math> при <math>x = 0</math>.</p> <p>8. Ограничена снизу <math>n</math>, непрерывна.</p>	<p>5. <math>y &gt; 0</math> при <math>x \in \left(-\infty; -\sqrt{-\frac{n}{a}}\right) \cup \left(\sqrt{-\frac{n}{a}}; +\infty\right)</math>;</p> <p><math>y &lt; 0</math> при <math>x \in \left(-\sqrt{-\frac{n}{a}}; \sqrt{-\frac{n}{a}}\right)</math>.</p> <p>6. Возрастает на <math>[0; +\infty)</math>; убывает на <math>(-\infty; 0]</math>.</p> <p>7. <math>y_{\text{наим}} = n</math> при <math>x = 0</math>.</p> <p>8. Ограничена снизу <math>n</math>, непрерывна.</p>
---	--

Рассмотрим графики функции  $y = ax^2 + n$  при  $a < 0$ .

$n > 0$	$n < 0$
<div data-bbox="399 873 654 1075" style="text-align: center;"> </div> <p>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</p> <p>2. <math>E(y) = (-\infty; n]</math>.</p> <p>3. Четная.</p> <p>4. <math>y = 0</math> при <math>x = \pm \sqrt{-\frac{n}{a}}</math>.</p> <p>5. <math>y &gt; 0</math> при <math>x \in \left(-\sqrt{-\frac{n}{a}}; \sqrt{-\frac{n}{a}}\right)</math>;</p> <p><math>y &lt; 0</math> при <math>x \in \left(-\infty; -\sqrt{-\frac{n}{a}}\right) \cup \left(\sqrt{-\frac{n}{a}}; +\infty\right)</math>.</p> <p>6. Возрастает на <math>(-\infty; 0]</math>; убывает на <math>[0; +\infty)</math>.</p> <p>7. <math>y_{\text{наиб}} = n</math> при <math>x = 0</math>.</p> <p>8. Ограничена сверху <math>n</math>, непрерывна.</p>	<div data-bbox="1053 873 1308 1120" style="text-align: center;"> </div> <p>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</p> <p>2. <math>E(y) = (-\infty; n]</math>.</p> <p>3. Четная.</p> <p>4. Нулей нет.</p> <p>5. <math>y &lt; 0</math> при <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>6. Возрастает на <math>(-\infty; 0]</math>; убывает на <math>[0; +\infty)</math>.</p> <p>7. <math>y_{\text{наиб}} = n</math> при <math>x = 0</math>.</p> <p>8. Ограничена сверху <math>n</math>, непрерывна.</p>

Графиком функции  $y = a(x - m)^2$  является парабола, которая может быть получена в результате параллельного переноса графика функции  $y = ax^2$  вдоль оси  $Ox$  на  $|m|$  единиц вправо, если  $m > 0$ ; или на  $|m|$  единиц влево, если  $m < 0$ .

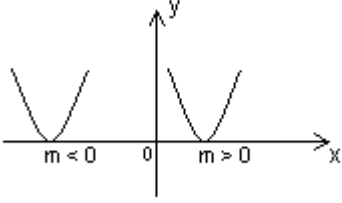
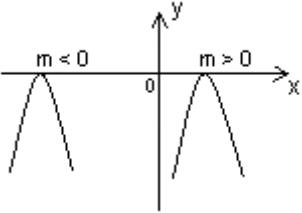
$a > 0$	$a < 0$
	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = [0; +\infty)</math>.</li> <li>3. Ни четная, ни нечетная.</li> <li>4. <math>y = 0</math> при <math>x = m</math>.</li> <li>5. <math>y &gt; 0</math> при <math>x \in (-\infty; m) \cup (m; +\infty)</math>.</li> <li>6. Возрастает на <math>[m; +\infty)</math>; убывает на <math>(-\infty; m]</math>.</li> <li>7. <math>y_{\text{наим}} = 0</math> при <math>x = m</math>.</li> <li>8. Ограничена снизу нулем, непрерывна.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>D(y) = \mathbb{R}</math>.</li> <li>2. <math>E(y) = (-\infty; 0]</math>.</li> <li>3. Ни четная, ни нечетная.</li> <li>4. <math>y = 0</math> при <math>x = m</math>.</li> <li>5. <math>y &lt; 0</math> при <math>x \in (-\infty; m) \cup (m; +\infty)</math>.</li> <li>6. Возрастает на <math>(-\infty; m]</math>; убывает на <math>[m; +\infty)</math>.</li> <li>7. <math>y_{\text{наиб}} = 0</math> при <math>x = m</math>.</li> <li>8. Ограничена сверху нулем, непрерывна.</li> </ol>

График функции  $y = a(x - m)^2 + n$  может быть получен с помощью 2-х параллельных переносов описанных выше.

### Преобразование графиков

1. График функции  $y = f(x) + n$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $Oy$  на  $|n|$  единиц вверх, если  $n > 0$ ; или на  $|n|$  единиц вниз, если  $n < 0$ .

2. График функции  $y = f(x - m)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $Ox$  на  $|m|$  единиц вправо, если  $m > 0$ ; или на  $|m|$  единиц влево, если  $m < 0$ .



3. График функции  $y = f(x - m) + n$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью 2-х параллельных переносов: вдоль оси  $Oy$  на  $|n|$  единиц вверх, если  $n > 0$ ; или на  $|n|$  единиц вниз, если  $n < 0$ ., вдоль оси  $Ox$  на  $|m|$  единиц вправо, если  $m > 0$ ; или на  $|m|$  единиц влево, если  $m < 0$ .

4. График функции  $y = -f(x)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью симметричного отображения относительно оси  $Ox$ .

5. График функции  $y = f(-x)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью симметричного отображения относительно оси  $Oy$ .

6. График функции  $y = f(ax)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью сжатия вдоль оси  $Ox$  к оси  $Oy$  в  $a$  раз, если  $a > 1$ ; или растяжения вдоль оси  $Ox$  от оси  $Oy$  в  $\frac{1}{a}$  раз, если  $0 < a < 1$ .

7. График функции  $y = af(x)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  с помощью растяжения вдоль оси  $Oy$  от оси  $Ox$  в  $a$  раз, если  $a > 1$ ; или сжатия вдоль оси  $Oy$  к оси  $Ox$  в  $\frac{1}{a}$  раз, если  $0 < a < 1$ .

8. График функции  $y = |f(x)|$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  следующим образом: часть графика  $y = f(x)$ , лежащая над осью  $Ox$  сохраняется, часть его, лежащая под осью  $Ox$ , отображается симметрично относительно оси  $Ox$ .

9. График функции  $y = f(|x|)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  следующим образом: при  $x \geq 0$  график  $y = f(x)$  сохраняется, а при  $x < 0$  полученная часть графика отображается симметрично относительно оси  $Oy$ .

### **Квадратичная функция. Посторенние графика квадратичной функции**

Функция, заданная формулой  $y = ax^2 + vx + c$ , где  $x, y$  – переменные,  $a, v, c$  – заданные числа,  $a \neq 0$ , называется *квадратичной*.

Существует несколько способов построения графика квадратичной функции. Опишем два из них.

*1 способ.* Квадратичную функцию  $y = ax^2 + vx + c$  всегда можно привести к виду  $y = a(x - m)^2 + n$  путем выделения полного квадрата.

Преобразуем квадратный трехчлен  $ax^2 + vx + c$ . Имеем:

$$\begin{aligned} ax^2 + vx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

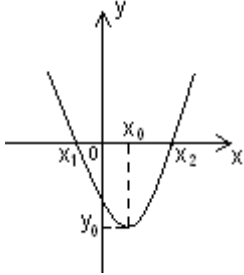
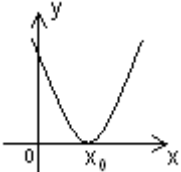
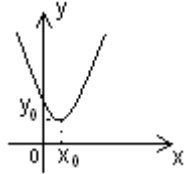
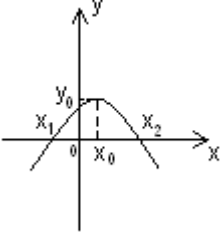
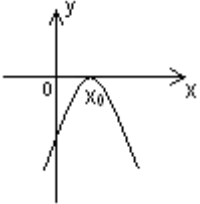
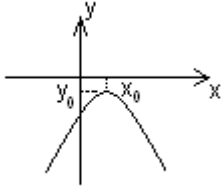
Получили формулу  $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

Эта формула имеет вид  $y = a(x - m)^2 + n$ , где  $m = -\frac{b}{2a}$  и  $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

График функции  $y = a(x - m)^2 + n$  получается из графика функции  $y = ax^2$  с помощью параллельного переноса, при котором точка  $(x_0; y_0)$  переходит в точку  $(x_0 + m; y_0 + n)$ . Значит, график любой квадратичной функции  $y = ax^2 + vx + c$  получается из графика функции  $y = ax^2$  с помощью указанного параллельного переноса.

*2 способ.* График функции  $y = ax^2 + vx + c$  есть парабола. Ее вершиной является точка  $(m; n)$ , где  $m = -\frac{b}{2a}$  и  $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Осью симметрии параболы служит прямая  $x = m$ , параллельная оси  $Oy$ . При  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх, при  $a < 0$  – вниз. Для построения графика квадратичной функции находят координаты нескольких точек соответствующей параболы:

- абсциссу вершины параболы по формуле  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , а ординату –  $y_0 = y(x_0)$ ;
- нули функции;
- точку пересечения параболы с осью  $Oy$  – точку  $(0; c)$ ;
- дополнительные точки, если необходимо.

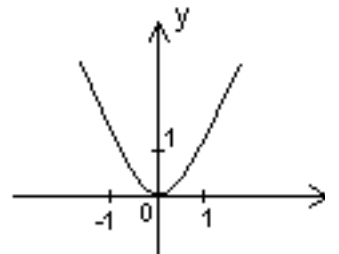
	$D > 0$ Два корня $x_1$ и $x_2$ ; график пересекает ось $Ox$ в двух точках.	$D = 0$ Один корень $x_0$ ; график касается оси $Ox$ .	$D < 0$ Корней нет; график по одну сторону от оси $Ox$ .
$a > 0$			
$a < 0$			

### Степенная функция $y = x^n$

Функция вида  $y = x^n$  называется *степенной* функцией с показателем степени  $n$ .

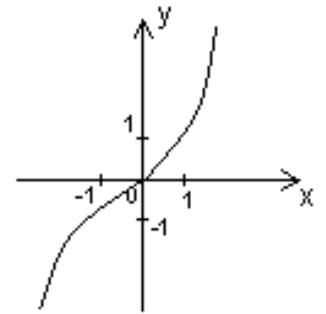
Если  $n = 2$ , то  $y = x^2$ .

- $D(y) = \mathbb{R}$ .
- $E(y) = [0; +\infty)$ .
- Функция четная.
- $y = 0$  при  $x = 0$ .
- $y > 0$  при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Функция возрастает на  $[0; +\infty)$ ;  
Функция убывает на  $(-\infty; 0]$ .
- Функция непрерывна, ограничена снизу нулем.



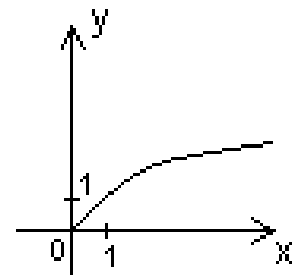
Если  $n = 3$ , то  $y = x^3$ .

1.  $D(y) = \mathbb{R}$ .
2.  $E(y) = \mathbb{R}$ .
3. Функция нечетная.
4.  $y=0$  при  $x=0$ .
5.  $y > 0$  при  $x \in (0; +\infty)$ ;  
 $y < 0$  при  $x \in (-\infty; 0)$ .
6. Функция возрастает на  $\mathbb{R}$ .
7. Функция непрерывна, неограниченна.



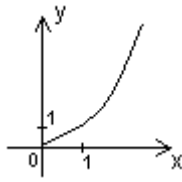
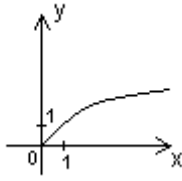
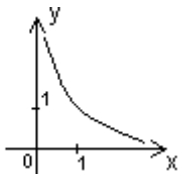
Если  $n = \frac{1}{2}$ , то  $y = \sqrt{x}$ .

1.  $D(y) = [0; +\infty)$ .
2.  $E(y) = [0; +\infty)$ .
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4.  $y=0$  при  $x=0$ .
5.  $y > 0$  при  $x > 0$ .
6. Функция возрастает на  $[0; +\infty)$ .
7. Функция непрерывна, ограничена снизу нулем.



Графики степенной функции при различных значениях  $n$  представлены в таблице.

$n > 0, n \in \mathbb{N}$		$n < 0, n \in \mathbb{Z}$	
$n$ - четное	$n$ - нечетное	$n$ - четное	$n$ - нечетное

$n \in \mathbf{R}, x \geq 0$		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
		

### Арифметическая прогрессия

*Бесконечной числовой последовательностью* называется функция, определенная на множестве натуральных чисел. Ее принято обозначать  $(x_n)$ .

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется *арифметической прогрессией*.

Это число  $d$  называется *разностью арифметической прогрессии*.

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} = \dots$$

Арифметическая прогрессия задается своим первым членом  $a_1$  и разностью  $d$ .

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле (формула  $n$ -го члена)  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ .

Если  $d > 0$ , то арифметическая прогрессия является *возрастающей*.

Если  $d < 0$ , то арифметическая прогрессия является *убывающей*.

Если  $d = 0$ , то все члены арифметической прогрессии равны между собой и она является *постоянной последовательностью*.

*Характеристическое свойство арифметической прогрессии.*

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ или } a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ где } n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Сумма членов равноудаленных от концов прогрессии есть величина постоянная, т.е.  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$ .

Если на плоскости отмечать точки с координатами  $(n; a_n)$ , то, все эти точки будут лежать на графике функции, задаваемой формулой  $y = d(x-1) + a_1$ .

Это означает, что арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  и её можно задать формулой вида  $a_n = kn + b$ , где  $k, b$  – числа.

Сумма  $n$  – первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  или  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2}$ .

*Доказательство:*

Запишем сумму  $n$ –первых членов арифметической прогрессии двумя способами.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Сложим почленно эти равенства.

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

В каждой скобке стоит сумма вида  $a_{n-k} + a_{1+k}$ , где  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

$$\begin{aligned} a_{n-k} + a_{1+k} &= a_1 + (n-k-1)d + a_1(1+k-1)d = a_1 + nd - kd - d + a_1 + d + kd - d = \\ &= 2a_1 + nd - d = 2a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Таких скобок ровно  $n$ , тогда  $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  или

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

## Геометрическая прогрессия

*Геометрической прогрессией* называется числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый последующий равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число не равное нулю.

Это число называется *знаменателем геометрической прогрессии*

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_k}{b_{k-1}} = \dots.$$

Геометрическая прогрессия задается своим первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$ .

Любой член геометрической прогрессии можно записать по формуле (формула  $n$ -го члена)  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ .

Геометрическая прогрессия *возрастает*, если  $b_1 > 0, q > 1$  или  $b_1 < 0, 0 < q < 1$ .

Геометрическая прогрессия *убывает*, если  $b_1 > 0, q < 1$  или  $b_1 < 0, 0 < q < 1$ .

Если  $q < 0$ , то последовательность является ни возрастающей, ни убывающей, т.к. *знаки ее членов чередуются*.

*Характеристическое свойство геометрической прогрессии.*

Последовательность чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1} \text{ или } b_n^2 = b_{n-k} b_{n+k}, \text{ где } n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная, т.е.  $b_1 b_n = b_2 b_{n-1} = \dots$ .

Формула суммы  $n$ -первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ при } q \neq 1 \text{ и } S_n = nb_1 \text{ при } q = 1.$$

*Доказательство:*

Сумма  $n$ -первых членов геометрической прогрессии равна  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$  (1).

Если  $q = 1$ , то все члены равны  $b_1$ , тогда  $S_n = b_1 + b_1 + \dots + b_1 = nb_1$  – что и требовалось доказать.

Если  $q \neq 1$ , то умножим равенство  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$  на  $q$ , тогда  $qS_n = qb_1 + qb_2 + \dots + qb_{n-1} + qb_n$ .

По определению геометрической прогрессии

$$qS_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + qb_n \quad (2).$$

Вычтем равенство (1) из равенства (2), получим  $S_n - qS_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n - b_2 - b_3 - \dots - b_n - qb_n$ ;

$$S_n(1 - q) = b_1 + (b_2 - b_2) + \dots + (b_{n-1} - b_{n-1}) + (b_n - b_n) - qb_n = b_1 - qb_n;$$

$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q} = \frac{qb_n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 q^{n-1} q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

или  $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ , что и требовалось доказать.

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если  $|q| < 1$ .

*Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому стремится сумма ее  $n$ -первых членов при  $n \rightarrow \infty$ .

Сумма  $S$  бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$



