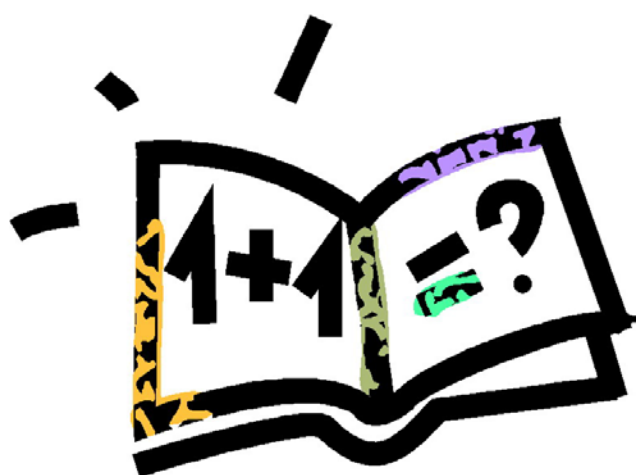


Решение иррациональных уравнений и неравенств

методические рекомендации для учащихся



Составитель
преподаватель математики

Мочалова Е.В.

Составители: Мочалова Е.В. – преподаватель математики

От авторов-составителей: Одной из нелегких и трудно усваиваемых тем на уроках математики являются иррациональные уравнения и неравенства. В работе рассмотрены основные понятия и формулы, которые нужно знать для успешного решения иррациональных уравнений и неравенств. Приведены подробные примеры решения некоторых уравнений и неравенств. Подобраны задания для самостоятельного решения и тест для проверки усвоения теоретических основ. Методические рекомендации призваны помочь при самостоятельном изучении и повторении данной темы.

Часть I. Иррациональные уравнения.

Иррациональными называются уравнения, в которых переменные или рациональные функции находятся под **знаком корня**.

Примерами таких уравнений могут служить:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-4} = 7; \quad \sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2-4} - 10 =$$

Понятие корня уравнения и его решения для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

Умение решать иррациональные неравенства может пригодиться на практике. Попробуйте определить глубину ущелья, замерив время падения камня (см. рис.1).



Все корни **четной** степени, входящие в уравнение, являются **арифметическими**.

Другими словами, *если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла, если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.*

Все корни **нечетной** степени, входящие в уравнение, **определены при любых** действительных значениях подкоренного выражения.

Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

Используя эти свойства, в некоторых случаях можно установить, что уравнение не имеет решения, не прибегая к преобразованиям.

Пример 1. Докажите, что уравнение не имеет решения.

1) $\sqrt{x^2-3} + 1 = 0 \leftrightarrow \sqrt{x^2-3} = -1$ Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

2) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x^2-4} = 0$ не имеет решений, т.к. сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только если каждое выражение равно нулю, а данные выражения одновременно в ноль не обращаются.

3) $\sqrt{x-7} + 2 = \sqrt{5-x}$ Выражение $\sqrt{x-7}$ определено при $x \geq 7$, а выражение $\sqrt{5-x}$ определено при $x \leq 5$. Следовательно, не существует x , при котором оба выражения имеют смысл, поэтому уравнение решений не имеет.

Одним из стандартных приемов решения иррациональных неравенств является освобождение от радикалов путем возведения обеих частей в соответствующую степень. Но следует помнить, что подобное преобразование не всегда является равносильным. т.е. необходима проверка корней.

При возведении правой и левой части уравнения в нечетную степень мы можем не опасаться получить посторонние корни.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt[3]{3x^2-2x} = x$

Возведем обе части уравнения в третью степень. Получим равносильное уравнение:

$$3x^2 - 2x = x^3$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем за скобки x :

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Приравняем каждый множитель к нулю, получим:

$$x_1=0; x_2=1; x_3=2$$

Ответ: $\{0;1;2\}$

2. Причина появления посторонних корней.

Решение иррациональных уравнений основано на следующем утверждении:

Теорема.

Если $n > 0$ - нечетное число ($n=2k+1$), то уравнения $f^n(x)=g^n(x)$ и $f(x)=g(x)$ равносильны.

Если $n > 0$ - четное число ($n=2k$), то любой корень уравнения $f^n(x)=g^n(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений: $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$.

Из теоремы следует, что если в ходе решения иррационального уравнения приходилось возводить обе части в степень с четным показателем, то могут появиться "посторонние" корни уравнения.

Итак, что же происходит, каковы **причины посторонних корней**:

а) за счет возможного расширения ОДЗ исходного уравнения (т.е. ОДЗ полученного уравнения шире ОДЗ исходного уравнения).

б) за счет возведения в четную степень его левой и правой частей, которые равны по абсолютной величине, но одна из них положительна, а другая отрицательна.

3. Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием.

Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием (с последующей проверкой корней) можно производить следующим образом:

1. Найти ОДЗ исходного уравнения.
2. Перейти от уравнения к его следствию.
3. Найти корни полученного уравнения.
4. Проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

4. Проверка корней.

Проверка корней подстановкой найденного значения в исходное уравнение сама по себе может оказаться сложной задачей. Однако, чтобы отделить посторонние корни, не всегда необходимо подставлять найденные корни в данное уравнение. Иногда возможна проверка корней по ОДЗ уравнения.

При решении иррациональных уравнений удобно и полезно следующие утверждения:

Уравнение вида	Равносильно	Системе / совокупности систем уравнений
$\sqrt{f(x)} = g(x)$		$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$		$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) - \text{определена} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$		Одной из равносильных систем: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ <i>Выбирается та система, в которой проще неравенство.</i>
$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$	

Пример 3.

a) $\sqrt{2x+3} = 6-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 2x+3 = (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 2x+3 = 36-12x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2-14x+33=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x=3; x=11 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \quad \text{Ответ: 3.}$$

b) $\sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x^2+3x-4 = 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x=2 \vee x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2. \quad \text{Ответ: 2}$

5. Формулы, применяемые при решении иррациональных уравнений.

Пусть f и g - некоторые функции, k - целое число, тогда:

$$1. \sqrt[k]{f} \cdot \sqrt[k]{g} = \sqrt[k]{f \cdot g}, \quad f \geq 0, \quad g \geq 0$$

$$2. \frac{\sqrt[k]{f}}{\sqrt[k]{g}} = \sqrt[k]{\frac{f}{g}}, \quad f \geq 0, \quad g > 0$$

$$3. |f| \cdot \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f^{2k} \cdot g}, \quad g \geq 0$$

$$4. \sqrt[2k]{\frac{f}{g}} = \frac{\sqrt[2k]{|f|}}{\sqrt[2k]{|g|}}, \quad f \cdot g \geq 0, \quad g \neq 0$$

$$5. \sqrt[2k]{f \cdot g} = \sqrt[2k]{|f|} \cdot \sqrt[2k]{|g|}, \quad f \cdot g \geq 0$$

Для каждой из формул 1-5 (без учета указанных ограничений) ОДЗ правой ее части может быть шире ОДЗ левой.

Отсюда следует, что преобразования уравнений с формальным использованием формул 1-5 “слева–направо”, приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного.

В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения, поэтому обязательным этапом в решении исходного уравнения является проверка.

Преобразование уравнений с формальным использованием формул 1-5 “справа – налево” **недопустимо**, т.к. возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, а следовательно и потеря корней.

Так, например, если заменить уравнение $\sqrt{(x-3)(4x+4)} = 3$ (ОДЗ: $x \geq 3$, $x \leq -1$) уравнением $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{4x+4} = 3$ (ОДЗ: $x \geq 3$), то произойдет сужение ОДЗ исходного уравнения и потеря корня $x=-1$.

Пример 4.

$$a) \sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{5+x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 5+x = x-1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} + 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 1+x = 2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1+x \geq 0 \\ (1+x)^2 = 4(x-1)(5-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ 1+2x+x^2 = -4x^2+24x-20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 5x^2 - 22x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x = 3 \vee x = 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1,4$$

Ответ: 3; 1,4 .

$$b) \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-10x+25} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x+2+x-5 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 5 \\ x+2-x+5 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ -x-2-x+5 = 10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 6,5 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 5 \\ 7 = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x = -3,5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,5 \\ x \in \emptyset \\ x = -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6,5 \vee x = -3,5$$

Ответ: 6,5 ; -3,5.

6. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 5.

а) $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 33, x \in R$

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 3x + 9}, y \geq 0$ тогда исходное уравнение примет вид: $y^2 + y - 42 = 0$ корни которого $y=6$ и $y = -7 \notin [0; +\infty)$. Решая уравнение $\sqrt{x^2 + 3x + 9} = 6$, получаем $x=3$ и $x=-4,5$.

Ответ: $\{-4,5; 3\}$

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

б) $2x^2 + (2x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 1, x \in R$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2 + 2x\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$

$$(x + \sqrt{x^2 - x + 1})^2 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$$

Замена $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ приводит уравнение к виду $y^2 + y - 2 = 0$ корнями которого являются $y=1$ и $y=-2$

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 - 2x + x^2 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x + 1 = x^2 + 4x + 4 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0,6 \\ x \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x=0$

Ответ: $\{0\}$

7. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема. Уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Пример 6.

$$(x+3)\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^2-1}$$

При $x \geq 1$ уравнение принимает вид: $\sqrt{x-1}(x+3-3\sqrt{x+1}) = 0$, которое равносильно

совокупности

двух

уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+3-3\sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 9(x+1) = x^2 + 6x + 9 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 3 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 3\}$.

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

Пример 7.

$$\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} - \sqrt{2x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 2} = 0$$

Если внимательно посмотреть на уравнение, то можно увидеть, что разности подкоренных выражений первого и третьего, а также второго и четвертого членов этого уравнения равны одной и той же величине $(-2x-4)$.

В таком случае далее следует воспользоваться тождеством:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, a \geq 0, b \geq 0, a+b > 0$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}} + \frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}} = 0, \quad \text{или}$$

$$(2x+4) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}} \right) = 0$$

Корень уравнения $2x+4=0$ т.е. число $x=-2$ при подстановке в исходное уравнение дает верное равенство.

Уравнение $\frac{1}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}} = 0$ не имеет решений, так как его левая часть положительна в своей области определения.

Ответ: $\{-2\}$.

8. Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений.

При решении некоторых иррациональных уравнений полезна формула $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 8.

$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1.$$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1} + 4 + \sqrt{x-1} - 6\sqrt{x-1} + 9 = 1,$$

или

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1.$$

Обозначим $y = \sqrt{x-1}, y \geq 0$ и решим полученное уравнение методом интервалов.

$$|y-2| + |y-3| = 1.$$

Разбирая отдельно случаи $y < 2; 2 \leq y < 3; y \geq 3$, находим, что решениями последнего уравнения являются $2 \leq y \leq 3$.

Возвращаясь к переменной x , получаем неравенства

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$$

$$4 \leq x-1 \leq 9$$

$$5 \leq x \leq 10.$$

Ответ: $5 \leq x \leq 10$.

Часть II. Иррациональные неравенства и методы их решения.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

Рассмотрим решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$.

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ОДЗ: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным – тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким образом, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно

системе неравенств:
$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$
.

Практически все сложные иррациональные неравенства, в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам двух типов.

Иррациональные неравенства **первого типа**: $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратный корень, который принимает только неотрицательные значения, следовательно, чтобы неравенство имело решения, правая часть должна быть положительной.

Получаем первое условие: $g(x) > 0$.

Чтобы решить неравенство, нам нужно обе части возвести в квадрат.

Получаем второе условие: $f(x) < (g(x))^2$.

Возведение в квадрат может привести к появлению посторонних корней, поэтому не забываем про ОДЗ: подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Получили третье условие: $f(x) \geq 0$.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Аналогично, нестрогое неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Иррациональные неравенства **второго типа**: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Не смотря на то, что это неравенство с виду похоже на неравенство первого типа, оно принципиально от него отличается.

Поскольку в левой части неравенства стоит квадратный корень, левая часть всегда неотрицательна, поэтому

если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ выполняется при любом допустимом значении x , то есть при $f(x) \geq 0$.

если $g(x) \geq 0$, то мы можем обе части неравенства возвести в квадрат, получим $f(x) > (g(x))^2$, и условие на ОДЗ $f(x) > 0$ будет автоматически следовать из этого неравенства.

Итак, неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Нестрогое неравенство вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств.

Пример 9.

а) Решить неравенство:

$$\sqrt{x-2} > -x^2 + x - 2$$

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x - 2 > (-x^2 + x - 2)^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решим каждое неравенство:

1. $-x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 > 0$

$D=1-8=-7$, старший коэффициент больше нуля, следовательно это неравенство верно при любом значении x . Решением первой системы будет решение ее второго неравенства: $x \geq 2$.

2. $-x^2 + x - 2 \geq 0$ Очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \geq 2$.

б) Решить неравенство:

$$\sqrt{2x-x^2} < 5-x$$

Это иррациональное неравенство первого типа, и оно равносильно системе трех неравенств:

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 2x-x^2 \leq (5-x)^2 \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство:

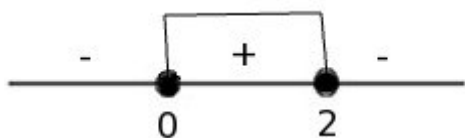
1. $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$

2. $2x-x^2 \leq (5-x)^2 \Leftrightarrow 2x-x^2 \leq 25-10x+25 \Leftrightarrow 2x^2-12x+25 \geq 0$

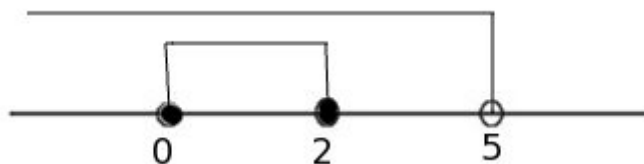
$D=144-200 < 0$, следовательно, это неравенство верно при любом значении x .

3. $2x-x^2 \geq 0$

$x_1=0 \quad x_2=2$



Совместим решения первого и третьего неравенств системы на одной координатной прямой:



Ответ: $0 \leq x \leq 2$.

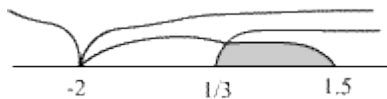
с) $\sqrt{3x^2 + 5x - 2} \leq 2 + x$.

Решение.

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leq (2+x)^2 \\ 2+x \geq 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом необходимо рассмотреть два квадратных и одно линейное неравенство. Их решение не представляет никаких сложностей.

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1.5 \\ x \geq -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \geq 0 \\ x \leq -2, x \geq 1/3. \end{cases}$$



Объединением этих неравенств будет $\{-2\} \cup [1/3, 1.5]$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ



1. Укажите решение уравнения $\sqrt[3]{x-4} = 2$

- а) 9
- б) 12
- в) 8
- г) 3

2. Иррациональным называется уравнение, где переменная находится:

- а) В знаменателе дроби
- б) В степени числа
- в) Под знаком модуля
- г) Под знаком корня

3. Укажите решение уравнения $\sqrt{x^2 - 7} = 3$

- а) 4
- б) -4
- в) -4; 4
- г) 9

4. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня положительно?

- а) Четной
- б) Нечетной
- в) Четной и нечетной
- г) Все существуют

5. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня отрицательно?

- а) Четной
- б) Нечетной
- в) Четной и нечетной
- г) Все существуют

6. Укажите решение неравенства $\sqrt{1-x} > -2$.

- а) $x \in R$
- б) $x < -3$
- в) $x \leq 1$
- г) $x > -3$

7. Укажите решение неравенства $\sqrt{1-x} > \sqrt{x+2}$.

- а) $x \in R$
- б) $-2 \leq x < -1/2$
- в) $x < -1/2$
- г) $-2 < x < -1/2$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Укажите, какому промежутку принадлежит сумма корней уравнения (или корень, если он один):

1. $\sqrt{x-3} = 2$.

1) (9; 12) 2) [-3; 6]

3) (0; 8) 4) [5; 7]

2. $\sqrt[4]{x-3} = 2$.

1) (0; 14] 2) [-1; 2]

3) (1; 9) 4) [11; 21]

3. $\sqrt[3]{x+2} = 3$.

1) (23; 25) 2) [24; 25]

3) [0; 5) 4) (7; 20]

4. $\sqrt{x} = 2 - x$.

1) (2; 4] 2) [-2; 1)

3) [0; 4) 4) (5; 8]

5. $\sqrt{x^2 - x + 1} = x$.

1) [2; 7] 2) (-3; 1)

3) (0; 1] 4) (3; 8)

2. Укажите количество корней уравнения.

1. $\sqrt{2x+5} = x+1$

2. $\sqrt{x+9} = 2x-3$

3. $x-1 = \sqrt{7-2x-x^2}$

4. $x+2 = \sqrt{16+4x-x^2}$

5. $x+3 = 6 - \sqrt{x+3}$

6. $\sqrt{x^2+7} + 5 = x^2$

7. $3x+1 + 5\sqrt{3x+1} = 6$

8. $x^2 = 3 + \sqrt{2x^2+18}$

9. $(x^2-4) \cdot (\sqrt{14+5x}-x) = 0$

10. $(x^2-9) \cdot (\sqrt{6-5x}-x) = 0$

11. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} - 2\sqrt{x} = 0$

3. Решите неравенства:

а) $\frac{\sqrt{21-4x-x^2}}{x-2} < 1$;

б) $\frac{1-\sqrt{8-x^2}}{2x} < 1$

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын и др.]: под ред. А.Н.Колмогорова. - М.: Просвещение, 2008
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009

4. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И.Р.Высоцкий, Л.И.Звавич, Б.П.Пигарев и др.; под ред. С.А. Шестакова. - М.: Внешсигма-М, 2007
5. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические выражения, функции, уравнения и неравенства / Е.А.Семенко, М.В.Фоменко; под ред. Е.А.Семенко. - М.: Издательство "Экзамен", 2012
6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. - Ростов-наДону: Легион, 2010.

Ключ к тесту

1	2	3	4	5	6	7
б	г	в	г	а	в	б