1. В классе 30 учеников. Прилежных учеников – 22 человека, талантливых – 18 человек. Сколько учеников класса и талантливы, и прилежны одновременно?

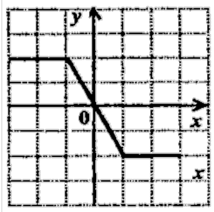
1) 10 2) 12 3) 8 4) 4

Решение: Среди талантливых учеников могут быть прилежные , а среди прилежных - талантливые. Всего таких учеников будет 18 + 22 = 40. В классе 30, значит талантливых и прилежных будет 40 – 30 = 10.

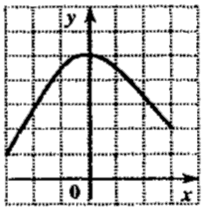
Ответ 1).

2. Укажите рисунок, на котором изображён график нечётной функции.

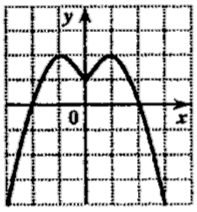
1)



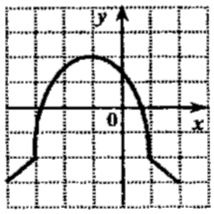
2)



3)



4)



Решение: График четной функции симметричен относительно оси ОУ, значит правильно
Ответ 3).

3. Вычислите $\sin\frac{7\pi}{6}$.

1) $0{,}5$ 2) $-0{,}5$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\frac{6\pi+\pi}{6}=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-0,5.$$

Ответ 2).

4. Вычислите $\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{5\pi}{24}$.

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $0{,}5$

$$\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{5\pi}{24}=-\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)=-\cos\left(\frac{6\pi}{24}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Решите уравнение $\cos 5x=-1$.

1) $\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi\cdot n}{5},\ n\in Z$ 2) $\pm\frac{5\pi}{2}+\frac{2\pi\cdot n}{2},\ n\in Z$

3) $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi\cdot n}{5},\ n\in Z$ 4) $\frac{5\pi}{2}+\frac{2\pi\cdot n}{5},\ n\in Z$

Решение:

$$\cos 5x=-1\Leftrightarrow 5x=\arccos(-1)\Leftrightarrow 5x=\pi+2\pi n\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5};n\in Z.$$

Ответ 3).

6. Решением уравнения

$2\sin^2 x = 3\cos x$ является:

1) $\pm arctg1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$
2) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$
3) $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$
4) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Решение:

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right) - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 1.5\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -2,\\ \cos x = 0{,}5.\end{array}\right.$$

$\cos x = -2$ *решений нет.* $\cos x = 0{,}5 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z.$

Ответ 4).

7. Тело движется по прямой так, что расстояние S (*в метрах*) изменяется по закону $S(t) = 5t^2 - 16t + 4$ (t – *время движения в секундах*). Через сколько секунд после начала движения скорость тела будет равна 4 *м/с*?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

Решение:

$v(t) = S'(t) = \left(5t^2 - 16t + 4\right)' = 10t - 16;$

$v(t) = 10t - 16 = 4 \Leftrightarrow t = 2.$

Ответ 2).

8. К графику функции $y = x^3 - x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x = 1$ проведена касательная. Найдите абсциссу точки графика касательной, ордината которой равна 31.

1) 0
2) 29
3) 31
4) 33

Решение:

Найдем уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой $x = 1$. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 2x$. Ордината этой точки: $y(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = 1$

Уравнение касательной имеет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. $y'(1) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = 1$

Получим: $y - 1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x$. Подставим в уравнение вместо ординаты 31, такая будет и абсцисса.

Ответ 3).

9. Найдите значение производной функции $y = 3\sin 3x$ в точке $\dfrac{\pi}{3}$.

1) 1
2) -9
3) $-\dfrac{1}{9}$
4) -1

Решение: $y' = (3\sin 3x)' = 3\cos 3x \cdot (3x)' = 9\cos 3x$

$y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 9\cos 3\cdot\dfrac{\pi}{3} = 9\cos\pi = -9.$

Ответ 2).

10. Наименьший неотрицательный корень уравнения $\sin 2x + \sin 6x = 4\cos 2x$ равен

1) $\dfrac{\pi}{8}$ 2) $\dfrac{\pi}{2}$ 3) $\dfrac{3\pi}{4}$ 4) $\dfrac{\pi}{4}$

Решение:

$\sin 2x + \sin 6x = 4\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin\frac{2x+6x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2} = 4\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 2x = 4\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x(\sin 4x - 2) = 0;$

Получим: $\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \sin 4x = 2.\end{array}\right.$

Уравнение $\sin 4x = 2.$ решений не имеет.

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; n \in Z$.

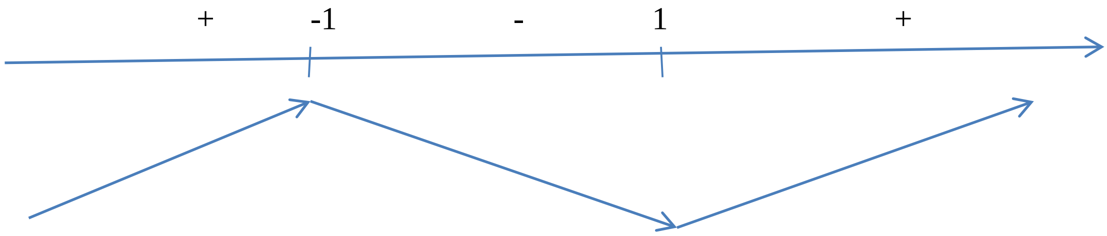
Ответ 4).

11. Длина промежутка убывания функции $y = x^5 - 5x$ равна

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

Решение: Найдем точки минимума и максимума функции. Найдем производную.

$y' = 5x^4 - 5; 5x^4 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$



По поведению производной видим, что максимум функции в точке с абсциссой -1, а минимум в точке с абсциссой 1. Расстояние между этими точками 2. Это и есть длина промежутка убывания.

Ответ 2).

12. Найдите произведение наибольшего и наименьшего значения функции $y = x^3 + x^2 - x$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

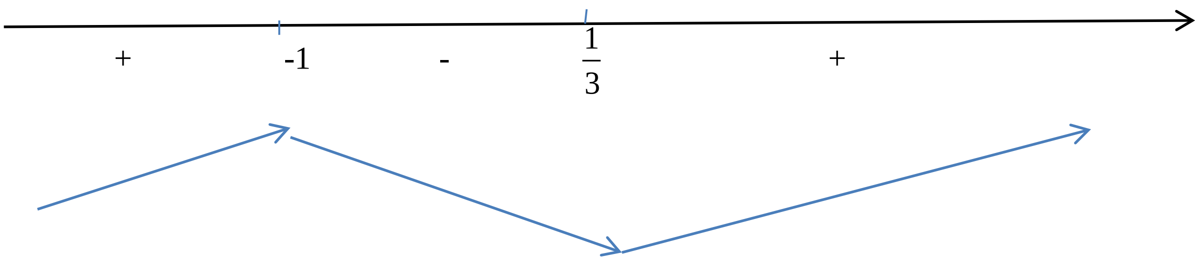
1) -10 2) $-\dfrac{50}{27}$ 3) -20 4) -5

Решение: Найдем производную функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1$

Найдем значения, при которых производная равна нулю:

$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0.$

Используя теорему Виета получим $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{1}{3}$.



В точке с абсциссой -1 максимум, в другой точке минимум. Найдем значения функции в этих точках и на концах отрезка $[-2;\ 2]$.

$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = 1.$

$y(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{27}$

$y(2) = (2)^3 + (2)^2 - (2) = 8 + 4 - 2 = 10.$

$y(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) = -8 + 4 + 2 = -2.$

Наименьшее значение функции -2, а наибольшее значение 10. Произведение -20.
Ответ 3).

13. Автомобиль из пункта *А* в пункт *Б* ехал со средней скоростью 60 *км/час*, а обратно со скоростью 40 *км/час*. Какова средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути?

Чтобы найти скорость автомобиля на всем пути, нужно весь пройденный путь поделить на все время движения. Пусть путь из А в Б бедет S, тогда обратно тоже S, а весь путь 2S.
Время из А в Б $\frac{S}{60}$, из Б в А $\frac{S}{40}$. Тогда скорость $v = \frac{2S}{\frac{S}{60} + \frac{S}{40}} = \frac{2S}{\frac{2S + 3S}{120}} = \frac{240S}{5S} = 48$

Ответ 48.

14. Сколько корней имеет уравнение $\sin^2 x - 5\cos x = \sin x \cdot \cos x - 5\sin x$ на отрезке $[0;\ 4]$?

$\sin^2 x - 5\cos x = \sin x \cdot \cos x - 5\sin x \Leftrightarrow \sin x(\sin x - \cos x) + 5(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0, \\ \sin x + 5 = 0. \end{array}\right.$

Уравнение $\sin x + 5 = 0$. корней не имеет.

$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z.$

На отрезке $[0;\ 4]$ корни не отрицательные, значит n ≥ 0.

$n = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} < 0,$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; 0 < \frac{\pi}{4} < 4,$

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}; 0 < \frac{5\pi}{4} < 4,$

$n = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} > 4,$

Ответ 2.

15. Найдите значение параметра a, при котором функция $y=(x-a)\cdot(x^2-1)$ имеет минимум в точке $x_0=\dfrac{1}{3}$.

Найдем производную функции и исследуем ее на экстремумы.

$$y'=(x-a)'(x^2-1)+(x-a)(x^2-1)'=x^2-1+2x^2-2ax=3x^2-2ax-1.$$

Если функция имеет минимум в точке $x_0=\dfrac{1}{3}$, значит значение производной в ней равна нулю и получим: $3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2a\cdot\dfrac{1}{3}-1=0\Leftrightarrow -2a\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a=-1.$

Ответ a = -1.

Задания взяты для мониторинга по математике в Псковской области 2018 года.