

Систематизация знаний по геометрии при подготовке к ЕГЭ по теме "Вписанные и описанные окружности. Треугольник. Четырехугольник"

Зинкоева Вера Васильевна, учитель математики

На итоговых уроках по геометрии времени на то, чтобы прорешать задачи по всему курсу в целом практически не остается. А в КИМы ЕГЭ традиционно включаются задачи, решение которых требует знаний планиметрии по теме «Вписанные и описанные окружности». Поэтому предложенный материал поможет не только вспомнить данную тему, но и систематизировать ранее полученные знания по решению планиметрических задач на вписанные и описанные окружности, а также подготовиться к решению подобных задач в ЕГЭ. При этом предполагается, что ученик хотя бы на минимальном уровне владеет всем курсом школьной геометрии (планиметрии).

Первым и важнейшим этапом решения геометрической задачи является построение чертежа. Нельзя научиться решать достаточно содержательные задачи, не выработав прочных навыков по изготовлению «хороших» чертежей, не выработав привычки (даже рефлекса) – не начинать решать задачу, пока не сделан «большой и красивый» чертеж. В качестве основного метода решения геометрических задач выдвигается алгебраический метод с составлением последующего алгоритма. Ставя во главу угла алгебраический метод, необходимо предостеречь от чрезмерного увлечения алгеброй и счетом, не забывать о том, что речь идет все же о геометрических задачах, а поэтому, работая над задачей, следует искать геометрические особенности, учиться смотреть и видеть геометрию. Выделив два слагаемых, определяющих умение решать геометрические задачи, – чертеж плюс метод, добавим сюда третье – владение определенными теоремами и опорными задачами, известными геометрическими фактами.

I. Необходимые теоремы и опорные задачи для окружности, вписанной в треугольник и четырехугольник, и окружности, описанной около треугольника и четырехугольника. (Приложение 1)

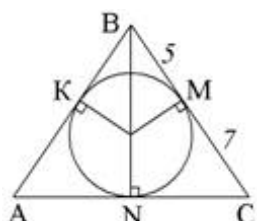
II. Решение задач по готовым чертежам (удобно воспользоваться кодоскопом).

При этом ученики устно объясняют ход решения задач, формулируют теоремы и опорные задачи, применяемые при решении задач по готовым чертежам.

Готовый чертеж

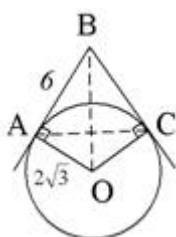
Дано
Найти

Решение
Ответ



AB = BC
P_{ABC} = ?

Отрезки касательных равны: BM = BK = 5
AB = BC = 12
MC = CN = 7, AC = 14, AK = AN = 7,
P_{ABC} = 12 + 12 + 14 = 38
Ответ: P_{ABC} = 38

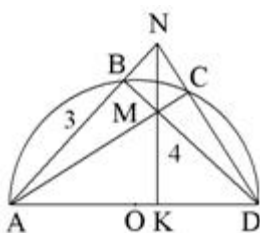


AB = 6,
AO = 2√3
P_{ABC} = ?

Отрезки касательных равны: AB = BC

$$1) \operatorname{tg} \angle ABO = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \angle ABO = 30^\circ$$

2) AB = BC, $\angle B = 60^\circ$, т.к. BO – биссектриса
3) $\triangle ABC$ – равносторонний, P_{ABC} = 6 • 3 = 18
Ответ: P_{ABC} = 18

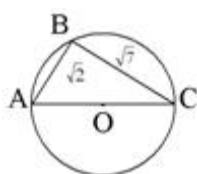


AD – диаметр
окружности,
AB = 3,
CD = 4
1. Доказать:
NM ⊥ AD
2. R = ?

1. Т.к. AD – диаметр, то DB ⊥ AN и AC ⊥ DN, т.е. AC и DB – высоты $\triangle AND$, тогда NK – высота, т.к. они пересекаются в одной точке.
Значит NM ⊥ AD.

$$2. AD = \sqrt{9+16} = 5, R = \frac{1}{2}AD = 2,5$$

Ответ: R = 2,5

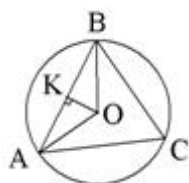


R = ?

AC – диаметр окружности и гипотенуза

$$\text{прямоугольного } \triangle ABC, R = \frac{1}{2}\sqrt{7+2} = 1,5$$

Ответ: R = 1,5



AB = 24,
OK = 5
R = ?

O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам \triangle .

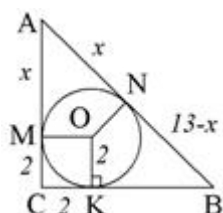
$$\triangle BKO \text{ – прямоугольный, } BK = AK = 12,$$

$$KO = 5, BO = \sqrt{144+25} = 13 = R$$

Ответ: R = 13

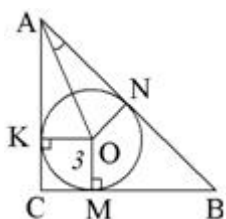
III. Решение задач.

1. Найти периметр прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности 2 см, а гипотенуза 13 см.



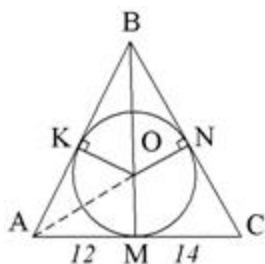
Пусть $AM = AN = x$, тогда $AC = x + 2$, $CB = 2 + 13 - x = 15 - x$
 $(x + 2)^2 + (15 - x)^2 = 169$
 $x^2 - 13x + 30 = 0$
 $x_1 = 10$, $x_2 = 3$; $AC = 6$, $CB = 12$; $P = 30$ см
 Ответ: $P = 30$ см.

2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности 3 см, O – центр вписанной окружности, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$. Найти площадь треугольника.



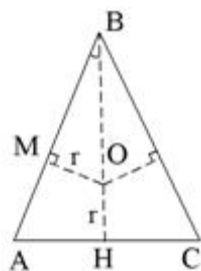
AO – биссектриса, ΔAKO – прямоугольный,
 $\sin \angle KAO = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{KO}{AO} = \frac{3}{AO}$, $AO = 6$,
 $AN = AK = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$, $AC = 3 + 3\sqrt{3}$,
 $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{CB}$, $CB = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 3$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2}(3 + 3\sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 9\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$
 Ответ: $S = 9\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ см².

3. Периметр треугольника 84. Точка касания вписанной окружности делит одну из сторон на отрезки 12 и 14. Найти радиус вписанной окружности и площадь ΔABC , если $OB = 18$, O – центр вписанной окружности.



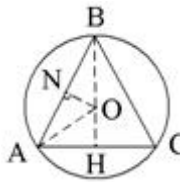
$P = 84$, $KB = BN = 16$, $ON = \sqrt{18^2 - 16^2} = 2\sqrt{17} = r$
 $AB = 28$, $BC = 30$, $AC = 26$
 По формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{42 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 16} = 336$
 Ответ: $r = 2\sqrt{17}$; $S = 336$.

4. В равнобедренном треугольнике расстояние от центра вписанной окружности до вершины не равного угла 5 см. Большая сторона 10 см. Найти радиус вписанной окружности.



$OB = 5$, $\sin \angle MBO = \frac{OM}{OB} = \frac{AH}{AB}$,
 $OM = OB \cdot \sin \angle MBO = \frac{OB \cdot AH}{AB} = \frac{5 \cdot AH}{10} = \frac{AH}{2} = r$, $BH = 5 + r$,
 $AH = 2r$, ΔAHB – прямоугольный, $AH = \sqrt{10^2 - (5 + r)^2}$
 $4r^2 = 100 - (5 + r)^2$, $r^2 + 2r - 15 = 0$, $r_1 = -5$, $r_2 = 3$
 Ответ: $r = 3$ см.

5. Основание равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса 5 см, равно 6 см. Найти периметр треугольника.



$\triangle AHO$ – прямоугольный: $OH = 4$, $BH = 4 + 5 = 9$,

$$AB = BC = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$$

$$P = 6\sqrt{10} + 6$$

Ответ: $P = 6\sqrt{10} + 6$ см.

6. Периметр треугольника ABC равен 72 см. $AB = BC$, $AB:AC = 13:10$. Найти радиус описанной около треугольника окружности.



$$AB + BC + AC = 72, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \frac{13}{10}, \quad \frac{13AC}{10} + \frac{13AC}{10} + AC = 72$$

$$AC = 20, \quad AB = BC = \frac{72 \cdot 13}{36} = 26, \quad BH = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

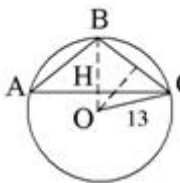
$$\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{BN}{BO}$$

$$BN = NA = 13,$$

$$\frac{24}{26} = \frac{13}{R}, \quad R = \frac{26 \cdot 13}{24} = \frac{169}{12} = 14 \frac{1}{12}$$

Ответ: $R = 14 \frac{1}{12}$ см.

7. Основание тупоугольного равнобедренного треугольника равно 24 см, а радиус описанной окружности 13 см. Найти боковую сторону треугольника.



$$OC = 13, \quad AC = 24, \quad HC = 12$$

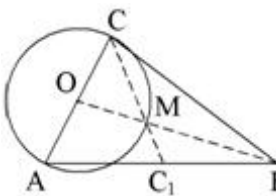
$$\triangle HOC \text{ – прямоугольный, } OH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$BH = BO - OH = 13 - 5 = 8$$

$$\triangle BHC \text{ – прямоугольный, } BC = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

Ответ: $4\sqrt{13}$ см.

8. Окружность, диаметром которой служит AC треугольника ABC, проходит через точку пересечения медиан этого треугольника. Найти отношение длины стороны AC к длине проведенной к ней медианы.

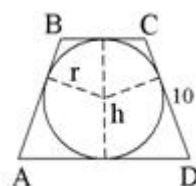


$$AO = OC = R = OM, \quad BM = 2R,$$

$$BO = 3R, \quad \frac{AC}{OB} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

9. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.



$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h$$

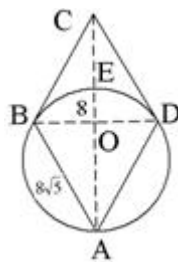
Т.к. окружность вписанная, то $AB + CD = AD + BC = 20$

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$h = 2r = 8, \quad S_{ABCD} = 10 \cdot 8 = 80$$

Ответ: 80.

10. Дан ромб ABCD. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}$, $BD = 16$.



$\triangle AOB$ – прямоугольный: $AO = \sqrt{320 - 64} = \sqrt{256} = 16$

$AD = 32$

По теореме об отрезках пересекающихся хорд:

$BO \cdot OD = AO \cdot OE$, $8 \cdot 8 = 16 \cdot OE$, $OE = 4$, $CE = 16 - 4 = 12$

Ответ: 12.

IV. Задачи для самостоятельного решения.

1. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см, а радиус описанной окружности равен 5 см. Найдите больший катет треугольника.

Ответ: (6; 8).

2. Около равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при основании 75° описана окружность с центром O. Найдите ее радиус, если площадь треугольника BOC равна 16.

Ответ: (8).

3. Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник

ABC, если высота BH равна 12 и известно, что $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{4}{5}$.

Ответ: (4).

4. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: (25).

5. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найдите радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Ответ: (6).

6. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

Ответ: (15).

7. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его боковых сторон в точках K и A. Точка K делит сторону этого треугольника на отрезки 15 и 10, считая от основания. Найдите длину отрезка KA.

Ответ: (12).

8. Угол B треугольника ABC равен 60° , радиус окружности, описанной около ABC, равен 2. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и C и центр окружности, вписанной в ABC.

Ответ: (2).

9. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найти отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Ответ: (11 : 7).

10. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найти отношение большего катета к меньшему.

Ответ: ($\sqrt{3}$).

11. Диагонали четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке M, прямые AB и CD пересекаются в точке N.

Известно, что $\angle AMD = 108^\circ$, $\angle AND = 24^\circ$. Найти $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

Ответ: (66о, 42о).

12. Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, $\angle AMB = 105^\circ$. Найдите градусную меру угла ABO, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: (15о).

13. Около окружности описана равнобочная трапеция с основаниями 5 и 3. Найти радиус окружности.

Ответ: ($\frac{1}{2}\sqrt{15}$).

14. В равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M. Найдите радиус окружности, если $AM = 6$, $BM = 24$.

Ответ: (8).

15. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Через центр O вписанной в треугольник окружности проведен луч BO, пересекающий катет AC в точке M. Известно, что $AM = 8\sqrt{3}$, $\angle A = \angle MBC$. Найдите гипотенузу и радиус окружности, описанной около треугольника.

Ответ: (24; 12).