ЕГЭ - «Экономические» задачи повышенного уровня сложности

В системе школьного обучения, важной составляющей является подготовка ученика к сдаче единого государственного экзамена. Так в 2015 году выпускникам впервые была предложена задача с экономическим содержанием. В 2017 году эта задача была включена во вторую часть профильного уровня под номером 17. Несмотря на рост выполнения заданий повышенного уровня сложности, немногие учащиеся берутся на экзамене за решение **этой** задачи. В аналитических данных ФИПИ указывается, что правильно решили эту задачу менее 1% экзаменуемых. Таким образом, существует проблема подготовки выпускника, связанная с решением экономических задач повышенного уровня сложности.

Основные понятия и формулы

Слово «процент» происходит от латинского слова pro centum, что буквально переводится «за сотню», или «со ста».

Знак % происходит, как полагают, от итальянского слова cento (сто), которое в процентных расчетах часто писалось сокращенно cto. Отсюда путем дальнейшего упрощения в скорописи буквы t в наклонную черту произошел современный символ для обозначения процента.

Процент – это сотая часть чего-либо. А в математике говорят, что один процент – это сотая часть числа. Само же число, о котором идет речь, всегда составляет 100%

Банковский депозит – это определенная денежная сумма (или драгоценные металлы, акции крупных фирм и т.д.), которую клиент передает финансовому учреждению (коммерческому или государственному банку) на определенный временной период.

Вклад – это *денежная сумма*, которая отдается на хранение с целью получения дополнительных процентов в качестве прибыли.

Срочный вклад — депозит под проценты, внесённый на определённый срок и изымаемый полностью по истечении обусловленного срока.

Накопительный вклад — возможность пополнения депозита в течение всего срока действия договора.

Банковский процент – это плата за пользование заемными средствами (плата за кредит, депозит, заем, и др.).

Начисление банковских процентов может выполняться двумя способами: простой и сложный процент.

Простой процент – за основу расчетов всегда в течении срока договора принимается сумма кредита (депозита).

Сложный процент – в каждом последующем периоде сумма, на которую насчитывается процент, увеличивается на размер процентов, полученных в предыдущем периоде.

Традиционно более выгодными принято считать депозиты по которым банк начисляет сложные проценты. По кредитам ситуация обратная. Выгодным считается процент, рассчитываемый не на всю сумму кредита, а на остаток невозвращенных банку денежных средств.

Формулы расчета процентов

<u>1. Формула расчета доли в процентном отношении.</u>

Пусть задано два числа: A_1 и A_2. Надо определить, какую долю в процентном отношении составляет число A_1 от A_2.

$$P = \frac{A_1}{A_2} \cdot 100\%$$

Пример. Какую долю в процентном отношении составляет 10 от 200

$$P = \frac{10}{200} \cdot 100\% = 5\%$$

<u>2. Формула расчета процента от числа.</u>

Пусть задано число $А_2$. Надо вычислить число $А_1$, составляющее заданный процент Р от $А_2$.

$$А_1 = \frac{А_2 \cdot Р}{100}$$

Пример. Банковский кредит 10000 рублей под 5 процентов. Сумма процентов составит.

$$Р = \frac{10000 \cdot 5}{100} = 500 \text{ (руб)}$$

<u>3. Формула увеличения числа на заданный процент.</u>

Пусть задано число $А_1$. Надо вычислить число $А_2$, которое больше числа $А_1$ на заданный процент Р. Используя формулу расчета процента от числа, получаем:

$$А_2 = А_1 + А_1 \cdot \frac{Р}{100} \text{ или } А_2 = А_1 \cdot \left(1 + \frac{Р}{100}\right)$$

Пример 1. Банковский кредит 10 000 рублей под 5 процентов. Общая сумма долга составит: $А_2 = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 10000 \cdot 1{,}05 = 10500$ (руб)

Пример 2. Сумма без НДС равна 1000 рублей, НДС 18 процентов. Сумма с НДС составляет: $А_2 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right) = 1000 \cdot 1{,}18 = 1180$ (руб)

<u>4. Формула уменьшения числа на заданный процент.</u>

Пусть задано число $А_1$. Надо вычислить число $А_2$, которое меньше числа $А_1$ на заданный процент Р. Используя формулу расчета процента от числа, получаем:

$$А_2 = А_1 - А_1 \cdot \frac{Р}{100} \text{ или } А_2 = А_1 \cdot \left(1 - \frac{Р}{100}\right)$$

Пример. Пусть оклад составляет 10 000 рублей. Тогда денежная сумма к выдаче за минусом подоходного налога (13%) составляет:

$А_2 = 10000 \cdot \left(1 - \frac{13}{100}\right) = 10000 \cdot 0{,}87 = 8700$ (руб)

<u>5. Формула вычисления исходной суммы.</u>

Пусть задано число $А_1$, равное некоторому исходному числу $А_2$ с прибавленным процентом Р. Надо вычислить число $А_2$. Иными словами: знаем денежную сумму с НДС, надо вычислить сумму без НДС.

Имеем, $А_1 = А_2 + А_2 \cdot \frac{Р}{100}$ или $А_1 = А_2 \cdot \left(1 + \frac{Р}{100}\right)$

Тогда, $А_2 = \frac{А_1}{1+\frac{Р}{100}}$

Пример. Сумма с НДС равна 1180 рублей, НДС – 18%. Стоимость без НДС составляет: $А_2 = \frac{1180}{1+0,18} = 1000$ (руб)

6. Расчет процентов на банковский депозит. Формула расчета простых процентов.

Если проценты на депозит начисляются один раз в конце срока депозита, то сумма процентов вычисляется по формуле простых процентов.

$S = K + K \cdot \frac{P}{100} \cdot \frac{d}{D}$, где $K \cdot \frac{P}{100} \cdot \frac{d}{D}$ - это сумма процентов (доход)

S — сумма банковского депозита с процентами,

K — первоначальная сумма (капитал),

P — годовая процентная ставка,

d — количество дней начисления процентов по привлеченному вкладу,

D — количество дней в календарном году (365 или 366).

Пример 1. Банком принят депозит в сумме 100 тыс. рублей сроком на 1 год по ставке 20 процентов.

$S = 100000 + 100000 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{365}{365} = 120000$ (руб) – сумма банковского депозита с процентами

$100000 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{365}{365} = 20000$ (руб) – доход

Пример 2. Банком принят депозит в сумме 100 тыс. рублей сроком на 30 дней по ставке 20 процентов годовых.

$S = 100000 + 100000 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{365} = 101643{,}84$ (руб)

Доход: 101643,8 – 100000 = 1643,84 (руб)

7. 1. Расчет процентов на банковский депозит при начислении процента на процент. Формула расчета сложных процентов.

Если проценты на депозит начисляются несколько раз через равные промежутки времени и зачисляются во вклад, то сумма вклада с процентами вычисляется по формуле сложных процентов.

$$S = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100} \cdot \frac{d}{D}\right)^n$$

где:

S — сумма депозита с процентами,

К — сумма депозита (капитал),

Р — годовая процентная ставка,

n — число периодов начисления процентов.

Пример 1. Принят депозит в сумме 100 тыс. рублей сроком на 90 дней по ставке 20 процентов годовых с начислением процентов каждые 30 дней.

$S = 100000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{365}\right)^3 = 105013{,}02$ (руб) – сумма банковского депозита с процентами

105013,02 – 100000 = 5 013.02 (руб) – доход

7.2. Формула сложных процентов.

Если процентная ставка дана не в годовом исчислении, а непосредственно для периода начисления, то формула сложных процентов выглядит так

$$S = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

где:

S — сумма депозита с процентами,

К — сумма депозита (капитал),

Р — процентная ставка,

n — число периодов начисления процентов.

Пример. Принят депозит в сумме 100 тыс. рублей сроком на 3 месяца с ежемесячным начислением процентов по ставке 1,5% в месяц.

$$S = 100000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^3 = 104567{,}84 \text{ (руб)}$$

Доход составил: 104567,84 – 100000 = 4567,84 (руб)

Рассмотренные выше задачи являются «кирпичиками» из которых в дальнейшем будет складываться решение нашей «экономической» задачи.

Вывод формул

Как оказалось, при решении «экономических» задач на экзамене нельзя пользоваться формулами, которые не изучаются в школе. А ведь именно эти формулы (формулы нахождения простых и сложных процентов) в значительной мере помогают при решении рассматриваемых задач.

Выведем эти формулы самостоятельно.

Для этого рассмотрим два типа задач: с начислением процентов на вклад и начислением процентов на кредит.

<u>ЗАДАЧА 1</u>: Вкладываем деньги в банк, открыв <u>накопительный вклад</u>

Положим в банк 3 млн. рублей под 15% годовых.

(В=3 млн.руб – ежегодная сумма взноса)

Вспомним, что: $P\% = 1 + \frac{P}{100}$

Другими словами можно сказать, что сумма на нашем счёте ежегодно будет увеличиваться в 1,15 раза.

Давайте посчитаем, сколько денег будет на нашем счёте после каждого года:

В первый год, когда мы только начнём откладывать деньги, никакие проценты не накопятся, т. е. в конце года мы отложим три миллиона рублей:

B=3m (сумма взноса = 3 миллиона рублей)

В конце второго года на те три миллиона рублей, которые остались с первого года, уже будут начислены проценты, т.е. нам нужно умножить на 1,15. Однако в течение второго года мы также доложили еще три миллиона рублей. Разумеется, на эти три миллиона еще не были начислены проценты, потому что к концу второго года эти три миллиона только появились на счету:

$$3m\cdot 1{,}15+3m$$

Итак, третий год. В конце третьего года на эту сумму будут начислены проценты, т. е. необходимо всю эту сумму умножить на 1,15.

И опять же, в течение всего года мы еще отложили три миллиона рублей:

$$(3m\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m$$

Четвертый год. Опять же, вся сумма, которая оказалась у нас к концу третьего года, умножается на 1,15, т.е. на всю сумму будут начислены проценты. В том числе, будут начислены проценты на проценты. И к этой сумме добавляется еще три миллиона, потому что в течение четвертого года мы также откладывали деньги:

$$((3m\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m$$

А теперь давайте раскроем скобки и посмотрим, какая у нас будет сумма к концу четвертого года откладывания денег:

$$((3m\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m = (3m\cdot 1{,}15^2+3m\cdot 1{,}15+3m)\cdot 1{,}15+3m =$$
$$=3m\cdot 1{,}15^3+3m\cdot 1{,}15^2+3m\cdot 1{,}15+3m = 3m(1{,}15^3+1{,}15^2+1{,}15+1) =$$
$$=3m(1+1{,}15+1{,}15^2+1{,}15^3)$$

Как видим, в скобках у нас стоят элементы геометрической прогрессии, т. е. у нас стоит сумма элементов геометрической прогрессии.

Вспомним, что если геометрическая прогрессия задана элементом b_1, а также знаменателем q, то сумма элементов будет вычисляться по формуле:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

В нашем случае b_1=1; q=1,15

Теперь мы можем посчитать сумму: $S_4 = 1 \cdot \frac{1{,}15^4-1}{1{,}15-1} = 5$

В итоге мы получаем, что за четыре года накоплений наша исходная сумма увеличится в пять раз, т. е. составит 3m ·5 = 15 миллионов.

Но нашей целью было не просто решить задачу, а увидеть закономерность, которая дала бы возможность записать формулу, позволяющую найти итоговую сумму вклада через размер ежегодных платежей, а также через проценты, которые начисляет банк.

Получили:

$$\boldsymbol{S} = \text{В} \cdot \frac{\left(\mathbf{1} + \frac{\text{Р}}{\mathbf{100}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}}{\left(\mathbf{1} + \frac{\text{Р}}{\mathbf{100}}\right) - \mathbf{1}}$$

где:

S – общая сумма вклада
В – ежегодная сумма взноса
n – число периодов начисления процентов

<u>ЗАДАЧА 2</u>: Проценты по кредитам

Возьмем два миллиона рублей в кредит. При этом согласно договору мы должны платить $\boldsymbol{x}$ рублей в месяц. Допустим, что кредит мы взяли по ставке 20% годовых. Кроме того, предположим, что срок кредита составляет три года.

Давайте попробуем связать все эти величины в одну формулу.

Итак, в самом начале, как только мы вышли из банка у нас в кармане два миллиона, и это и есть наш долг.

К = 2m (кредит = 2 миллиона рублей)

Затем спустя один год на сумму задолженности будут начислены проценты. Как мы уже знаем для вычисления процентов достаточно умножить исходную задолженность на коэффициент, который считается по следующей формуле: $\text{Р}\% = 1 + \frac{\text{Р}}{100}$

В нашем случае речь идет о ставке 20% годовых, т. е. мы можем записать:

$$1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$$

Это коэффициент суммы, которая будет начисляться в год. В конце первого года на эту сумму будут начислены проценты, и она увеличится в 1,2 раза. Сразу после этого нам будет необходимо оплатить оговоренную сумму, т. е. ***x*** рублей в год:

$$2m \cdot 1{,}2 - x$$

Далее к концу второго года уже на эту сумму будут вновь начислены проценты:

$$(2m \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x$$

И вновь мы вносим платеж в размере x рублей.

Затем к концу третьего года сумма нашей задолженности еще раз увеличивается на 20%:

$$((2m \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x)1{,}2 - x$$

И по условию за три года мы должны полностью расплатиться, т. е. после внесения последнего третьего платежа его объем задолженности должен быть равен нулю. Мы можем записать такое уравнение:

$$((2m \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x)1{,}2 - x = 0$$

Решим это уравнение:

$(2m \cdot 1{,}2^2 - x \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x = 0$

$2m \cdot 1{,}2^3 - x \cdot 1{,}2^2 - x \cdot 1{,}2 - x = 0$

$2m \cdot 1{,}2^3 = x \cdot 1{,}2^2 + x \cdot 1{,}2 + x$

$2m \cdot 1{,}2^3 = x\,(1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)$

Перед нами вновь геометрическая прогрессия, а точнее, сумма трех элементов геометрической прогрессии. Давайте перепишем ее в порядке возрастания элементов:

$$2m \cdot 1{,}2^3 = x\,(1 + 1{,}2 + 1{,}2^2)$$

Теперь нам нужно найти сумму трех элементов геометрической прогрессии. Запишем:

$$b_1 = 1;\ q = 1{,}2$$

Теперь найдем сумму геометрической прогрессии:

$$S_3 = 1 \cdot \frac{1{,}2^3 - 1}{1{,}2 - 1}$$

Следует напомнить, что сумма геометрической прогрессии с такими параметрами (b1;q) считается по формуле:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Подставляем эту формулу в наше выражение:

$$2m \cdot 1{,}2^3 = x \cdot \frac{1{,}2^3 - 1}{1{,}2 - 1}$$

А теперь, запишем эту формулу в общем виде:

$$\text{К} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\text{P}}{\mathbf{100}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{x} \cdot \frac{\left(\mathbf{1} + \frac{\text{P}}{\mathbf{100}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}}{\left(\mathbf{1} + \frac{\text{P}}{\mathbf{100}}\right) - \mathbf{1}}$$

где:

К – сумма кредита

x – сумма платёжа

$\frac{\text{P}}{100}$ – процентная ставка

n – сроки предоставления кредита

Эта формула связывает проценты, кредиты, платежи и сроки.

Именно с помощью этой формулы и формулы суммы геометрической прогрессии решаются реальные экономические задачи из ЕГЭ по математике.

Решение задач .

Задача 1.

31 декабря 2017 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк Х рублей.

Какой должна быть сумма Х, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (т.е. за три года)?

Решение:

1 год: $6\,944\,000 \cdot 1{,}125 - x$

2 год: $\left(6\,944\,000 \cdot 1{,}125 - x\right) \cdot 1{,}125 - x = 6\,944\,000 \cdot 1{,}125^2 - 1{,}125x - x$

3 год:

$\left(6\,944\,000 \cdot 1{,}125^2 - 1{,}125x - x\right) \cdot 1{,}125 - x = 6\,944\,000 \cdot 1{,}125^3 - 1{,}125^2x - 1{,}125x - x$

После третьего взноса кредит погашен полностью, значит, остаток равен нулю. Решим полученное уравнение.

$$6\,944\,000 \cdot 1{,}125^3 - 1{,}125^2x - 1{,}125x - x = 0$$

$$6\,944\,000 \cdot 1{,}125^3 - 1{,}265\,625x - 1{,}125x - x = 0$$

$$3{,}390\,625x = 6\,944\,000 \cdot 1{,}125^3$$

$$x = \frac{6\,944\,000 \cdot 1.125^3}{3{,}390\,625}$$

$$x = 2\,916\,000$$

Ответ: $x = 2916000$ рублей.

Как видим, этот вариант записи решения не очень эффективен, так как содержит промежуточные вычисления величин. А в условиях экзамена (стрессовая ситуация) это может привести к ошибочным вычислениям и, как следствие, к неверному решению задачи.

Применим другую запись решения этой задачи.

Решение:

Пусть $S = 6\,944\,000$ *– величина кредита,*

x *– искомая величина ежегодного платежа.*

Первый год: долг: $1{,}125S$;

платеж: x;

остаток: $1{,}125S - x$.

Второй год: долг: $1{,}125(1{,}125S - x)$;

платеж: x;

остаток: 1,125(1,125S – x) – x.

Третий год: долг: 1,125(1,125(1,125S – x) – x;

платеж: x;

остаток: 0, потому что по условию было всего три платежа.

Единственное уравнение, которое надо решить:

1,125(1,125(1,125S – x) – x) – x = 0

$1{,}125^3 \cdot S = 3{,}390625x$

$$x = \frac{1{,}125^3 \cdot 6944000}{3{,}390625}$$

x = 2916000

Ответ: 2 916 000 рублей.

При решении этих задач можно заметить некоторую закономерность и, оформив решение в общем виде, получить выражение для описания долга по кредиту на любое количество лет.

Если S - сумма кредита,

$n = 1 + \frac{\mathrm{p}}{100\%}$, *где p - процентная ставка,*

x – сумма ежегодных выплат;

I год: $S{\cdot}k - x$

II год: $(Sk - x)k - x = Sk^2 - kx - x$

III год: $(Sk^2 - kx - x)k - x = Sk^3 - k^2x - kx - x$

IV год: $(Sk^3 - k^2x - kx - k)n - x = Sk^4 - k^3x - k^2x - kx - x$

и т.д.

$n -$ ый год: $Sk^n - k^{n-1}x - k^{n-2}x - \cdots - k^2x - kx - x$

Воспользуемся данным выводом при решении следующей задачи.

Задача 2.

31 декабря 2017 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся

сумму долга (то есть увеличивает долг на p%), затем Родион переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за четыре года. Если по 2 674 100 рублей, то за два года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

Решение:

Пусть S – сумма кредита, $k = 1 + \frac{p}{100}$ – увеличенная процентная ставка

суммы ежегодных выплат:

1 464 100 обозначим *в* (на четыре года),

2 674 100 обозначим *c* (на два года).

В общем виде рассчитаем оплату кредита за два года и за четыре года.

I. За два года: $Sk^2 - kc - c$

II. За четыре года: $Sk^4 - k^3b - k^2b - kb - b$=0

$$\begin{cases} Sk^2 - kc - c = 0 \\ Sk^4 - k^3b - k^2b - kb - b = 0 \end{cases}$$

Решим полученную системы:

$$\begin{cases} S = \dfrac{kc + c}{p^2} \\ S = \dfrac{p^3b + p^2b + pb + b}{p^4} \end{cases}$$

$$k^2 = -\frac{b}{b - c}$$

В полученное выражение подставим числовые значения.

$$k^2 = -\frac{1464100}{1464100 - 2674100} = \frac{1464100}{1210000} = 1{,}21$$

$$k = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}1$$

$$p = 10$$

Ответ: 10%