Подготовка к ЕГЭ: задача 18 *(отрезки)*

Мочалова Марина Владимировна

Учитель информатики

ГБОУ лицей №144 Калининского района

г.Санкт-Петербург

Содержание

Теория

Задания №18 на логические отрезки можно решать несколькими способами.
В данной презентации рассматриваются два способа решения.
Как правило, в данных задачах логическое выражение, для которого требуется найти длину отрезка, на котором это выражение истинно (или ложно), достаточно сложно для восприятия. Поэтому необходимо его упростить. Нужно ввести дополнительные обозначений для простых логических высказываний и за счёт этого получить логическую функцию традиционного вида.
Первый способ решения: полученное выражение нужно упростить, используя законы преобразования логических выражений. Итоговое выражение нужно приравнять 1, если по условию оно должно быть истинным, или 0, если должно быть ложно.

Теория

Остается только рассмотреть простые высказывания, входящие в итоговое выражение, и выяснить, на каких отрезках они истинны (или ложны, в зависимости от условия задачи). Проанализировав эти отрезки, нужно найти итоговый (или несколько, в ответе может быть не один).
При втором способе решения для полученного после ввода обозначений выражения строится таблица истинности (ТИ), в которой отражены значения всех логических переменных и логических операций на каждом числовом отрезке. В одном из столбцов будут стоять значения искомой переменной. В зависимости от условия, она либо равна 1, либо равна 0, либо может принимать любое значение, поскольку не будет влиять на конечное значение исходного выражения. Остается выбрать строки, соответствующие условию задачи (истинно или ложно должно быть исходное выражение) и выбрать числовые отрезки (отрезок).

Задание 1.

На числовой прямой даны два отрезка: *P*=[10; 18] и *Q*=[31; 40]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка *A*, что формула

$$\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q) \vee \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

Решение.

Введем обозначения: P: x ϵ P, Q: x ϵ Q, A: x ϵ A

Перепишем условие задания:

$\neg P \rightarrow Q + \neg A$ *или* $\neg P \rightarrow (Q + \neg A)$

(поскольку импликация имеет самый низкий приоритет и будет выполнена последней)

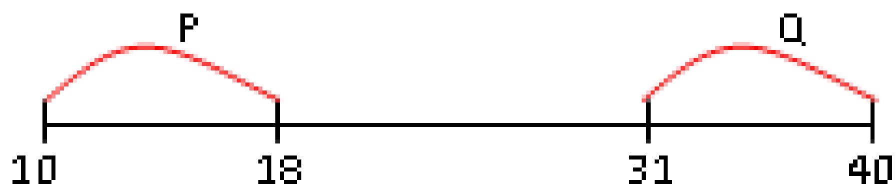
Раскрываем импликацию:

$$P + Q + \neg A$$

Это выражение должно быть равным 1 при любом значении А: $P + Q + \neg A = 1$

Задание 1.

Рассмотрим числовую ось с нашими отрезками P и Q.



Рассмотрим отдельно все три отрезка.
Отрезок 10–18: выражение истинно, т.к. P=1 (x ϵ P)
Отрезок 31– 40: выражение истинно, т.к. Q=1 (x ϵ Q)
Отрезок 18–31: выражение будет истинным в случае ¬A = 1, или A=0. Это значит, что A не принадлежит отрезку 18–31, значение A должно быть совпадающим либо с отрезком P, либо с отрезком Q. Но поскольку в задании спрашивается наименьшая длина отрезка, то это будет отрезок (18-10)=8
Ответ: 8

Задание 2.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[-10, 0] и Q=[-3, 8]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A, что логическое выражение $((x \in P) \land (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \land (x \in A))$

будет тождественно истинным, то есть будет принимать значение 1 при любом значении переменной x.

1) [-8, -4] 2) [-7, -1] 3) [-2, 5] 4) [-15, 15]

Решение.

Введем обозначения: P: $x \in P$, Q: $x \in Q$, A: $x \in A$

Перепишем условие задания: $(P \land A) \rightarrow (Q \land A)$

Раскрываем импликацию, затем используем формулу де Моргана:

$$\neg (P \cdot A) + (Q \cdot A) \text{ или } \neg P + \neg A + Q \cdot A$$

Задание 2.

Преобразуем выражение, используя следующий закон преобразования: $a + \neg a \cdot b = a + b$

$$\neg P + (\neg A + Q \cdot A) = \neg P + (\neg A + Q) = \neg A + \neg P + Q$$

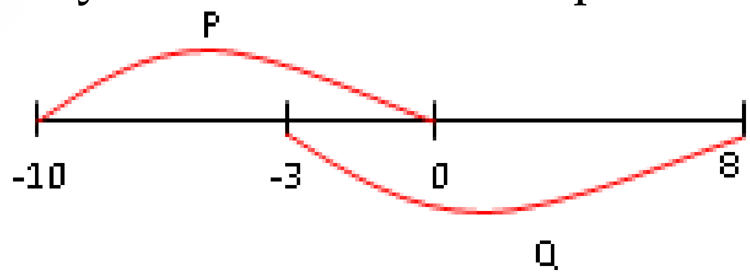
Поскольку это выражение должно быть тождественно истинным, т.е. равным 1 при любом значении A, то $\neg A$ должно быть истинным там, где $(\neg P + Q)$ ложно, или где истинно $\neg (\neg P + Q)$.

Преобразуем получившееся выражение, используя формулу де Моргана:

$$\neg (\neg P + Q) = (\neg \neg P) \land \neg Q = P \land \neg Q$$

Задание 2.

Рассмотрим числовую ось с нашими отрезками P и Q.



Выражение (P ∧ ¬Q) истинно на отрезке [-10, -3]. На нем должно быть ¬A=1 или A=0. Это означает, что отрезок A не должен содержать в себе отрезок [-10, -3].

Рассмотрим варианты ответов.

Отрезок 1) [-8, -4] содержит в себе значения из отрезка [-10, -3], поэтому не является правильным ответом.

Отрезок 2) [-7, -1] содержит в себе значения из отрезка [-10, -3], что быть не должно.

Отрезок 4) [-15, 15] содержит в себе значения из отрезка [-10, -3], что быть не должно.

Отрезок 3) [-2, 5] не содержит в себе значения [-10, -3], поэтому именно он и является ответом.

Ответ: 3)

Задание 3.

На числовой прямой даны два отрезка: R=[27; 50] и S=[30; 67]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка T, что формула

$$(x \in R) \rightarrow (((x \in S) \land \neg(x \in T)) \rightarrow \neg(x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение.

Введем обозначения:

$$R: x \in R,\ \ S: x \in S,\ \ T: x \in T$$

Перепишем условие задания:

$$R \rightarrow ((S \land \neg T) \rightarrow R)$$

Задание 3.

Преобразуем получившееся выражение, используя замену импликации и формулу де Моргана:

$$R \longrightarrow (\neg (S \land \neg T) + \neg R)$$

$$R \longrightarrow (\neg S + T + \neg R)$$

$$\neg R + \neg S + T + \neg R$$

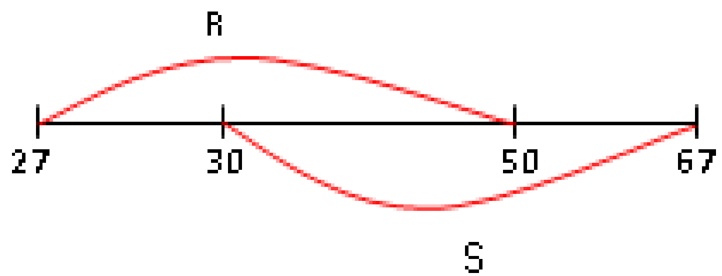
$$\neg R + \neg S + T$$

Это выражение должно быть равно 1 при любом значении T:

$$T + \neg R + \neg S = 1$$

Задание 3.

Рассмотрим числовую ось с нашими отрезками P и Q.



Чтобы получившееся выражение было везде истинным, T должно быть истинным там, где ложно (¬R + ¬S), т.е. там, где истинно выражение ¬ (¬R + ¬S).

Выполним преобразования, используя формулу де Моргана:

$$\neg(\neg R + \neg S) = \neg\neg R \wedge \neg\neg S) = R \wedge S = 1$$

Это выражение истинно на отрезке [30; 50]. Его длина равна (50 – 30) = 20

Ответ: 20

Задание 4.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[2, 10] и Q=[6, 14]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A, что логическое выражение $((x \in A) \rightarrow (x \in P) \vee (x \in Q))$ будет тождественно истинным, то есть будет принимать значение 1 при любом значении переменной *x*.

1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4) [15, 17]

Решение.
Эту задачу решим с помощью анализа исходного логического выражения после его преобразования, а также с помощью таблицы истинности.

Введем обозначения: $P: x \in P$, $Q: x \in Q$, $A: x \in A$

Перепишем условие задания:

$$A \rightarrow P \vee Q = \neg A + P + Q$$

Задание 4.

1 способ. Чтобы полученное выражение везде равнялось 1 , ¬A должно быть *либо* <2, *либо* >14, поскольку в интервале [2, 14] имеем *либо* P=1 *либо* Q=1 . Значит, A принадлежит отрезку [2, 14]. Этот отрезок входит в интервал под номером 3).

2 способ. Разобьем числовую ось ключевыми точками на несколько областей и составим ТИ для логического выражения.

	P	Q	P +Q	¬A	¬A + P + Q
x < 2	0	0	0	1	1
2 < x < 6	1	0	1	любое	1
6 < x < 10	1	1	1	любое	1
10 < x < 14	0	1	1	любое	1
x > 14	0	0	0	1	1

По ТИ получаем значения ¬A < 2 или ¬A > 14. Тогда решением задания будет 2 < A < 14. Это соответствует отрезку с номером 3).
Ответ: 3)

Задание 5.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[2, 20] и Q=[15, 25]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A, что *логическое* выражение

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

будет тождественно истинным, то есть будет принимать значение 1 при *любом* значении переменной *x*.

1) [0, 15] 2) [10, 25] 3) [2, 10] 4) [15, 20]

Решение.

Эту задачу решим с помощью таблицы истинности.

Введем обозначения: $P: x \in P$, $Q: x \in Q$, $A: x \in A$

Перепишем условие задания:

$$(\neg A \rightarrow \neg P) \vee Q = A + \neg P + Q$$

Задание 5.

Разобьем числовую ось ключевыми точками на несколько областей и составим ТИ для логического выражения.

	P	¬P	Q	¬P + Q	A	A + ¬ P + Q
x < 2	0	1	0	1	любое	1
2 < x < 15	1	0	0	0	1	1
15 < x < 20	1	0	1	1	любое	1
20 < x < 25	0	1	1	1	любое	1
x > 25	0	1	1	1	любое	1

Из ТИ получаем, что значения A=1 будут на интервале 2 < x < 15. Тогда решением задания будет отрезок с номером 1).

Ответ: 1)

Задание 6.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[10; 18] и Q=[31; 40]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \lor \neg (x \in A) \lor (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Ответ: 9

Задание 7.

На числовой прямой даны два отрезка: R=[10; 30] и S=[20; 40]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка T, что формула

$$(x \in T) \longrightarrow ((x \in R) \vee (x \in S))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Ответ: 30

Задание 8.

На числовой прямой даны два отрезка: R=[20; 50] и S=[30; 65]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка T, что формула

$$\neg (x \in T) \longrightarrow ((x \in R) \longrightarrow \neg (x \in S))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Ответ: 20

Задание 9.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[10; 25] и Q=[0; 12]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок А, что формула

$$((x \notin Q) \longrightarrow (x \notin P)) \vee (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [10, 15] 2) [20, 35] 3) [5, 20] 4) [12, 40]

Ответ: 4)

Задание 10.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 40] и Q = [30, 50]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \longrightarrow (x \in Q)) \lor (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной $\boldsymbol{x}$. Какова наибольшая возможная длина отрезка A?

1) 10　　2) 20　　3) 30　　4) 40

Ответ: 2)

Источники

- сайт К. Полякова
  http://kpolyakov.spb.ru

- Открытый банк заданий ФИПИ

- С.С. Крылов, Т.Е. Чуркина ЕГЭ-2018 – типовые экзаменационные варианты. Информатика и ИКТ. Москва. Национальное образование. 2017

- В.Р. Лещинер. Информатика. ЕГЭ-2018. Типовые тестовые задания. Москва. Издательство «Экзамен». 2017

- Самылкина Н.Н. и др. Подготовка к ЕГЭ-2018. Информатика. Москва. Эксмо. 2017