Подготовка к ЕГЭ по теме: «Теория вероятности и математическая статистика»

Для того, чтобы решать задачи по теории вероятностей нужно иметь своего рода вероятностное мышление, которое формируется поэтапно, по мере углубления в этот своеобразный раздел математики. Теория вероятностей - это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений то есть другими словами, в котором изучаются случайные явления и выявляются закономерности при массовом их повторении.

В задачах ЕГЭ в основном встречаются три вида задач: Простейшие задачи, на определение вероятности – как правило они не вызывают трудностей у учащихся. Задачи, решаемые с помощью графа и Задачи на правила вероятностей, которые вызывают затруднения, возможно ещё и потому, что дети не обладают данной теорией.

Прежде чем приступить к задачам, вспомним теорию. Задачи, на определение вероятности решаются методом логического перебора: когда выписываются все возможные исходы (а), выбираются благоприятные (b) и находится отношение $p = b:a$

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется делящимся на 5? <u>(6/30=1/5)</u>

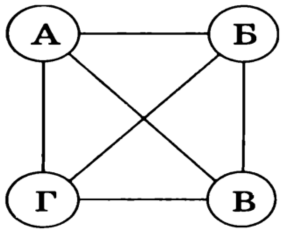
В фирме такси в данный момент свободно 10 машин: 5 чёрных, 1 жёлтая и 4 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси. (1/10)

Задачи на графы. Иногда условие удобнее расположить в виде графа – дерева, который позволяет найти количество всех возможных исходов, выбрать благоприятные и вычислить вероятность.

Давайте решим несколько таких задач:

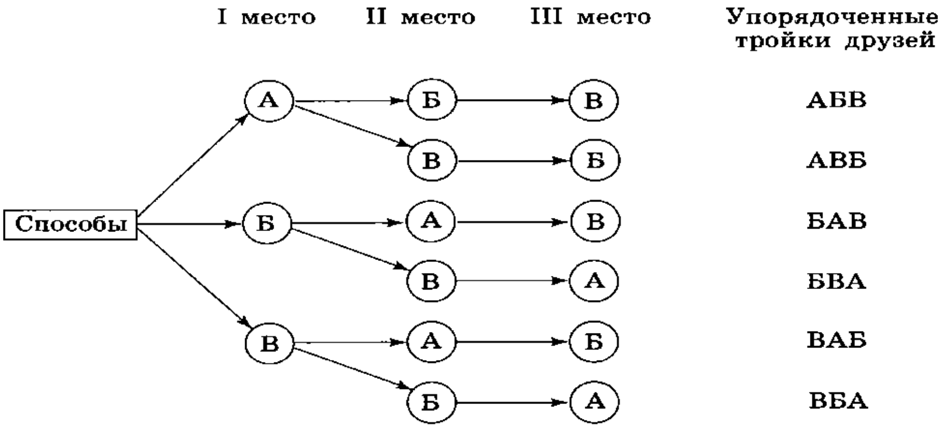
1) Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решение: решим задачу с помощью так называемого полного графа с четырьмя вершинами А, Б, В, Г, обозначенными по первым буквам имён каждого из 4 мальчиков. В полном графе проводятся все возможные рёбра. В данном случае отрезки-рёбра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой мальчиков. Из рисунка видно, что граф имеет 6 рёбер, значит, и партий было сыграно 6.

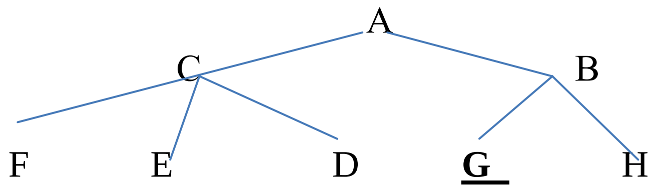


2) Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

Решение: на 1-е место может сесть любой из троих друзей, на 2-е – любой из двоих оставшихся, а на 3-е – последний. Сказанное изобразим с помощью дерева, помещая в вершины графа первые буквы имён друзей А, Б, В:



3) Пенсионер совершает прогулку из точки А по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Какова вероятность, что он придёт в пункт G.



Решение: Возьмём любое число исходов, причём, чем больше, тем точнее.

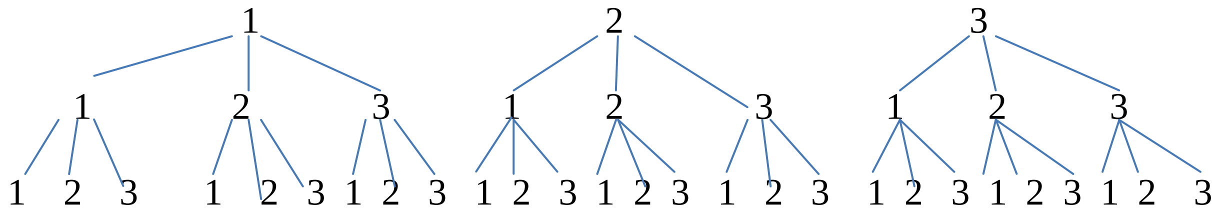
N=1000.

M_B=1000:2=500 (т.к. две развилки)

M_G=500:2=250 (т.к. две развилки)

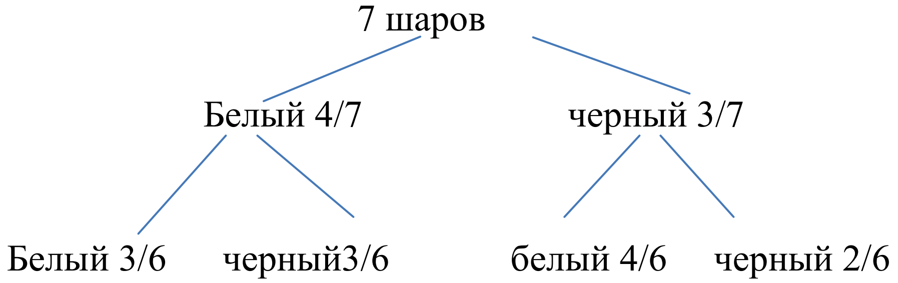
Находим вероятность P=250/1000=0,25.

4) Сколько различных трёхзначных чётных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3.



Выбираем чётные (благоприятные): 9.

5) В урне 3 чёрных и 4 белых шара. Вынимают один из них, перемешивают и вынимают другой. Какова вероятность достать 2 белых шара, 2 чёрных, шары разных цветов.



<u>Решение:</u> Исходы: 2 белых шара: 4/7*3/6=2/7

Шары разных цветов: 3/7*4/6+4/7*3/6=4/7

2 чёрных шара: 3/7*2/6=1/7

В данной задаче ещё и используются правила:

Сложение и умножение вероятностей.

Событие называют противоположным событию А, если оно происходит только тогда, когда не происходит событие А. Обозначается $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Два события называются несовместными, если в одном и том же испытании, они не могут произойти одновременно, т.е. наступление одного из них исключает наступление другого.

Теорема о сумме вероятностей: Если событие С означает, что наступает одно из двух несовместных событий А или В, то вероятность события С равна сумме вероятностей событий А и В.

$$P(C)=P(A)+P(B)$$

Два события называются независимыми, если наступление одного из них, не влияет на вероятность наступления другого события.

Теорема о произведении вероятностей: Если событие С означает совместное наступление двух независимых событий А и В, то вероятность события С равна произведению вероятностей событий А и В.

$$P(C) = P(A) \cdot P(B)$$

Решим несколько задач на правила:
1). Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что пассажиров в автобусе наберётся менее двадцати человек, составляет 0,94. Вероятность того, что пассажиров будет менее пятнадцати – 0,56. Найти вероятность того, что число пассажиров в автобусе будет от пятнадцати до девятнадцати человек.
Решение: Итак, пусть событие А будет заключаться в том, что автобусом решило воспользоваться менее 20 человек, т.е. P(A) = 0,94. Событие В – пассажиров в автобусе меньше 15 человек и, следовательно, P(B) = 0,56. Событие С – пассажиров в автобусе от 15 до 19 человек, и требуется вычислить вероятность этого события P(C). Но события В и С вместе (надо говорить, объединение событий) составляют событие А, при этом они не пересекаются, т.е. совместно события В и С не могут произойти. Поэтому имеем, P(A)=P(B)+P(C), откуда P(C) = P(A) - P(B) = 0.94 - 0.56 = 0,38.

2). Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой.
Решение:
Обозначим события:
А – выбранная батарейка не исправна.
В – выбранная батарейка исправна.
С – система контроля забраковала батарейку.
Применяя формулу полной вероятности получим искомую вероятность события С:
P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = 0,03×0,95 + 0,97×0,04 = 0,0673
Здесь вероятность события В вычисляется как P(B) = 1 – P(A) = 1 – 0,03 = 0,97.
Итак, Ответ: 0,0673.
Я хочу предложить такую цепь рассуждений, которая, по моему мнению, может помочь решить эту задачу тем ученикам или учителям, которые не могут прочитать учебник в силу его отсутствия или понять формулу полной вероятности.
Можно представить, что имеется 10000 изготовленных батареек, из которых 300 не исправны, а 9700 исправны. И вот все эти батарейки отправили на контроль. Ясно, что система из трех неисправных батареек забракует 300×0,95 = 285 штук. Из 300 неисправных 285 система забракует и из 9700 исправных будет забраковано 388 и того система не пропустит 285+388=673 из 10000. И отсюда легко получим тот же ответ, разделив 673 на 10000.

3). Стрелок стреляет по мишени с вероятностью попадания 0,6. Если он промахивается один раз, можно выстрелить второй. Какова вероятность поражения мишени в таких условиях стрельбы?

Решение: Предлагаем аналогичную цепь рассуждений. Пусть всего мишеней, в которую стреляли один раз 1000. Стрелок попал 600 раз. 400 раз он промахнулся, поэтому будет стрелять ещё столько же раз. Попадёт 400*0,6=240 раз. Получается всего стрелок поразил мишень 600+240=840 раз. Находим вероятность: 840/1000=0,84.

4). В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Рассмотрим события

A = кофе закончится в первом автомате,

B = кофе закончится во втором автомате. Тогда

A·B = кофе закончится в обоих автоматах,

A + B = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию P(A) = P(B) = 0,3; P(A·B) = 0,12.

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B) = 0,3 + 0,3 − 0,12 = 0,48.

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна 1 − 0,48 = 0,52. Ответ: 0,52.

5). Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение: Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем: $P(A)=0,9\cdot 0,05=0,045$,$P(B)=0,01\cdot 0,95=0,0095$, $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,045+0,0095=0,0545$. Ответ: 0,0545