Задачи №17

Из опыта работы учителя

математики и информатики

МКОУ «Бурганкентская СОШ» Табасаранского района

Республики Дагестан

Рамазанова Шихмагомеда Расуловича.

I. **<u>Вспомним:</u>**

1) 1% - это 0,01

2) <u>Основные соотношения и выражениями, встречающиеся при решении задач на проценты:</u>

- Число ***а*** составляет ***р%*** от числа ***в*****:**

  $$a = \frac{b}{100} \cdot p = 0{,}01bp$$

- Число ***а*** увеличили на ***р%:***

  $$a \cdot (1+0{,}01p)$$

- Число ***а*** увеличили сначала на ***р%,*** а потом еще на ***q%:***

  $$a \cdot (1+0{,}01p) \cdot (1+0{,}01q)$$

- Число ***а*** уменьшили на ***р%:***

  $$a \cdot (1 - 0{,}01p)$$

3) <u>Задачи, связанные с изменением цены</u>

Пусть S_o – первоначальная цена, S – новая (окончательная) цена.

- Повышение цены на ***а%*** ***n*** раз на ***а%***

  $$S= S_o \cdot (1+0{,}01a) \qquad S= S_o \cdot (1+0{,}01a)^n$$

- Понижение цены на ***а%*** ***n*** раз на ***а%***

$S = S_o \cdot (1-0,01a)$ $\qquad$ $S = S_o \cdot (1-0,01a)^n$

- Удобно пользоваться схематичной записью:

$$S_o \xrightarrow{a\%} S_o\cdot(1+0,01a) \xrightarrow{d\%} S_o\cdot(1+0,01a)(1-0,01d)$$

Пример 1.

Цена товара сначала понизилась на 5%, а затем повысилась на 5%.Изменилась ли первоначальная цена и если да, то на сколько процентов?

$$S_o \xrightarrow{5\%} S_o(1-5\cdot 0,01) \xrightarrow{5\%} S = S_o(1-5\cdot 0,01)\,(1+5\cdot 0,01)$$

$S = S_o(1-5\cdot 0,01)\,(1+5\cdot 0,01) = S_o(1-25\cdot 0,0001).$

Ответ. Понизилась на 25%.

Пример 2.

После двух последовательных понижений цены товар стал стоить 2400 руб. Какова исходная цена товара, если после первого понижения его цена была 3200 руб., а процент второго пониженения был на 5% больше, чем процент первого?

$$X \text{ руб} \xrightarrow{y\%} X(1 - 0{,}01y) = 3200 \xrightarrow{(y+5)\%} 2400 \text{ руб.}$$

Получаем систему: $\begin{cases} X(1 - 0{,}01y)(1 - (y+5)\cdot 0{,}01) = 2400, \\ X(1 - 0{,}01y) = 3200; \end{cases}$

$$3200\cdot(1-(y+5)\cdot 0{,}01) = 2400;$$

$$(1-(y+5)\cdot 0{,}01) = \frac{3}{4}; \qquad (y+5)\cdot 0{,}01 = \frac{1}{4}; \qquad y+5 = 25; \qquad y=20\%$$

$$X(1 - 0{,}01\cdot 20)=3200; \quad X\cdot 0{,}8=3200; \quad X=4000.$$

Ответ: 4000руб; 20%.

Пример 3.

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

1 способ.

	Долг (руб.)	Остаток (руб.)
31.12.2014 г	4 290 000	
31.12.2015 г	$4\ 290\ 000 \cdot 1{,}145 = 4\ 912\ 050$	$4\ 912\ 050 - X$
31.12.2016 г	$(4\ 912\ 050 - X) \cdot 1{,}145 = 5\ 624\ 297{,}25 - 1{,}145X$	$5\ 624\ 297{,}25 - 1{,}145X - X = 0$

Имеем уравнение: $5\ 624\ 297{,}25 - 1{,}145X - X = 0$;

$X = 2\ 622\ 050.$

Таким образом, ежегодная выплата составляет 2 622 050 руб.

Ответ: 2 622 050 руб.

2 способ.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1 + b)X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^2}{b + 1}$.

При $S = 4\,290\,000$ и $a = 14,5$, получаем: $b = 1,145$ и

$$X = \frac{4\,290\,000 \cdot 1,311025}{2,145} = 2\,622\,050 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 2 622 050 руб.

Пример 4.

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

1 способ.

	Долг	***Остаток***
31.12.2014 г	6 902 000рублей	
31.12.2015 г	6 902 000·1,125 = 7 764 750	7 764 750- X
31.12.2016 г	(7 764 750– X) ·1,125= = 8 735 343,75 – 1,125X	8 735 343,75– 1,125X – X= =8 735 343,75– 2,125X
31.12.2017 г	(8 735 343,75– 2,125X) ·1,125 =9 827 261, 71875 – 2,390625X	9 827 261, 71875 – 3,390625X
31.12.2018 г	(9 827 261, 71875 – 3,390625X)· ·1,125 = 11055669,43359375- -3,814453125X	11055669,43359375- -4,814453125X = 0

Имеем уравнение: 11055669,43359375- 4,814453125X = 0;

X=2 296 350.

Таким образом, ежегодная выплата составляет 2 296 350 руб.

Ответ: 2 296 350 руб.

2 способ.

Пусть S – сумма кредита, годовые $a\%$. , $в=1+0{,}01a$.

31.12.2015 г. $S_1 = Sb-X$

31.12.2016 г. $S_2 = S_1b-X = (Sb-X)b-X = Sb^2 - (1+b)X$

31.12.2017 г. $S_3 = S_2b-X = (Sb^2 - (1+b)X)b - X = Sb^3 - (1+b+b^2)X =$

$$= Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1}X$$

31.12.2018 г. $S_4 = S_3b-X = Sb^4 - (1+b+b^2)bX-X = Sb^4 - (1+b+b^2+b^3)X =$

$$= Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1}X.$$

При S=6 902 000, в = 1,125 находим S из уравнения $Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1}X = 0.$

Напомним: $(a-1)(a^2+a+1) = a^3-1$ отсюда $a^2+a+1 = \frac{a3-1}{a-1}$

$(a-1)(a^3+a^2+a+1) = a^4-1$ отсюда $a^3+a^2+a+1 = \frac{a4-1}{a-1}$

Пример 5.

31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Антон переводит определенный транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй – 649 тыс. руб. Под какой процент банк выдал кредит Антону?

Решение. $b=1+0{,}01a$

	Долг	*Остаток*
31.12.2014 г	$1\,000\,000$ руб.	
31.12.2015 г	$1\,000\,000\cdot(1+0{,}01a)=1\,000\,000+10\,000a$	$1\,000\,000+10\,000a-510\,000= =490\,000+10\,000a$
31.12.2016 г	$(490\,000+10\,000a)\cdot(1+0{,}01a)=100a^2+14900a-4900$	$100a^2+14900a-490000-64900=0$

$$100a^2+14900a-159000-64900=0;$$

$$a^2+149a-1590=0;$$

$$a_1=10;\ a_2=-159.$$

По смыслу задачи $a>0$, поэтому кредит выдан под 10%.

Ответ: 10%.

Пример 6.

31 декабря 2014 Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 20%), затем **Тимофей** переводит в банк платеж. Весь долг **Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?**

1 способ.

	Долг (руб.)	Остаток (руб.)
31.12.2014 г	7 007 000	
31.12.2015 г	$7\,007\,000 \cdot 1{,}2 = 8\,408\,400$	$8\,408\,400 - X$
31.12.2016 г	$(8\,408\,400 - X) \cdot 1{,}2 = 10\,090\,080 - 1{,}2X$	$10\,090\,080 - 2{,}2X$
31.12.2017 г	$(10\,090\,080 - 2{,}2X) \cdot 1{,}2 = 12\,108\,096 - 2{,}64X$	$12\,108\,096 - 3{,}64X$

$$12\,108\,096 - 3{,}64X = 0$$

$$X = 3\,326\,400; \qquad 3X = 9\,979\,200$$

	Долг (руб.)	Остаток (руб.)
31.12.2014 г	7 007 000	
31.12.2015 г	$7\,007\,000 \cdot 1{,}2 = 8\,408\,400$	$8\,408\,400 - Y$
31.12.2016 г	$(8\,408\,400 - Y) \cdot 1{,}2 = 10\,090\,080 - 1{,}2Y$	$10\,090\,080 - 2{,}2Y$

$10\,090\,080 - 2{,}2Y = 0;$ $\qquad Y = 4\,586\,400;$ $\quad 2Y = 9\,172\,800$

Значит, 3X-2Y= 9 979 200 - 9 172 800 = 806 400.

Ответ: 806 400 руб.

II способ.

1) $S_3 = S_2b - X = (Sb^2 - (1+b)X)b - X = Sb^3 - (1+b+b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1}X$

По условию задачи $Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1}X = 0$, *откуда* $X = \frac{Sb^3\,(b-1)}{b^3-1}$

2) $S_2 = S_1b - Y = (Sb-Y)b - Y = Sb^2 - (1+b)Y$, *откуда* $Sb^2 - (1+b)Y = 0$, $Y = \frac{Sb^2}{b+1}$

Пример 7. (Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ 2015)

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

<u>1 способ.</u>

Пусть ***S руб.*** – сумма кредита, ежегодный платеж равен ***X руб.***, годовые составляют ***a%***, *тогда* 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент ***b=1+0,001a.***

	Долг (руб.)	***Остаток (руб.)***
31 декабря 2013 года	S	
31 декабря 2014 года	Sb	$S_1 = Sb - X$
31 декабря 2015 года	$S_1 b = (Sb - X)b$	$S_2 = (Sb - X)b - X = Sb^2 - Xb - X =$ $= Sb^2 - (1+b)X$
31 декабря 2016 года	$S_2 b = (Sb^2 - (1+b)X)b$	$S_3 = (Sb^2 - (1+b)X)b - X =$ $= Sb^3 - (1+b+b^2)X =$ $= Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому имеем уравнение:

$Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X = 0.$ Откуда $X = \frac{Sb^3(b-1)}{b^3-1}.$

Ответ. 3 993 000 руб.

Пример 8. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение.

50% годовых означает, что каждый год сумма на счету вкладчика увеличивается в 1,5 раза.

Будем рассуждать следующим образом:

1) Вкладчик ничего не добавляет к первоначальной сумме:

Первоначальная сумма	**Через один год**	**Через два года**	**Через три года**	**Через четыре года**	**Через пять лет**
3 900	$1{,}5 \cdot 3\,900$	$1{,}5^2 \cdot 3\,900$	$1{,}5^3 \cdot 3\,900$	$1{,}5^4 \cdot 3\,900$	$1{,}5^5 \cdot 3\,900$

2) Первая добавка ***x*** рублей была внесена через год:

Первоначальная сумма	**Через один год**	**Через два года**	**Через три года**	**Через четыре года**	**Через пять лет**
3 900	$1{,}5 \cdot 3\,900$	$1{,}5^2 \cdot 3\,900$	$1{,}5^3 \cdot 3\,900$	$1{,}5^4 \cdot 3\,900$	$1{,}5^5 \cdot 3\,900$
	x	$1{,}5x$	$1{,}5^2x$	$1{,}5^3x$	$1{,}5^4x$

3) Вкладчику это понравилось, и он стал повторять процесс (вносить х руб.) каждый год:

Первоначальная сумма	**Через один год**	**Через два года**	**Через три года**	**Через четыре года**	**Через пять лет**		
3 900	$1{,}5\cdot 3\,900$	$1{,}5^2\cdot 3\,900$	$1{,}5^3\cdot 3\,900$	$1{,}5^4\cdot 3\,900$	$1{,}5^5\cdot 3\,900$		***3 900·8,25***
	x	1,5x	$1{,}5^2x$	$1{,}5^3x$	$1{,}5^4x$	$\mathbf{\frac{3x\cdot 65}{2^4}}$	
		x	1,5x	$1{,}5^2x$	$1{,}5^3x$		
			x	1,5x	$1{,}5^2x$		
				x	1,5x		

Через 5 лет вкладчик забрал все деньги из последнего столбика:

а) Добавки принесли доход

$$1{,}5x + 1{,}5^2x + 1{,}5^3x + 1{,}5^4x = x(1{,}5 + 1{,}5^2 + 1{,}5^3 + 1{,}5^4) = X\cdot\frac{1{,}5(1{,}5^4-1)}{1{,}5-1} = 3\cdot x\cdot(1{,}5^4-1) = \frac{3x\cdot 65}{2^4}.$$

б) Известно, что размер вклада увеличился на 725%, т.е. увеличился в 8,25 раз

$$1{,}5^5\cdot 3\,900 + \frac{3x\cdot 65}{2^4} = 3\,900\cdot 8{,}25; \qquad \frac{3x\cdot 65}{2^4} = 3\,900\cdot 8{,}25 - 1{,}5^5\cdot 3\,900;$$

$$X = 210.$$

Ответ: 210руб.

Примечание: Применим формулу суммы п-первых членов геометрической прогрессии: $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

Пример 6. (Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ 2015)

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

1 способ.

Пусть ***S руб.*** – сумма кредита, ежегодный платеж равен ***X руб.***, годовые составляют ***a%***, *тогда* 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент ***b=1+0,001a.***

	Долг (руб.)	***Остаток (руб.)***
31 декабря 2013 года	S	
31 декабря 2014 года	Sb	$S_1 = Sb-X$
31 декабря 2015 года	$S_1 b = (Sb - X)b$	$S_2 =(Sb - X)b – X=Sb^2– Xb -X =$ $= Sb^2– (1+b)X$
31 декабря 2016 года	$S_2 b = (Sb^2– (1+b)X)b$	$S_3 =(Sb^2– (1+b)X)b – X=$ $= Sb^3–(1+b+b^2)X=$ $= Sb^3-\frac{b^3-1}{b-1}\cdot X$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому имеем уравнение:

$$Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1}\cdot X = 0.$$ Откуда $$X=\frac{Sb^3(b-1)}{b^3-1}.$$

Ответ. 3 993 000 руб.

Задача 3. УМК для экспертов

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Представим таблицей реальную ситуацию, описанную в условии задачи:

Дата	15.01		15.02		15.03		15.04		15.05		15.06		15.07
Долг (в процентах от кредита) на начало месяца	100%		90%		80%		70%		60%		50%		0%
Долг (в процентах от кредита) к концу месяца		105		1,05·90 =94,5%		1,05·80 =84%		1,05·70 =73.5%		1,05·60 =63%		1,05·50 =52,5%	
Процент выплаты кредита			105-90 =15%		94,5-80= 14,5%		84-70= 14%		73.5-60 =13,5%		63-50= 13%		52,5%

15%+14,5%+14%+13,5%+13%+52,5% =122,5%

122,5% - 100% = 22,5%

Ответ: 22,5.

Ресурсы:

1. http://www.prosv.ru – сайт издательства, Просвещение, рубрика ,,математика,,/ ;

2. http://www.edu.ru-//www.edu.ru -Центральный образовательный портал, содержит нормативные документы Министерства, стандарты;

3. http://www.pedsovet.su/ ;

4. http://nsportal.ru/shkola/obshchepedagogicheskie-tekhnologii/library/2015/03/04/